第五章 量子纠缠与 *Bell* 型空间非定域性

§5.1, *Bell-CHSH-GHZ-Hardy-Cabello* 路线综述

1, *EPR* 佯谬引发的 *Bell* 不等式路线

i, *EPR* 佯谬和量子理论的完备性

Einstein 与 ***Bohr*** 就量子力学（实际上，以下论述的基本观念对非相对论量子力学到相对论量子场论都适用，所以下面简称为量子理论——*QT*）基本观念的完备性问题长期争论之后，于 **1935** 年和 ***Podolsky*** 及 ***Rosen*** 共同发表了一篇重要文章【**1**】。文章基本思想认为，借助理想实验的逻辑论证方法，可以表明 ***QT*** 不能给出对于微观系统的完备的描述。通常称他们的论证为"***EPR*** 佯谬"或称"***Einstein*** 定域实在论"【**1**】。他们认为：

一个完备的物理理论应当满足下列两个条件：其一，物理实在的每一个要素在一个完备的理论中都应当有其对应物；其二，如果不以任何方式干扰系统，而能肯定预言一个物理量的数值，那就意味着存在一个与此物理量对应的实在要素。这个常说的"定域实在论"包含两个物理要素："物理实在论"和"相对论性定域因果律"【**10**】。详细说即是

a) 定域因果性观点。如果两次测量（或一般说，两个事件）之间的四维时空间隔是类空的，两个事件之间将不存在因果性关系。

b) 物理实在要素的观点。任一可观测的物理量，作为物理实在的一个要素，它必定在客观上以确定的方式存在着。反映在一个

完备的物理理论中就是，如果没有扰动一个系统，此系统的任何可观测物理量客观上应当具有确定的数值。

由此得出，对 A、B 两个子系统两次可观测量的测量，如间隔是类空的，则测量值彼此无关，并且数值是确定的。就是说，如果 QM 是完备的物理理论的话，对 A 所做的测量必须不影响类空间隔下对 B 的描述。反之也是。这就是 EPR 佯谬的核心思想。

下面分析 $Bohm$ 后来提出的 EPR 佯谬翻版——更容易实现的电子自旋纠缠方案。1951年 $Bohm$【2】提议：考虑总自旋为零的两个 $\hbar/2$ 自旋粒子，比如产生的正负电子对 A 和 B，处于自旋纠缠态 $|\psi^-\rangle_{AB}$ 上，

$$|\psi^-\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle_A|\downarrow\rangle_B - |\downarrow\rangle_A|\uparrow\rangle_B\right) \tag{5.1}$$

假定它们反向飞行足够远，彼此空间距离拉开足够大，使得有足够精度说两个粒子的空间波包不再交叠。同时，对它们分别作独立测量的两个时刻又足够靠近，于是这两次测量所构成的两个事件将为类空间隔。依据相对论性定域因果律，对电子 A 的测量应当不会对正电子 B 造成任何影响。

首先，考虑可观测量 σ_z。若对 A 测得 $\sigma_z^A = +1$，可以肯定地推断 B 处于 $\sigma_z^B = -1$；反之若测得 $\sigma_z^A = -1$，则知 $\sigma_z^B = +1$。总之，一旦对 A 作了 σ_z 的测量，则 B 的 σ_z 值便在客观上是确定的。现在，测量时间与距离所构成的间隔是类空的，所以对 A 的测量将不影响 B 的状态。按定域实在论的观点，σ_z^B 应当是一个物理实在的要素。就是说，不论人们是否对 B 作测量，σ_z^B 的数值在客观上将是确定地存在着。

其次，考虑可观测量σ_x。若对A测得$\sigma_x^A=+1$，应可推知$\sigma_x^B=-1$。因为这时

$$ {}_A\langle\sigma_x=+1|\psi\rangle_{AB}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left({}_A\langle\uparrow|+{}_A\langle\downarrow|\right)|\psi\rangle_{AB}=\frac{1}{2}\left(|\downarrow\rangle_B-|\uparrow\rangle_B\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}|\sigma_x=-1\rangle_B \quad (5.2)$$

同样，若测得$\sigma_x^A=-1$，则知$\sigma_x^B=+1$。总之，对A作了σ_x测量，便能肯定地知道σ_x^B数值而又不会扰动B粒子的状态。

再三，关于σ_y的情况也类似。即σ_y^B也是一个物理实在的要素，客观上确定地存在着。

总之，$\sigma_x^B,\sigma_y^B,\sigma_z^B$ 都是物理实在要素，它们在（对B粒子）测量之前客观上都同时具有确定值。

然而，按照 ***QM*** 的观点，由于B粒子的三个自旋算符彼此不对易，它们本来客观上就是不能同时具有确定值的。***QM*** 甚至认为，A、B两个粒子自旋指向都是不确定的，每个粒子自旋指向都依赖于对方取向不定而不定，虽然两粒子总自旋处于数值为零的确定状态。所以说，它俩自旋取向因纠缠而处于一种不确定的状态。

这就是 ***EPR*** 佯谬。***Einstein*** 说，这个佯谬表明：① 要么 ***QM*** 中波函数的描述方式是不完备的，② 要么，两个子系统即便处于类空间隔，它们的实际状态也可以是不独立的。根据定域实在论观点，***Einstein*** 对第二条持绝对的否定态度。于是他们认为，这个理想实验表明了：纠缠态在测量中所表现的不确定性是 ***QM*** 波函数描述不完备的体现。

Einstein 认为，***QM*** 对单次测量结果只能作统计性予言，这和抛掷钱币时人们对字（花）的结果只能作统计性予言的情况相似，表明

人们对量子测量过程认识和描述的不完备。这导致后来许多人猜测 *QM* 之外有隐变数存在。

总括起来，*EPR* 佯谬的有关观点是：其一，*QM* 中的或然性到底是隐变数所导致的或然，因此仅仅是表观上的或然——即所谓“人玩掷骰子”？还是无隐变数的或然，从而是本质性的或然——即所谓“上帝玩掷骰子”？他们不相信后者，所以形象地说“上帝是不玩掷骰子的”；其二，他们主张：作为衡量测量影响是否存在的必要条件的相对论性定域因果律，以及可观测量总具有客观的确定性，这两方面内容结合就是 *Einstein* 的“定域实在理论”。显然，*EPR* 这两点主张相互协调，思想一致。

*Bohm*不怀疑“定域因果律”，但怀疑其中的“物理实在论 ”。*Bohm* 认为：*EPR*判据暗含了两个假定：其一，世界能正确分解成一个个独立存在的“实在要素”；其二，每个要素在一个完备理论中都应当对应有一个精确确定的数学量。

事实上，现在看来，*EPR*主张的实质——*Einstein*的“定域实在论”是一种企图通过引入定域的物理实在的信念，将*QM*纳入定域的经典统计理论的认知模式,并将*QM*中的或然性用某种未知隐变数来解释——这都是标准的经典物理的思维模式。

但是，迄今为止的全部实验结果（包括最近 5 光子符合实验【17】）和理论研究【11、12】，以及不少新近研究结果【17、18】都表明：

a) *QM* 的态叠加原理预言是正确的：量子纠缠能够造成可观测量（即便不受干扰）在客观上就是不确定的。

b) 迄今实验未能揭示也未能否定隐变数的存在。目前为止还不能肯定 ***QM*** 的描述是否完备。也即，还不清楚纠缠叠加中所包含的、单次测量塌缩中所表现的或然性的本质。就是说，迄今还不能肯定“上帝是玩、还是不玩掷骰子”。

c) 自旋态的构造以及自旋态的塌缩都是非定域的，不是定域的。实验一再明确支持：整个 ***QM*** 在状态叠加、量子纠缠与测量中所体现的或然性，以及塌缩与关联塌缩中的空间非定域性。

考虑到隐变数存在与否尚未定论，***EPR*** 佯谬中成问题的只是在相对论性定域因果律统罩之下的定域实在论（部分参见【**14**】）。或者更谨慎地说为：迄今实验一直否定定域形式下的实在论观点。***QM*** 认为，虽然两个测量事件是类空间隔，但作为子系统的 B 粒子本身已不独立，它的自旋 $\sigma^B_{x,y,z}$ 取值和 A 的自旋 $\sigma^A_{x,y,z}$ 取值紧密关联，形成统一系统的一个统一状态。因此对 A 的测量将影响（而不是如 ***Einstein*** 所认为的“不会影响”）B 的取值。***QM*** 还主张，不同的测量会使量子态产生不同的塌缩，得到不同的结果。所以对 A 的三组测量将分别对 B 自旋取值造成不同的影响。而且，这里 B 的 $\sigma^B_{x,y,z}$ 三者同时具有物理实在性的观点也和 ***QM*** 原理相违背，是一种客观上不成立的主观推断。

这里，根本分歧产生于 ***Einstein*** 等人未能理解：第一，***QM*** 中自旋态的构造（以及塌缩与关联塌缩）是非定域的，这种非定域性已经将两个子系统联结成为一个不可分割的统一系统。事实上，测量之前两个子系统的自旋都相互依赖对方，而处于客观上就是不确定的状

态；第二，如果对同一个态进行不同的测量，将会造成不同的塌缩，就会得到不同的结果，给人以不同的形象。

所以 ***Einstein*** 定域实在论的错误共计为：其一，将物理量的客观实在性简单化地理解为物理量的客观单值确定性。从而要求任何状态下微观粒子的可观测量都必须客观上为定域单值确定的。不承认相干叠加造成测量塌缩的不确定性，和量子纠缠所造成的客观不确定性（结合§2.1）。其二，不承认量子态内禀的空间非定域性，对测量塌缩持定域的观念，否认纠缠在量子测量的塌缩——关联塌缩中的空间非定域作用。其三，不理解同一量子态经受不同种类测量会有不同样的分解塌缩，并显现不同样的测量结果。

ii, *Bell* 不等式及其破坏

1964 年，***Bell*** 从① ***Einstein*** 的定域实在论，② 有隐变数存在这两点出发，推导出一个不等式【**3**】。不等式指出，基于隐变数和定域实在论的任何理论都会遵守这个不等式，而 ***QM*** 的有些预言却可以破坏这个不等式。

Bell 想法的关键是考虑 A 和 ***B*** 两处测量之间的关联。他的思路是研究一种有隐变数下的定域决定论式的关联，考虑由这种关联理论框架所带来的限制：假定有 ***QM*** 之外的某个隐变数理论，在这个理论中，测量结果是决定论的，只是由于某些隐藏的自由度而表观上呈现出随机的行为。比如，对于 ***QM*** 中一个自旋朝向 z 轴的纯态 $\left|\uparrow_z\right\rangle$，一个“更深层次的隐变数理论”认为它应当为 $\left|\uparrow_z,\lambda\right\rangle$。这里 λ 是一个不能为现

时实验技术所控制的隐变数。不失一般性，可以假设$0\le\lambda\le 1$并按照人们目前尚未知道的某种概率分布$\rho(\lambda)$在$[0,1]$中取值。

考虑 A、B 两个粒子的自旋纠缠态

$$\left|\psi^-\right\rangle_{AB}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\uparrow\right\rangle_A\left|\downarrow\right\rangle_B-\left|\downarrow\right\rangle_A\left|\uparrow\right\rangle_B\right)$$

现在，*Alice* 沿$\vec{a}$方向测量她手中A粒子的自旋，而在类空间隔上 *Bob* 沿$\vec{b}$方向测量他手中B粒子的自旋。设各自测量结果分别为$A(\vec{a},\lambda)$（为简便，设数值为+1 或-1）和$B(\vec{b},\lambda)$（+1 或--1），关联测量结果对应相乘。比如，按$|\psi\rangle$中 A 、B 自旋反向关联的特性，当$\vec{a}=\vec{b}$时，应当有

$$A(\vec{a},\lambda)B(\vec{a},\lambda)=-1 \tag{5.3}$$

假如对多个样品进行多次这样测量，所得平均结果应当是对随机变化隐变量λ的积分平均。于是在$\vec{a}$ 、$\vec{b}$两个方向测量结果的关联函数为：

$$P(\vec{a},\vec{b})=\int d\lambda\rho(\lambda)A(\vec{a},\lambda)B(\vec{b},\lambda) \tag{5.4}$$

同样地，如果沿$\vec{a}$ 、$\vec{c}$两个方向进行第二组实验，以及沿$\vec{b}$ 、$\vec{c}$进行第三组实验，将分别得到$P(\vec{a},\vec{c})$和$P(\vec{b},\vec{c})$。于是

$$\begin{aligned}\left|P(\vec{a},\vec{b})-P(\vec{a},\vec{c})\right|&=\left|\int d\lambda\rho(\lambda)\left[A(\vec{a},\lambda)B(\vec{b},\lambda)-A(\vec{a},\lambda)B(\vec{c},\lambda)\right]\right|\\&\le\int d\lambda\rho(\lambda)\left|A(\vec{a},\lambda)B(\vec{b},\lambda)-A(\vec{a},\lambda)B(\vec{c},\lambda)\right|\end{aligned}$$

由$A(\vec{b},\lambda)B(\vec{b},\lambda)=-1$和$A(\vec{b},\lambda)^2=1$，得$B(\vec{b},\lambda)=-A(\vec{b},\lambda)$，一并代入上式右边，得

$$\begin{aligned}the\ right-side&=\int d\lambda\rho(\lambda)\left|A(\vec{a},\lambda)A(\vec{b},\lambda)\left[-1-A(\vec{b},\lambda)B(\vec{c},\lambda)\right]\right|\\&=\int d\lambda\rho(\lambda)\left|A(\vec{a},\lambda)A(\vec{b},\lambda)\right|\cdot\left|1+A(\vec{b},\lambda)B(\vec{c},\lambda)\right|\end{aligned}$$

所以

$$\left|P\left(\vec{a},\vec{b}\right)-P\left(\vec{a},\vec{c}\right)\right|\le\int d\lambda\rho\left(\lambda\right)\cdot\left|1+A\left(\vec{b},\lambda\right)B\left(\vec{c},\lambda\right)\right|$$
$$=\int d\lambda\rho\left(\lambda\right)\left(1+A\left(\vec{b},\lambda\right)B\left(\vec{c},\lambda\right)\right)$$

这里已利用$\left|A\left(\vec{a},\lambda\right)A\left(\vec{b},\lambda\right)\right|=1$，并考虑到$\left|A\left(\vec{b},\lambda\right)B\left(\vec{c},\lambda\right)\right|\le 1$而省去了绝对值符号。最后得到 ***Bell*** 不等式：

$$\boxed{\left|P\left(\vec{a},\vec{b}\right)-P\left(\vec{a},\vec{c}\right)\right|\le 1+P\left(\vec{b},\vec{c}\right)} \tag{5.5}$$

这说明，对于任何定域实在论的隐变数理论，在三组（$\left(\vec{a},\vec{b}\right)$、$\left(\vec{a},\vec{c}\right)$和$\left(\vec{b},\vec{c}\right)$）实验统计平均数据（$P\left(\vec{a},\vec{b}\right)$、$P\left(\vec{a},\vec{c}\right)$和$P\left(\vec{b},\vec{c}\right)$）之间，应当满足上面不等式。

但按 ***QM*** 理解，若 A、B 两个粒子组成一个统一纠缠态$\left|\psi^-\right\rangle_{AB}$，对 A 粒子沿$\vec{a}$方向、对 B 粒子沿$\vec{b}$方向作自旋指向的联合测量，可以算得相应关联函数的平均值。注意$\left|\psi^-\right\rangle_{AB}$是三个两体算符$\sigma_x^A\sigma_x^B,\sigma_y^A\sigma_y^B,\sigma_z^A\sigma_z^B$的本征值为-1 的共同本征态，直接计算得到

$$P\left(\vec{a},\vec{b}\right)={}_{AB}\left\langle\psi^-\right|\left(\vec{\sigma}_A\cdot\vec{a}\right)\left(\vec{\sigma}_B\cdot\vec{b}\right)\left|\psi^-\right\rangle_{AB}=-\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) \tag{5.6}$$

将这些 ***QM*** 结果代入 ***Bell*** 不等式（5.5），不等式就成为

$$\left|\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)-\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{c}}\right)\right|\le 1-\cos\left(\widehat{\vec{b},\vec{c}}\right) \tag{5.7}$$

这很容易被破坏。比如，取三矢量共面，夹角为 $\angle\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=\angle\left(\widehat{\vec{b},\vec{c}}\right)=\frac{\pi}{3}$，$\angle\left(\widehat{\vec{a},\vec{c}}\right)=\frac{2\pi}{3}$，于是按 ***QM*** 计算，不等式(5.7)成了$1<\frac{1}{2}$。实际上，可以证明，***EPR*** 态是对 ***Bell*** 不等式造成最大破坏的态【4】。

现在，很容易用实验检验谁是谁非了。迄今所做的十多个实验都证明了 ***Bell*** 不等式可以被破坏。即，都反对基于定域因果律和物理实

在论上的定域实在论【10、17】。也即，表明 ***EPR*** 佯谬是不正确的，***QM*** 描述符合实验测量结果，并明确支持 ***QM*** 所表现出的（按经典理论难以理解的）空间非定域性质。

iii, ***Bell*** 不等式意义分析

深入分析上面推导可以发现，***Bell*** 结论实际上并不依赖于隐变数的解释，随机隐变数 λ 仅是一种数学表述的形式上的东西。（参见下面 ***GHZ*** 定理证明中的（**5.14**）式。其实，应当强调指出，只当主张隐变数的人能够说出隐变数的物理根源和某种可观测性质时，隐变数理论才是值得认真对待的）。就实质概念而言，***Bell*** 结论只需要（***Einstein*** 用以反对 ***QM*** 非定域性的）定域实在论就够了。实际上，对任意两体纠缠态，可以证明：只要有量子纠缠，总能找到这样一组可观测量和适当的关联函数，使某种 ***Bell*** 型不等式遭到破坏。

最后，关于 ***Bell*** 型不等式应当强调两点：其一，***Bell*** 不等式对经典和量子的划分是不清晰、不彻底的。破坏不等式只是存在量子纠缠的充份条件，而非必要条件。事实是存在部分纠缠混态，它们有纠缠但却遵守 ***Bell*** 不等式。只有对于纯态，***Bell*** 不等式的划分才是充要的。其二，***EPR*** 佯谬和 ***Bell*** 不等式的意义在于，开辟了一条考证和检验 ***QM*** 空间非定域性和或然性本质的实验研究途径，形成 ***Bell-CHSH-GHZ- Hardy- Cabello*** 一条持续数十年的理论研究路线。近年来更出现了不少重要的实验检验工作。迄今一系列相关实验检验全都证实了 ***QM*** 的空间非定域性质，但仍未能否定隐变数的存在——也即尚未判明 ***QM*** 或然性的本质。

2, *CHSH* 不等式及其最大破坏

i, *CHSH* 不等式

Bell 不等式有多种著名的推广。其中最初一个是 *CHSH* 不等式（*Clauser-Horne-Shimony-Holt*）【5】。*CHSH* 不等式在推广 *Bell* 不等式中，考虑到这类关联测量实验中的一些失误或误差因素。比如对 A（B）测量中仪器设备有时可能失效，这时按实验规定，仪器装置给出对 A（B）的测量值为零；再比如，制备出的 *EPR* 对可能不纯，因此同时沿同一方向测量 A 和 B 的自旋关联并不严格相反，等等。

这样一来，便只能得知

$$-1 \le A(\vec{a},\lambda)B(\vec{b},\lambda) \le 1 \quad （对任意\ \vec{a}，\vec{b}） \tag{5.8}$$

形式上，两体关联测量的关联函数仍然为

$$P(\vec{a},\vec{b}) = \int d\lambda \rho(\lambda) A(\vec{a},\lambda) B(\vec{b},\lambda) \tag{5.9}$$

但这里只规定 $|A|,|B| \le 1$。设 $\vec{a}$、$\vec{d}$ 和 $\vec{b}$、$\vec{c}$ 分别是 A 和 B 的两个任选的测量方向，于是，

$$\begin{aligned}
P(\vec{a},\vec{b}) - P(\vec{a},\vec{c}) &= \int d\lambda \rho(\lambda)\left[A(\vec{a},\lambda)B(\vec{b},\lambda) - A(\vec{a},\lambda)B(\vec{c},\lambda)\right] \\
&= \int d\lambda \rho(\lambda)\left[A(\vec{a},\lambda)B(\vec{b},\lambda)\right]\left[1 \pm A(\vec{d},\lambda)B(\vec{c},\lambda)\right] \\
&\quad - \int d\lambda \rho(\lambda)\left[A(\vec{a},\lambda)B(\vec{c},\lambda)\right]\left[1 \pm A(\vec{d},\lambda)B(\vec{b},\lambda)\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore\ \left|P(\vec{a},\vec{b}) - P(\vec{a},\vec{c})\right| &\le \int d\lambda \rho(\lambda)\left|A(\vec{a},\lambda)B(\vec{b},\lambda)\right| \cdot \left|1 \pm A(\vec{d},\lambda)B(\vec{c},\lambda)\right| \\
&\quad + \int d\lambda \rho(\lambda)\left|A(\vec{a},\lambda)B(\vec{c},\lambda)\right| \cdot \left|1 \pm A(\vec{d},\lambda)B(\vec{b},\lambda)\right| \\
&\le \int d\lambda \rho(\lambda)\left|1 \pm A(\vec{d},\lambda)B(\vec{c},\lambda)\right| + \int d\lambda \rho(\lambda)\left|1 \pm A(\vec{d},\lambda)B(\vec{b},\lambda)\right| \\
&= 2 \pm \left[P(\vec{d},\vec{c}) + P(\vec{d},\vec{b})\right]
\end{aligned}$$

鉴于右边第二项不论其为正或负，不等式总成立，可以将不等式写成

稍为对称的形式——*CHSH* 不等式：

$$\boxed{\left|P\left(\vec{a},\vec{b}\right)-P\left(\vec{a},\vec{c}\right)\right|+\left|P\left(\vec{d},\vec{c}\right)+P\left(\vec{d},\vec{b}\right)\right|\le 2} \tag{5.10}$$

这里并未假设体系总自旋为零。如果体系总自旋为零，即理想的反向关联 $P\left(\vec{c},\vec{c}\right)=-1$，选取特殊情况 $\vec{d}=\vec{c}$，就化简为 *Bell* 不等式。

和 *Bell* 不等式相似，*CHSH* 不等式在 *QM* 中也极易受到破坏。比如，取四矢量共面，且 $\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\angle\left(\vec{b},\vec{d}\right)=\angle\left(\vec{d},\vec{c}\right)=\frac{\pi}{4}$，于是 $\angle\left(\vec{a},\vec{c}\right)=\frac{3\pi}{4}$，按 *QM* 结果得 $P\left(\vec{a},\vec{b}\right)=P\left(\vec{b},\vec{d}\right)=P\left(\vec{d},\vec{b}\right)=P\left(\vec{d},\vec{c}\right)=\frac{-1}{\sqrt{2}}$，$P\left(\vec{a},\vec{c}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$，代入（5.10）式成为 $2\sqrt{2}\le 2$。

ii, *CHSH* 不等式的最大破坏【5、10】

现在来给出 *CHSH* 不等式的最大破坏。按照 *QM*，*CHSH* 不等式的破坏有一上限：$2\sqrt{2}$。这是由于

$$\begin{cases}\left(\vec{\sigma}_A\cdot\vec{a}\right)^2=\left(\vec{\sigma}_A\cdot\vec{d}\right)^2=I_A, & \left(\vec{\sigma}_B\cdot\vec{b}\right)^2=\left(\vec{\sigma}_B\cdot\vec{c}\right)^2=I_B\\ \left[\vec{\sigma}_A\cdot\vec{a},\vec{\sigma}_B\cdot\vec{b}\right]=\left[\vec{\sigma}_A\cdot\vec{a},\vec{\sigma}_B\cdot\vec{c}\right]=\left[\vec{\sigma}_A\cdot\vec{d},\vec{\sigma}_B\cdot\vec{c}\right]=\left[\vec{\sigma}_A\cdot\vec{d},\vec{\sigma}_B\cdot\vec{b}\right]=0\end{cases}$$

令

$$\begin{aligned}\Omega&=\left(\vec{\sigma}_A\cdot\vec{a}\right)\left(\vec{\sigma}_B\cdot\vec{b}\right)+\left(\vec{\sigma}_A\cdot\vec{d}\right)\left(\vec{\sigma}_B\cdot\vec{b}\right)+\left(\vec{\sigma}_A\cdot\vec{d}\right)\left(\vec{\sigma}_B\cdot\vec{c}\right)-\left(\vec{\sigma}_A\cdot\vec{a}\right)\left(\vec{\sigma}_B\cdot\vec{c}\right)\\ \Omega^2&=4+\left[\left(\vec{\sigma}_A\cdot\vec{a}\right),\ \left(\vec{\sigma}_A\cdot\vec{d}\right)\right]\left[\left(\vec{\sigma}_B\cdot\vec{b}\right),\ \left(\vec{\sigma}_B\cdot\vec{c}\right)\right]\\ &=4-4\left[\left(\vec{a}\times\vec{d}\right)\cdot\vec{\sigma}_A\right]\left[\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\cdot\vec{\sigma}_B\right]\end{aligned}$$

因此，按 *QM*，对 于任意两体纠缠态 $|\psi\rangle_{AB}$，总有

$$\begin{aligned}\langle\psi|\Omega^2|\psi\rangle&=4-4\sin\left(\vec{a},\vec{d}\right)\sin\left(\vec{b},\vec{c}\right)P\left(\vec{a}\times\vec{d},\vec{b}\times\vec{c}\right)\\ &\le 4+4=8\end{aligned}$$

这里，$P\left(\vec{a}\times\vec{d},\vec{b}\times\vec{c}\right)$ 是 A 和 B 分别在 $\vec{a}\times\vec{d}$ 及 $\vec{b}\times\vec{c}$ 方向测量自旋取向的关联函数，其模值不超过 1。考虑到 $\left\{\langle\psi|\Omega|\psi\rangle\right\}^2\le\langle\psi|\Omega^2|\psi\rangle$，最后得到

$$\boxed{\langle\psi|\Omega|\psi\rangle \le 2\sqrt{2}} \tag{5.11}$$

说明：数值 $2\sqrt{2}$ 是 *CHSH* 关联测量中的上限。

3, *GHZ* 定理及其实验检验

上面两节都是借助对各种不等式的破坏来揭示量子态的空间非定域性质——以后称它作为“关联非定域性”。由于实验中测量的关联函数均为态中的平均值，因此，关于破坏与否的论断都是以统计方式作出的。事实上，也可以找到没有不等式的 **Bell** 定理，使得人们可以用一种确定的、非统计的方式来揭示量子态的这种非定域性。从本节开始，介绍这条思路上最主要的几个无不等式的 **Bell** 定理。

i, *GHZ* 定理及意义【6】

“对于三粒子 *GHZ* 态，存在一组相互对易的可观测量，对于这组力学量的测量，*QT* 将以确定的、非统计的方式给出与经典定域实在论不相容的结果。”

论证：设三个 $\frac{1}{2}$ 自旋粒子体系处于下面 *GHZ* 态上

$$|\Psi\rangle_{ABC} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle_A|0\rangle_B|0\rangle_C - |1\rangle_A|1\rangle_B|1\rangle_C\right) \tag{5.12}$$

由 *QM* 的 $\sigma_x^A|0\rangle_A = |1\rangle_A$ 等公式，可以得知，体系的这个状态是以下 4 个对易力学量组的共同本征态，相应的本征值和本征方程分别为：

$$\boxed{\begin{cases} \sigma_x^A\sigma_y^B\sigma_y^C|\Psi\rangle_{ABC} = |\Psi\rangle_{ABC} \\ \sigma_y^A\sigma_x^B\sigma_y^C|\Psi\rangle_{ABC} = |\Psi\rangle_{ABC} \\ \sigma_y^A\sigma_y^B\sigma_x^C|\Psi\rangle_{ABC} = |\Psi\rangle_{ABC} \\ \sigma_x^A\sigma_x^B\sigma_x^C|\Psi\rangle_{ABC} = -|\Psi\rangle_{ABC} \end{cases}} \tag{5.13}$$

现在，按照定域实在论的观点理解对这个态的观测问题。首先考虑可观测量 σ_x^A。由态 $|\Psi\rangle_{ABC}$ 知道，如果对 B、C 测量得到 $\sigma_y^B\sigma_y^C = +1$，

就可以肯定地推断 A 处于 $\sigma_x^A=+1$ 的状态；反之如果测量得出 $\sigma_y^B\sigma_y^C=-1$，就知道 $\sigma_x^A=-1$。因此，不管对 B、C 测量的结果如何，只要对它们作了 $\sigma_y^B\sigma_y^C$ 测量，那么 A 的 σ_x^A 值就是客观确定了的。考虑对三个粒子的测量均彼此以类空间隔分开。由相对论性定域因果律得知，对 B、C 粒子作测量不会干扰 A 粒子的 σ_x^A，按照定域实在论观点，σ_x^A 就应该是一个客观存在的物理实在元素，它在客观上应当具有一个确定值，为 m_x^A（$+1$ 或者 -1）。接着考虑其它如 σ_y^B 等，论证类同。于是，按照经典的定域实在论观点，客观上应当存在一组数（$+1$ 或 -1），能使方程组（5.13）成立：

$$\begin{aligned} m_x^A m_y^B m_y^C &= 1 \qquad m_y^A m_y^B m_x^C = 1 \\ m_y^A m_x^B m_y^C &= 1 \qquad m_x^A m_x^B m_x^C = -1 \end{aligned} \tag{5.14}$$

但是，这组按照定域实在论的理解所得的方程组（5.14），显然含有内在的矛盾，无法同时成立。比如，将前三个方程相乘便得到

$$m_x^A m_x^B m_x^C = 1 \tag{5.15}$$

这和第 4 个方程相矛盾。　　　　　　　　　　　　　　　证毕。

定理的意义：定理及其证明过程说明，*QM* 方程组（5.13）是无法用经典的定域实在论观点来理解的！*GHZ* 定理是第一个无不等式的 *Bell* 定理，通过对三个粒子自旋本征值在类空间隔下的关联测量，定理以等式的形式，以一种确定的非统计性的方式暴露出 *QM* 与定域实在论之间的不相容性。它揭示了三个 $\frac{1}{2}$ 自旋粒子组成的 *GHZ* 态的一种量子纠缠性质——涉及三个观察者、含有两个独立时空间隔的一类空间非定域性。

ii, *GHZ* 定理的实验检验

GHZ 定理的首次实验检验已经由潘建伟等人用三光子极化纠缠 *GHZ* 态予以实现【7】。

4, *Hardy* 不等式

由于 *Bell* 定理属于两个观察者、一个独立时空间隔的情况，而上面 *GHZ* 定理并不是这种情况。1993 年 *Hardy* 针对两粒子纠缠态提出了另一种无不等式但却是概率的 *Bell* 型定理。他的工作之后，各种版本的 *Hardy* 定理陆续出现。下面介绍后来 *Goldstein* 的简洁版本【8】。

【*Hardy* 定理】：

"对两体双态系统的正交归一基 $\left(|\alpha\rangle_i,|\beta\rangle_i,{}_i\langle\alpha|\beta\rangle_i=0,\ i=A,B\right)$，有所谓 *Hardy* 态 $|\Psi\rangle_{AB}=a|\alpha\rangle_A|\alpha\rangle_B+b|\beta\rangle_A|\alpha\rangle_B+c|\alpha\rangle_A|\beta\rangle_B,\ (abc\neq0)$。对于这个态，存在一组力学量，通过对这组力学量的测量，按无不等式形式，以非零概率给出（*QM* 与经典定域实在论）互不相容的结果。"

【定理简要说明】可设计一组 4 个力学量，分别为 U_A,U_B,W_A,W_B：

$$\hat{U}_i=|\beta\rangle_{i\,i}\langle\beta|;\quad \hat{W}_i=|\omega\rangle_{i\,i}\langle\omega|;\quad |\omega\rangle_i=\frac{\left(a|\alpha\rangle_i+d_i|\beta\rangle_i\right)}{\sqrt{|a|^2+|d_i|^2}};\quad i=A,B \qquad (5.16)$$

这里 $d_A=b,d_B=c$。 对 A、B 两粒子体系的这个量子态，测量这 4 个厄密算符所代表的力学量。*QM* 给出：若 $abc\neq0$，则

$$\text{同时测量 } W_A \text{ 和 } W_B\text{，同为零的概率不为零；} \qquad (5.17a)$$

但是，按经典的定域实在论来理解，

$$\text{同时测量 } W_A \text{ 和 } W_B\text{，不能同时为零。} \qquad (5.17b)$$

于是，此定理以"无不等式但却是（非零）概率的方式"，暴露出 *QM* 与定域实在论之间的矛盾。

【证明】*QM* 直接计算即知，4 个算符对 $|\Psi\rangle_{AB}$ 态的作用分别为

$$\begin{cases} 1)\ U_A U_B = 0 \\ 2)\ U_A = 0 \to W_B = 1 \\ 3)\ U_B = 0 \to W_A = 1 \\ 4)\ P\left(W_A = W_B = 0\right) \neq 0,\ abc \neq 0 \end{cases} \tag{5.17c}$$

不论被测态$|\Psi\rangle_{AB}$中系数a,b,c如何，第 1 式恒成立；出现第 2 式$U_A|\Psi\rangle_{AB}=0$情况表明态中系数$b=0$。这时W_B作用使态$|\Psi\rangle_{AB}$不变；出现第 3 式$U_B|\Psi\rangle_{AB}=0$时态中系数$c=0$。这时W_A使态$|\Psi\rangle_{AB}$不变；特别是，最后第 4 式中算符W_AW_B对态作用结果为

$$W_A W_B|\Psi\rangle_{AB} \propto a^*\left(|a|^2+|b|^2+|c|^2\right)\left(a|\alpha\rangle_A+b|\beta\rangle_A\right)\left(a|\alpha\rangle_B+c|\beta\rangle_B\right)$$

于是，若$abc\neq 0$，对$|\Psi\rangle_{AB}$态同时测量W_A和W_B数值（它俩彼此对易，可同时测量），出现两者结果均为零的概率将不为零。

再说仔细些。因为W_A和W_B均是投影算符，各有两个本征值 1 和 0。它们相应于下面两个态：

$$\begin{aligned} |\omega\rangle_A &= \left(a|\alpha\rangle_A+b|\beta\rangle_A\right)\Big/\sqrt{|a|^2+|b|^2} \\ |\omega^\perp\rangle_A &= \left(b^*|\alpha\rangle_A-a^*|\beta\rangle_A\right)\Big/\sqrt{|a|^2+|b|^2} \\ |\omega\rangle_B &= \left(a|\alpha\rangle_B+c|\beta\rangle_B\right)\Big/\sqrt{|a|^2+|c|^2} \\ |\omega^\perp\rangle_B &= \left(c^*|\alpha\rangle_B-a^*|\beta\rangle_B\right)\Big/\sqrt{|a|^2+|c|^2} \end{aligned} \tag{5.17d}$$

其中W_A、W_B零本征值态相应于各自垂直子空间的态。当对$|\Psi\rangle_{AB}$作W_A测量时，将有非零概率得到W_A的零本征值，$|\Psi\rangle_{AB}$相应塌缩到$|\omega^\perp\rangle_A$态上。测量后B粒子将因关联塌缩而处于${}_A\langle\omega^\perp|\Psi\rangle_{AB}\equiv|\varphi\rangle_B\propto bc|\beta\rangle_B$上。这时再对这个$|\varphi\rangle_B$态作$W_B$测量，并将其投影到$|\omega^\perp\rangle_B$态上（即测得$W_B$值也为零）的概率显然正比于$\left|{}_B\langle\omega^\perp|\varphi\rangle_B\right|^2\propto|abc|^2\neq 0$。

但另一方面，按定域实在论，根据（5.17c）的前三个方程，第 4 式结果不可能出现。因为，无论$U_A=0$，或$U_B=0$，或同时为零，W_A

和 W_B 总有一个为 1。就是说，对态 $|\Psi\rangle_{AB}$ 测量 W_A 和 W_B，定域实在论认为不可能同时为零。

值得指出，注意 $|\Psi\rangle_{AB}$ 表达式中只缺少 $|\beta\rangle_A|\beta\rangle_B$ 项，可以说如此形式的 $|\Psi\rangle_{AB}$ 涵盖了两体双态系统的大部分状态，有较好的普遍性。

5, *Cabello* 不等式

i, *Cabello* 定理

在 ***GHZ*** 定理和 ***Hardy*** 定理两者基础上，***Cabello*** 提出一个更为理想的无不等式的 ***Bell*** 定理——***Cabello*** 定理。***Cabello*** 方案兼有两者的优点：方案中使用两个 ***Bell*** 基，观测者只有两个——这与 ***Hardy*** 定理相同，但独立的间隔应当是两个而不是一个；实验中以确定的方式暴露出 ***QT*** 与定域实在论之间的矛盾——这又继承了 ***GHZ*** 定理的优点。

【*Cabello* 定理】【9】

“对于由两个 ***Bell*** 基构成的最大纠缠态，存在一组力学量，对这组力学量的测量，***QM*** 将以确定的方式给出与经典定域实在论不相容的结果。”

【定理论证】设 ***Alice*** 有粒子 1 和 3，***Bob*** 有粒子 2 和 4，在他们操作之间构成类空间隔。整个 4 粒子系统处于直积态：

$$|\Psi\rangle_{1234} = |\Psi^-\rangle_{12} \otimes |\Psi^-\rangle_{34} \tag{5.18}$$

$|\Psi^-\rangle_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1,-1\rangle_{ij} - |-1,1\rangle_{ij}\right)$。为方便记 ***Alice*** 粒子 $A_i = \sigma_z^i, a_i = \sigma_x^i, i = 1,3$；***Bob*** 粒子 $B_j = \sigma_z^j, b_j = \sigma_x^j, j = 2,4$。这些算符的取值为 ± 1。

QT 表明，$|\Psi\rangle_{1234}$ 满足如下性质：

$$\begin{cases} P_\Psi(A_1 = B_2) = 0 \quad ; \qquad P_\Psi(a_1 = b_2) = 0 \\ P_\Psi(A_3 = B_4) = 0 \quad ; \qquad P_\Psi(a_3 = b_4) = 0 \end{cases} \tag{5.19a}$$

$$\begin{cases} P_\Psi\left(B_2=B_4\middle|A_1A_3=1\right)=1 \quad ; \qquad P_\Psi\left(b_2=b_4\middle|a_1a_3=1\right)=1 \\ P_\Psi\left(A_1=a_3\middle|B_2b_4=1\right)=1 \quad ; \qquad P_\Psi\left(a_1=-A_3\middle|b_2B_4=-1\right)=1 \end{cases} \tag{5.19b}$$

$$P_\Psi\left(A_1A_3=1, a_1a_3=1, B_2b_4=1, b_2B_4=-1\right)=1/8 \tag{5.19c}$$

这里 $P_\Psi\left(A_1=B_2\right)$表示对态$|\Psi\rangle$测量算符 A_1和 B_2得到相同结果的概率，而 $P_\Psi\left(B_2=B_4\middle|A_1A_3=1\right)$表示在 $A_1A_3=1$的条件下对 B_2和 B_4测量得到相同结果的概率。**(5.19c)**概率可用投影算符乘积在态中平均值来计算：

$$\begin{cases} P_\Psi\left(A_1A_3=1, a_1a_3=1, B_2b_4=1, b_2B_4=-1\right)= {}_{AB}\left\langle\psi^-\middle|\Pi_{b_2B_4=-1}\Pi_{B_2b_4=1}\Pi_{a_1a_3=1}\Pi_{A_1A_3=1}\middle|\psi^-\right\rangle_{AB} \\ A_1A_3=1:\ \Pi_{A_1A_3}=\pi_{+z}^{(1)}\pi_{+z}^{(3)}+\pi_{-z}^{(1)}\pi_{-z}^{(3)} \quad ; \qquad a_1a_3=1:\ \Pi_{a_1a_3}=\pi_{+x}^{(1)}\pi_{+x}^{(3)}+\pi_{-x}^{(1)}\pi_{-x}^{(3)} \\ B_2b_4=1:\ \Pi_{B_2b_4}=\pi_{+z}^{(2)}\pi_{+x}^{(4)}+\pi_{-z}^{(2)}\pi_{-x}^{(4)} \quad ; \qquad b_2B_4=-1:\ \Pi_{b_2B_4}=\pi_{+x}^{(2)}\pi_{-z}^{(4)}+\pi_{-x}^{(2)}\pi_{+z}^{(4)} \end{cases}$$

这里各种投影算符为 $\pi_{-z}^{(2)}=|-z\rangle_{2^\#}\,{}_{2^\#}\langle -z|$， $\pi_{-x}^{(4)}=|-x\rangle_{4^\#}\,{}_{4^\#}\langle -x|$， 等等。

下面用定域实在论观点来看待上面这几个方程。由（**5.19a**）的第一式，当 ***Alice*** 对粒子 **1** 测量 A_1时，可以肯定地推断出 ***Bob*** 手中粒子 **2** 的 B_2值（例如，若 $A_1=1$可推断 $B_2=-1$）。由于粒子 **1** 和 **2** 的测量是类空间隔分开的，因此按定域实在论观点，对 A_1的测量不但不会影响对 B_2的测量结果；而且不论是否对 B_2作测量， B_2的取值是客观确定的。即有相应于 B_2的实在元素 $U\left(B_2\right)$，它应当是客观确定的某个数（**+1** 或 **–1**）。对于 A_3，同样有相应的实在元素 $U\left(A_3\right)$，等等。这样，按定域实在论观点，应当存在一组数使 ***QM*** 方程（**5.19a**）变成为

$$\boxed{\begin{cases} U\left(A_1\right)=-U\left(B_2\right) \\ U\left(a_1\right)=-U\left(b_2\right) \\ U\left(A_3\right)=-U\left(B_4\right) \\ U\left(a_3\right)=-U\left(b_4\right) \end{cases}} \tag{5.20}$$

接着，再按定域实在论的观点去理解**(5.19b)**的第一式，若 ***Alice*** 测得 $A_1A_3=1$，她就能推断出：如 ***Bob*** 测量 B_2和 B_4，他将肯定得到 $B_2=B_4$。按定域实在论，***Alice*** 对粒子 **1** 和 **3** 的测量不会影响 B_2和 B_4，它们的

数值是客观确定的。对(5.19b)其余三个等式的理解类似。再三，由于$\sigma_z^1\sigma_z^3,\sigma_x^1\sigma_x^3,\sigma_z^2\sigma_x^4,\sigma_x^2\sigma_z^4$相互对易，所以按$QM$的 (5.19c)式可知，(5.19b)式所含 4 个条件（$A_1A_3=1, a_1a_3=1, B_2b_4=1, b_2B_4=-1$）可以同时发生。因此，当 *Alice* 测得$A_1A_3=1$，$a_1a_3=1$，*Bob* 测得$B_2b_4=1$，$b_2B_4=-1$的条件下，按定域实在论理解，(5.19b)式应当为以下结果：

$$\begin{aligned} U(B_2)&=U(B_4)\\ U(b_2)&=U(b_4)\\ U(A_1)&=U(a_3)\\ U(a_1)&=-U(A_3) \end{aligned} \tag{5.21}$$

然而，立刻可以发现，无法找到一组数能使方程组（5.20）和（5.21）都成立。因为将它们相结合后，直接导致如下矛盾方程：

$$\boxed{U(B_2)U(b_2)U(A_3)U(a_3)=-U(B_2)U(b_2)U(A_3)U(a_3)} \tag{5.22}$$

所以“（5.19a）+(5.19b) + (5.19c)联立方程”的 QM 结果是不可能用定域实在论的“（5.20）+（5.21）联立方程”来解释的。　　　证毕。

ii, 定理的实验验证【20】

采用两个光子，通过 *PBS* 之后，这两个光子的极化模以及空间模（从两个出口中哪个口出去的“路径模”，注意两个路径模在空间上不交叠，也就相互正交，实际可看作光子的另一个 2 维自由度）。于是，虽然是两个光子，却总共能有 4 个独立的自由度！可以代表 4 个独立光子，组成两个 *Bell* 基，进行 *Cabello* 方案的验证。由于实际参与的光子数目较少（是 2 个，而不是 4 个）实验实现的难度降低，精度很高。理论工作已发表【11】，

$$|\Psi\rangle_{12}=\frac{1}{2}\left(|H\rangle_1|V\rangle_2-|V\rangle_1|H\rangle_2\right)\cdot\left(|u\rangle_1|d\rangle_2-|d\rangle_1|u\rangle_2\right) \tag{5.23}$$

这里，脚标表示两个光子的人为编号。d 和 u 是光子入射到半透片上发生透射或反射的两个出口，对同一光子，相应的这两个态是正交的。H 和 V 表示光子的极化沿水平和垂直方向。由此出发，按 *Cabello* 的

类似办法推导，容易得到对定域实在论的决定论式的肯定或否定。相应的实验验证也已完成，实验结论是支持 *QM* 的。

6, 连续变量系统的 *Bell* 不等式

i, 光场 $|NOPA\rangle$ 态和宇旋算符【11】

众所周知，双模压缩真空态为

$$|NOPA\rangle = \exp\left\{\gamma\left(a_1^+a_2^+ - a_1a_2\right)\right\}|00\rangle = \frac{1}{\cosh\gamma}\sum_{n=0}^{\infty}(\tanh\gamma)^n|nn\rangle \qquad (5.24)$$

其中 $\gamma>0$ 是压缩参量。引入单模光场光子的“准自旋”算符【12】：

$$\begin{cases} \vec{s} = \left(s_x, s_y, s_z\right); \quad s_\pm = \frac{1}{2}\left(s_x \pm is_y\right) \\ \left[s_z, s_\pm\right] = \pm 2s_\pm; \quad \left[s_+, s_-\right] = s_z \\ s_z = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{|2n\rangle\langle 2n| - |2n+1\rangle\langle 2n+1|\right\} = (-1)^N \\ s_+ = \sum_{n=0}^{\infty}|2n\rangle\langle 2n+1| = \left(s_-\right)^+ \end{cases} \qquad (5.25)$$

ii, 连续变量光场 *Bell* 不等式及其最大破坏【11、12】

现在对此两模光场定义如下 *Bell* 算符：

$$B_{CHSH} = \left(\vec{a}\cdot\vec{s}_1\right)\left(\vec{b}\cdot\vec{s}_2\right) + \left(\vec{a}'\cdot\vec{s}_1\right)\left(\vec{b}\cdot\vec{s}_2\right) + \left(\vec{a}\cdot\vec{s}_1\right)\left(\vec{b}'\cdot\vec{s}_2\right) - \left(\vec{a}'\cdot\vec{s}_1\right)\left(\vec{b}'\cdot\vec{s}_2\right) \qquad (5.26)$$

其中 $\vec{a},\vec{b},\vec{a}',\vec{b}'$ 是四个模长为 1 的矢量，可分别用它们在球坐标中各自一对幅角来表示。比如，有

$$\begin{gathered} \vec{a}\cdot\vec{s} = s_z\cos\theta_a + \sin\theta_a\left(e^{i\phi_a}s_- + e^{-i\phi_a}s_+\right) \\ \left(\vec{a}\cdot\vec{s}\right)^2 = I \end{gathered} \qquad (5.27)$$

在定域实在论假设下，按 *CHSH* 不等式（5.10）式的类似论证，可得

$$\left|\langle NOPA|B_{CHSH}|NOPA\rangle\right| \le 2 \qquad (5.28)$$

但由于

$$B_{CHSH}^2 = 4I + 4\left\{\left(\vec{a}\times\vec{a}'\right)\cdot\vec{s}_1\right\}\otimes\left\{\left(\vec{b}\times\vec{b}'\right)\cdot\vec{s}_2\right\}$$

于是有$\langle B_{CHSH}^2\rangle \le 4+4=8$，所以量子力学予言不等式破坏的上限为

$$\left|\langle NOPA|B_{CHSH}|NOPA\rangle\right| \le 2\sqrt{2} \qquad (5.29)$$

因此可以选择 4 个矢量来证实违反（5.28）式但却遵守（5.29）式。

iii, $|NOPA\rangle$态的空间非定域度【11、12】

容易计算$|NOPA\rangle$态的如下关联函数：

$$\begin{aligned} E(\theta_a,\theta_b) &= \langle NOPA|S_{\theta_a}^{(1)}\otimes S_{\theta_b}^{(2)}|NOPA\rangle \\ &= \cos\theta_a\cos\theta_b + K\sin\theta_a\sin\theta_b \end{aligned} \qquad (5.30)$$

其中$S_{\theta_a}^{(j)} = s_{jz}\cos\theta_a + s_{jx}\sin\theta_a, (j=1,2)$。而只依赖于压缩参数$\gamma$的常数 K 可称为非定域度：

$$K = \tanh(2\gamma) \le 1 \qquad (5.31)$$

如果选取$\theta_a = 0,\ \theta_{a'} = \pi/2,\ \theta_b = -\theta_{b'}$，就得到

$$\langle B_{CHSH}\rangle = \langle NOPA|B_{CHSH}|NOPA\rangle = 2(\cos\theta_b + K\sin\theta_b)$$

进一步，当取$\theta_b = \tan^{-1}K$时，此平均值达最大值

$$\langle B_{CHSH}\rangle_{Max} = 2\sqrt{1+K^2} \qquad (5.32)$$

可知只要$K\neq 0$，就显示了$|NOPA\rangle$态的空间非定域性。在无限压缩下，这里的结果将还原为原先 *EPR* 态的最大破坏。因为当$\gamma\to\infty$时，$K\to 1$，$|NOPA\rangle \to |EPR\rangle$，所以有

$$\langle NOPA|B_{CHSH}|NOPA\rangle_{Max} \xrightarrow{\gamma\to\infty} \langle EPR|B_{CHSH}|EPR\rangle_{Max} = 2\sqrt{2} \qquad (5.33)$$

最后，也许值得强调指出：目前人们总是企图简单地用一个标量——“空间非定域性指数”来准确而全面地描述一个量子态的空间非定域性质。我觉得这种思路可能只是一个简单化的奢望。

§5.2, 量子纠缠与 *Bell* 型空间非定域性关联分析

1，“定域实在论”与量子纠缠

i, 量子纠缠的本质和精髓【21】

a）客观实在性并不等价于客观单值确定性

由于整个量子理论都遵守量子态叠加原理，而这个原理明确主张：量子系统可以处在各种叠加态上。这时量子系统相应的力学量将不可能具有单一值。由此可知，量子理论主张：可观测力学量的客观实在性并不等价于它们的客观单值确定性。

b) 量子纠缠的本质和精髓

量子纠缠的本质，从不同角度来看有不同的提法：**i)** 按量子信息论角度，其本质是关联中的量子信息； **ii)** 按实验观测角度，纠缠的本质是关联塌缩；**iii)** 从理论分析角度，纠缠的精髓是和关联空间非定域性(见下)的等价性；**iv)**从隐变数角度，两体系统存在纠缠的充要条件是：两粒子间不容许存在任意相对位相差而不改变系统的状态。换一种等价提法，对两体系统的某个状态，如能存在一种表示，在这种表示下，在两粒子间引入任意相对位相差而不会改变这个状态，此状态必定是可分离的。此时显然能够容忍定域性隐变数存在。

ii, 态叠加原理及纠缠与“定域实在论”相矛盾

*QT*中所包含的两点：其一，对单粒子或多粒子体系都适用的态叠加原理，其二，只针对多粒子体系的量子纠缠，这两者都明显和“物理实在论”相矛盾。其实，即便在经典领域，也有因为相互依赖而违背“物理实在论”观点的情况。这是因为，“物理实在论”过于肯定客观的单值确定性。就是说，将客观实在性简单化地误解成了客观单值确定性。

比如，在开目标 ***Teleportation*** 实验中，通过操作最后将信息系数 α,β 转化到分别处于三个地方的三个光子纠缠态上

$$\alpha|000\rangle_{123}+\beta|111\rangle_{123}$$

这就是说，信息 α,β 已经按照空间非定域的方式被联合存储于三个地方，共同掌管。这就具体地表明了量子纠缠和空间非定域性的关联。

iii，*QT*为非定域隐变量理论所包容

最近我们发现：整个*QT*能为含有“非定域”“隐变量”的经典理论所包容。换句话说，假如存在某种尚未知道的非定域性的“隐变量”，原则上可以构造这样的经典理论，使它含有这种“非定域性”的“隐变量”，从而不但能以客观确定论的经典方式解释叠加态在测量塌缩中的随机性，而且能以客观确定论的、符合定域因果律的经典方式解释量子纠缠中关联塌缩的非定域性和随机性。考虑及此，就不能说迄今所有实验也已否定了非定域类型的隐变量。就是说，至今仍然难以确定上帝玩不玩掷骰子！假定在非定域隐变量的理论框架中看问题的话，不仅关联塌缩是遵守定域因果律的，而且所有塌缩中的随机现象，其性质将是经典的：上帝是不玩掷骰子的！

量子纠缠及空间关联实验所表现出的与定域实在论的矛盾只说明*QT*是非定域的，不能用任何定域理论（即便含隐变量的定域理论）所包容。然而，只当主张非定域隐变量理论的人能够说出非定域隐变量的物理根源，以及指出它们的任何可观测效应，否则即便是非定域的隐变量理论也是不值得认真对待的。

2，*QT* 的空间非定域性

i, *QT* 的空间非定域性概述

一个物理量，或是一种相互作用，如果它的数值或进行过程不仅依赖于时空变数，并且只和当时当地的时空变数（至多包含该点的无限小邻域）有关，就称它为定域的量，或是定域的相互作用。这表明它不但是一个在时空中进行的过程，而且是一个体现着局域作用的定域过程。

与此相对照，一个物理量，或是一种相互作用，如果它的数值或进行过程不仅依赖于当时当地的时空变数，而且还以一定方式依赖于别时别地的时空变数，就称它为（就时间而言是非***Markovian***）非定域的量，或是非定域作用过程。这表明，它不但是个在时空中进行的过程，而且是体现着（在时空域中的）非局域作用的非定域过程。

例如，电磁场推迟势、***EPR***态关联、纠缠测量的塌缩与关联塌缩；不同商品的价格（局部或非局部地方）；混态演化与主方程推导（延时反馈，这是时域中的“非定域过程”，非***Markovian***）；等等。

尽管和经典理论一样，***QT***（从非相对论量子力学到相对论量子场论）仍然采用了定域描述方法，但 ***QT*** 最重要特征之一是：全面地表现出了各种奇妙的空间非定域性质，而且这些非定域性质已经并继续经受住了越来越多的实验检验。

不可否认，这些空间非定域性质有着不同的根源。有的来自基本相互作用的内在性质（即非定域型相互作用，比如，某时空点的相互作用并不只和该点上各场量或它们导数有关）；有的来自微观粒子的内禀性质——波粒二象性；有的又来自具体拉氏量中参数空间的拓扑性质；有的则来自我们所处空间可能具有的整体拓扑性质（宇宙有限

无界、无限无界等）。由于根源不相同，它们所显示的现象以及出现的范畴也不尽相同。有些非定域性质体现在局部空间无法察觉的、只依赖于空间整体拓扑性质的现象上（比如各种拓扑相因子）；有的则在塌缩——关联塌缩之间显示出一种超空间的关联现象(参见 ***Teleportation*** 和 ***Swapping*** 实验)；有的仍然遵守相对论性定域因果律，有的则表现出令人困惑的似乎与这个基本规律的不相容性 （也参见【**13**】）；等等。正是由于空间非定域性有不同来源，因而就有不同种类，并有着不同的物理表现。

就本质而言，无论非相对论量子力学或相对论量子场论，都是在定域描述外衣下的空间非定域理论【**10**、**11**、**14**、**15**、**16**】 。可以发现这主要体现在以下方面：

a) ***Feynman***公设。此公设对整个***QT***普遍适用，已广泛用于近代量子场论。对非相对论量子力学来说，所有路径可区分为两类：遵守相对论性定域因果律的；不遵守相对论性定域因果律的。注意，后者是稠密的，而前者（遵守经典力学或经典场方程的经典路径及其附近）测度几乎为零。就是说，***Feynman***公设中包含着大量不遵守定域因果律的显示量子涨落的路径。正是这些量子涨落成份导致了***QT***的空间非定域性。进一步，就相对论量子场的情况来说，这时生成泛函虽然是对场量的积分，但被积函数指数***Lagrangian***密度对时空变数积分是**4**重彼此独立的壳外积分。以最简单旋量***QED***为例，此耦合体系的***Green***函数生成泛函为

$$\begin{cases} Z[\bar{\eta},\eta,J]=\dfrac{1}{N}\int D\bar{\psi}D\psi\prod_{\mu}DA_{\mu}\exp\left\{i\int d^4x\left(l_{eff}+\bar{\eta}\psi+\bar{\psi}\eta+J_{\mu}A_{\mu}\right)\right\} \\ l_{ef}=-\bar{\psi}\left(\gamma_{\mu}\partial_{\mu}+m\right)\psi-\dfrac{1}{4}\left(F_{\mu\nu}\right)^2-\dfrac{1}{2\xi}\left(\partial_{\mu}A_{\mu}\right)^2+ie\bar{\psi}\gamma_{\mu}\psi A_{\mu} \end{cases} \quad (5.34)$$

这里l_{eff}为体系有效*Lagrangian*密度，其中修正项由规范约束泛函δ-函数转来，任意可微函数$\eta,\bar{\eta},J_{\mu}$分别为*Fermi*性外源和*Boson*性矢量外源。此时泛函积分变数虽然不是时空变量，而是场量，但其中提供生成泛函量子涨落的指数积分相因子却是4重壳外积分，如果用路径积分观点看待这个4重壳外积分，将积分求和各项分解并连接成一条条随时间前进的折线路径，就可以再次证实上面的分析。何况，无论对$m\neq 0$的粒子或光子，泛函被积函数中通常引入的是各类规范约束条件，从未直接引入过以光锥为界面的单侧定域因果性的约束。

b) 量子测量导致的状态塌缩都是非定域的，无论是空间波函数塌缩或是自旋波函数塌缩。例如，“广义杨氏双缝”中向相干叠加的两个不同态（两条缝、两种态、两条路径、两种极化、透射反射、死与活——有些已涉及广义的空间非定域性）之一的塌缩。

c) 多粒子体系空间波函数或自旋波函数的“塌缩——关联塌缩”。这时量子纠缠与测量所导致的各类*Bell*型空间非定域性。

d) 自旋态的内禀性质是空间非定域的。

f) 所有本征值、平均值的决定方式都是非定域的。

g) 波粒二象性在内禀性质上和空间定域描述方式就不兼容。这表现在：不确定性关系、全同性原理——全对称或全反对称的量子纠缠、不可能精确定位（$\Delta x\geq\lambda_{compton}$）等等。

h) 相对论量子场论的众多发散凸显出*QT*空间非定域性质

与所用定域描述方法之间的矛盾。

ii, 空间定域描述方法

采用时空变数 $x=(\vec{x},t)$ 所作的描述，称为定域描述。比如，电磁波波包在时空中的传播就是一个定域的物理过程，对它的时空传播过程的描述就是定域描述。

再比如，按场论观点，两个粒子a与b的相互作用，可以是正比于和粒子相联系的场 $A(x)$和 $B(x)$（或其导数）的乘积。这样一来，在时空点 x 的相互作用就只依赖于该点处的场量 $A(x)$与 $B(x)$及其导数(涉及点 x 的无限小邻域)，而与其它时空点 x' 的场量 $A(x')$与 $B(x')$无关。这就是一个定域的相互作用过程。相应的描述也是一种定域的描述。这也包括，将粒子a的量子场写为 $A(x)$，使得有资格说“粒子a在 x 点处的场量 $A(x)$”等等，这本身也是定域的描述方法。

在物理学中，包括在QT中，几乎都是定域的描述。那么，有没有非定域的描述呢？有。

通常对某种性质的非定域描述，区分为三层不同的含义：

其一，不违背定域因果律的定域弥散性描述。对过程的描述还是借助时空变数进行，只是此时的描述具有时空变数描述下的某种弥散（比如，有某种积分核的时空积分，如推迟的$Green$函数等），使得任一点处的相互作用也以一定方式依赖于别点处的场量；特别是，这种弥散积分只局限于满足相对论性定域因果律的光锥内部或锥面。这是一类披着定域描述外衣、并遵守相对论性定域因果律的非定域理论（甚至仍是定域理论）。

其二，违背定域因果律的定域弥散性描述。过程描述还是借助某种弥散的时空变数进行，只是实施这种弥散的积分不局限于光锥内和锥体上，还扩及到不满足定域因果律的锥外部分。这是一类披着定域描述外衣的违反相对论性定域因果律的非定域理论。应当说这是真正的非定域理论。

其三，拓扑性描述。在势场中，粒子所受的力常常以势场的各类微分量来表示，微分量的计算总是在局域范围内进行的，只会涉及场的局域性质；但这个势场也许还有非平庸的整体性质，一类难以用定域描述方式表达的整体拓扑性质。

例如双缝干涉实验中，若缝屏后面放置一根细磁弦，其作用是改变屏后空间矢势场的整体拓扑性质：矢势场从曲面单连通区域变成曲面多连通区域（见*Young*双缝的*AB*效应）。使得相位因子只依赖于从磁弦的上方还是下方绕过，而不依赖于上方或下方路径的各种具体变形。因为在磁场强度为零的区域，路径可以连续变形而不影响相位。这将出现不可积的相因子。

还比如，粒子自旋态。它只依赖于旋量方程组的旋量结构，并不直接依赖于时空变数，是一种非定域的性质，某种未知的拓扑性质，可以简单直接地说是某种超空间的性质。再比如，磁单极子奇异弦的起因和球面复盖问题，我们所处空间的整体性质，等等。

iii, 自旋态及其塌缩的非定域性质

构成自旋*EPR*对的两个反方向飞行的粒子，经过足够长时间之后，它们空间波包肯定已不再交叠，但它们的自旋态依然彼此关联：

各自的自旋取向均依赖于对方而处于一种不确定状态。这种关联是一种不依赖于空间变数的关联，一种非定域的关联，一种超空间的关联。一旦对其中一个粒子作自旋取向测量，使其产生塌缩，比如向上，则另一粒子虽然处于遥远而未知的地方，也将瞬间同时发生自旋态朝下的塌缩。注意，这里不存在什么“自旋态塌缩波”的“空间传播”，而是发生一种瞬时的、不受相对论性定域因果律约束的、不可从中阻断的关联塌缩。简单明了地说就是，这里发生着一种：

超空间性质的关联塌缩.

最近的实验结果应当解释作为：塌缩与关联塌缩之间，性质上不是因果的关系。而只是同一系统（纠缠态）塌缩这件事的两个相互依存的内容。这种自旋***EPR***对的非定域的关联塌缩揭示出：自旋态的拓扑性质。指明自旋态是该粒子量子场的一种整体拓扑性质，是不能以定域方式加以描写和理解的。从空间定域描述的观点来看，塌缩时就好像空间的广延性不存在了。量子***Teleportation & Swapping*** 的出色实验就很清楚地显示了这种神奇现象。

iv, 空间波函数塌缩的非定域性质

如果说自旋态及其塌缩的空间非定域性质早已为人们所注意的话，那么，空间波函数塌缩的非定域性质还远未引起人们的重视。

事实是，当人们对一个粒子的空间波函数进行某种测量时，测量塌缩将导致其空间波函数的改变。比如，

$$\varphi(x) \to \psi(x)$$

显然，这是涉及整个空间分布的改变，而不是局域的变化和局域变化

在空间中的传播。就是说，这里同样也不存在局域发生的空间波函数的塌缩波的空间传播，而是一种全空间的、瞬时的、不可阻断的的突变。这也是一种不受相对论性定域因果律支配的、超空间的突变。总之可以说：

空间波函数的塌缩同样具有非定域的性质。

v，各类*which way*实验的广义空间非定域性

所有单粒子或复合粒子的杨氏双缝、中子干涉量度学、光学半波片、各种*which way*、各类*Schrodinger cat*，它们本质是类似的，都是各种类型的（*Yes—No*）双态系统的相干叠加、测量中的随机塌缩、不同测量导致不同塌缩。可统称之为“广义杨氏双缝实验”。当两个广义双态涉及的自由度多了、退相干快了就成了猫态的情况。

对于一类彼此空间相距为宏观距离的“*Yes—No*”双态 ，这种相干叠加以及随后测量中的随机塌缩就更加明显地表现出空间非定域性：在瞬间就实现了全空间状态分布的更迭。这时并没有塌缩波以及塌缩波在空间中的传播。所以说这种更迭是一种非定域的、超空间的过程——如果它可以理解为物理过程的话。

至于其它类型“距离”的“*Yes—No*”双态的更迭将是一些别种类型的非局域过程，比如时间演化中的“非定域”——有记忆效应而非瞬时反馈的过程，这是一些非*Markovian*过程。

这里指出，除自旋本性尚未清楚之外，量子理论空间非定域性质的物理根源应当归结为微观粒子的内禀性质——波粒二象性。

vi，讨论。量子理论空间非定域性的可能来源与类型 ：

a) 测量塌缩中的非定域性（注意，即便是单个粒子的测量塌缩也有此空间非定域性）；

b) 关联型空间非定域性（多粒子体系中，与关联测量相关的空间非定域性，等价于量子纠缠）；

c) 与自旋本质相联系的空间非定域性；

d) 与基本相互作用性质有关的空间非定域性；

e) 与空间拓扑性质有关的非定域性——来自我们所处三维空间（也许具有的）非平庸的拓扑性质。

§5.3, 对 *Bell-CHSH-GHZ-Hardy-Cabello* 路线评论

1, *Bell*-空间非定域性本质——评论之一

i, ***Bell*** 非定域性——关联非定域性及其局限性

在 ***QT*** 的諸多奇妙的空间非定域性质中，有一种与多粒子量子纠缠现象密切相关的空间非定域性——“***Bell*** 非定域性”。

沿着上述***Bell-CHSH-Hardy-GHZ-Cabello***一系列不等式和等式形式的空间非定域性研究路线，提出了大量具体的***Bell***算符，以及与之配套的量子态和关联测量方案，由此暴露出各种纠缠态下各种空间非定域性质。总起来说，这条研究路线主要通过对处于空间不同点的纠缠态的多粒子体系作类空间隔关联测量，暴露（与经典力学所理解的定域实在论不同的）***QT***的一类空间非定域性质。***QT***的这一类各色形式的空间非定域性质可统称为“***Bell***非定域性”，或“关联非定域性”。

然而，正因为每一种***Bell***型算符、相关配套的态以及关联测量方案都是具体的算符、具体的态和具体的方案，因此它们各自在彰显量子态这种空间非定域性质的同时，总难免带有各自的特殊性，都不可

避免地存在着各自的局限性和片面性。于是，每一种具体的*Bell*算符和配套态及关联测量方案都只能显示“*Bell*非定域性”在各种具体情况下的各个侧面，难以完整体现*QT*的这种非定域性，也未必能显示出所用量子态的全部纠缠性质。

于是就不难理解，在具体情况下某个*Bell*非定域性和量子纠缠这两种度量之间出现不一致性，或不等价性现象：量子态的下限情况都相同——非定域度为零对应于态可分离，即，没有纠缠就不会出现关联测量中的相关性；但有这样一些态，它们的上限常有不同——使*Bell*型不等式达到最大破坏的态，即，该态的*Bell*非定域度最大时，它的量子纠缠度却不是最大。比如，对两体四能级系统，

$$|\psi\rangle=\frac{1}{2}\{|00\rangle+|11\rangle+|22\rangle+|33\rangle\},\quad |\varphi\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\{|00\rangle+|11\rangle\}$$

可以验证，它们对*Bell*不等式都构成最大破坏，但其中，$|\varphi\rangle$态可使*Gisin-Peres*方案中*Bell*空间非定域度*K=1*达最大值，但却不使两体纠缠度达最大值。这方面的详细叙述可见【12】§5.4。

为了能完备地表达出一个给定态在关联测量意义下的空间非定域性质，引入如下定义 ：

某个多体量子态对“所有可能*Bell*型算符 ＋ 所有可行的关联测量”的全体集合下所体现出的空间非定域性称为一般关联测量意义下的“关联型非定域性”或 “*Bell*型非定域性”。

所以，全体可能的 *Bell* 型不等式和等式的 *Bell* 方案的集合才能完整体现这种因纠缠而产生的空间非定域性——在类空间隔下多粒子关联测量中所表现的量子态的超空间关联性。它简称做“关联非定域

性”、“*Bell*非定域性”或“纠缠非定域性”。追究这类非定域性的本质，它们来自微观粒子的内禀性质——波粒二象性；而在实验测量中，则表现为塌缩与关联塌缩之间一种奇妙的超空间的关联。尽管这个非定域性让人迷惑不解，但正在广泛用于量子信息论领域。

ii, 关联型空间非定域性与量子纠缠的等价性

以前已经指出并论证过下述定理：

【定理】 “对于多体量子系统，基于类空间隔下关联测量的空间定域性等价于量子态的可分离性。换句话说，关联型空间非定域性与量子纠缠本质上等价【**18**、**11**】。”

由于这里讨论的关联测量是针对类空间隔下的关联测量，这时空间定域性的含意是相对论性定域因果律，体现为：处于类空间隔下的两个子系统A和B中各自发生的事件相互独立，思想可以表示为“类空间隔下不存在非定域的相关性”，或者说“类空间隔下的定域独立性”。其实这些都是已有的“相对论性定域因果律”的等价表述。

从定理可知，两体系统类空间隔下关联测量的空间定域性本身就蕴含了该量子态的可分离性。逆否过来也对。所以，量子纠缠和上述意义下的空间非定域性——关联型非定域性本质上是一回事。这也是上面称它们为纠缠非定域性的缘故。

iii, 由以上分析可知，自 ***EPR*** 开始，历经 ***Bell***，***GHZ***，***Hardy***，***Cabello*** 这条长期以来曾经大量吸纳过并正在大量吸纳着关于空间非定域性研究工作的路线，其实他们所研究的空间非定域性与多体量子态的量子纠缠性是相互等价的，并且仅只涉及了（本质是空间非定域

的）量子理论的多种类型空间非定域性质中一种特定的类型——关联型非定域性，或称为纠缠非定域性。

iv，量子纠缠与 ***Bell*** 非定域性关系分析小结

a）任一***Bell***非定域性均有局限性。这种局限性来源于具体的***Bell***算符、关联测量方案和所选的态。

b) 一般说，***Bell***非定域性和量子纠缠并不完全等价。这表现为两体可分离态没有***Bell***非定域性——两者下限相符；但***Bell***非定域性破坏最大的态有时不一定是最大纠缠态——两者上限不同；

c) 如果添加任意相对相位将肯定改变系统状态，则系统必定存在量子纠缠，不是一个可分离态；反之也可以说，两体系统只要存在一种分解，在这种分解中可以添加任意相对相位而不改变状态，则系统必定是可分离态，就是说不存在量子纠缠。

d) 两体量子纠缠等价于"关联型空间非定域性"。正如同：两体可分离态等价于"关联型空间定域性"。此处必须澄清一个如下误会：最近有文献提出"无纠缠的非局域性"，这种提法中说，可举例表明，一组乘积态不能用***LOCC***来局域区分（原先举的例子是一组**9**个态，后又举出 **4**$\otimes$**4**的一组**16**个态）。这实际只是揭示了***LOCC***操作的局限性——这对量子信息论是有意义的，但并不是这里所讨论的物理学意义上的空间非定域性。

e）单粒子态不存在纠缠，但在测量塌缩中仍然表现出了空间非定域性质。实际上，正如以前所说，整个量子理论就是披着定域描述外衣的空间非定域理论。空间非定域性问题有着更深刻、更多

样、更普遍的含意。显然，量子理论空间非定域性的一般性质已超出了“关联型空间非定域性”这一特殊类型的范围。

f) 近四十年来，***Bell*** 型理论和实验都有不小的进展。不但提出了各色各样的判别准则，用于判断量子力学描述是否完备，它们之中最主要的几个已在前面作了系统地阐述，而且实验检验工作也有了众多的成果，现在已很少人怀疑在量子理论与定域实在论之间实验支持谁的问题了。目前文献工作已更进一步，正在利用各种 ***Bell*** 型不等式作为实验检验量子纠缠存在与否的判别准则，或者说，将它作为多粒子量子态纠缠分析的物理和数学工具。

2, ***Bell*** 型理论的局限性——评论之二

尽管四十余年来，***Bell*** 型理论有了众多的发展而实验检验也开始有不小的进展，但仔细分析还是可以发现，沿这条研究路线（这类判别办法）所做的工作都存在以下共同的局限性：

其一，对于检验区分纠缠态与可分离态而言，这些不等式或等式的划分都不是充份而又必要的。就是说，区分都是不彻底、不完全的。

其二，它们都只限于研究“关联型非定域性”（即“纠缠非定域性”）这一特定类型的空间非定域性；

其三，迄今未能对这种“纠缠非定域性”的程度给出普适、定量、完善的刻画方法；

其四，迄今未能成功地给出隐变数究竟存在与否的理论性判据和明确地实验检验；

其五，所有工作都回避了量子纠缠非定域性与相对论性定域因果律之间究竟是否协调这个根本性的疑问。

3, ***Bell*** 型理论的发展——评论之三

关于纠缠分析和空间非定域性方面，最近我们提出了一些新的观点和理论。它们有些在第四章中说过了，有些则在本章前面谈过。这里简单叙述我们另一个观点：目前所有实验只是支持了 ***QT*** 的空间非定域性质，但仍然未能否定隐变数的存在。

前面说过，***QT*** 空间非定域性不仅仅表现在自旋态和 ***EPR*** 对等明显问题上，而且整个 ***QT***（从非相对论量子力学到相对论量子场论）的本质特性之一就是它的空间非定域性质。可以认为，引进否定粒子概念、表现波动性的"非对易规则"，或者也许更恰当地说，引进"概率幅的路径积分"，就意味着引入了 ***Bell*** 型的空间非定域性，以及量子涨落的不确定性。当然也应当意识到，***Bell*** 型的空间非定域性只是 ***QT*** 空间非定域性中的一种。

可以证明：含隐变数非定域经典理论（非定域的实在论 ***RT——Realistic Theories***）涵盖了量子力学的全部予言，所以目前还不能说实验已否定隐变数理论，而只能将到目前为止的实验证实限制在支持 ***QT*** 的空间非定域性质，否定定域实在论(***Local Realistic Theories***)上【**11、18**】。论证思想简述如下：

在力学量实际测量中，被测数值所表现出的或然性也可以用一组隐变量（记为λ）来确定：

$$A(\vec{a},\lambda);\quad B(\vec{b},\lambda);\quad \Gamma(\vec{a},\vec{b},\lambda)\equiv A(\vec{a},\vec{b},\lambda)B(\vec{b},\vec{a},\lambda) \tag{5.38}$$

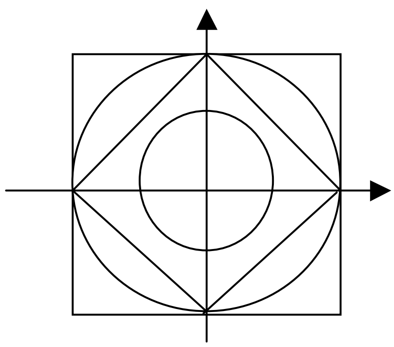
于是，按照定域的、实在论的、量子的三种不同观点，按这三种要素组合，可以构造四种可能的理论（***RT——Realistic Theories; QM——Quantum Mechanics; LRT——Local Realistic Theories; LQM—— Local Quantum Mechanics***）。按这四种理论，对 $A+B$ 两体系统的关联函数期望值的统计平均分别应表示为（$\hat{a}=\vec{a}\cdot\vec{\sigma}_A, \hat{b}=\vec{b}\cdot\vec{\sigma}_B$）：

$$\begin{cases} E_{QM}\left(\vec{a},\vec{b}\right)=Tr\left(\rho_{AB}\hat{a}\hat{b}\right) & (5.39a) \\ E_{LRT}=\int d\lambda\cdot p(\lambda)A(\vec{a},\lambda)\cdot B\left(\vec{b},\lambda\right) & (5.39b) \\ E_{RT}\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\int d\lambda\cdot\omega(\lambda)\Gamma\left(\vec{a},\vec{b};\lambda\right) & (5.39c) \\ E_{LQT}\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\sum_{\mu}\lambda_{\mu}Tr\left(\rho_{A\mu}\hat{a}\right)\cdot Tr\left(\rho_{B\mu}\hat{b}\right) & (5.39d) \end{cases}$$

这里不妨假设 $0\le\lambda\le1, 0\le p(\lambda)\le1, 0\le\omega(\lambda)\le1, \sum_{\mu}\lambda_{\mu}=1$。其中 $\rho_{A\mu},\rho_{B\mu}$ 是由同一个“μ”所导致的 A 粒子和 B 粒子的局域性的密度矩阵。

现在有必要分析比较一下这四个式子：（**5.39a**）式是量子的、非定域的，不多说了；和（**5.39a**）式相比较，（**5.39d**）式是定域观点下的量子的，是否定非定域量子关联的结果，但两个粒子各自还是量子的；（**5.39c**）式是非定域的，其中的 Γ 没有因式化为 A、B 粒子各自的测量值相乘 $A(\vec{a},\lambda)B\left(\vec{b},\lambda\right)$，这意味不施加定域性的假设，而仅仅是经典的、含隐变数的实在论的结果，其经典性质和（**5.39a**）式的量子性质成为对照；（**5.39b**）式和（**5.39c**）式的差别仅仅在于添加了定域的假设，所以是定域的、经典的、含隐变数的实在论的结果。

按 ***Bell*** 不等式理论类似的计算，可以得到这四种理论的涵盖范围有如下从属关系【**26**】：



$$\boxed{LQT \in LRT \in QM \in RT} \qquad (5.40)$$

于是，由于 ***QM*** 的予言范围整个被涵括在 ***RT*** 范围之内，从 ***QM*** 的角度已很难否定 ***RT*** 的合理性（而只有 ***RT*** 能否定 ***QM*** 合理性）。这就是为什么前面说，迄今实验无法否定含隐变数的实在论的缘故。

练习题

【**5.1**】 分析：***Mach-Zehnder*** 干涉仪中的延迟选择实验和光子在空间传播中的非定域性。

【**5.2**】分析：条件概率乘积分解的独立性和量子态的空间定域性。

【**5.3**】 解说 ***EPR*** 佯谬的物理思想。从量子力学的角度来看，为什么它与实验不符合。

【**5.4**】 证明：***EPR*** 态是对 ***Bell*** 不等式造成最大破坏的态。

【**5.5**】到目前为止，关于 ***Bell*** 不等式问题上，什么是实验支持了的？什么是还没能搞清楚的？

【**5.6**】 量子理论的空间非定域性质是一种什么性质？

【**5.7**】 详细推导 ***Hardy*** 定理的全部证明。

[【**5.8**】 写出 ***Bell*** 不等式、***CHSH*** 不等式、***GHZ*** 定理、***Hardy*** 定理、***Cabello*** 定理，说明它们各自的特点，它们之间的共同点和不同点，**[5.9]** 说明 ***Bell*** 不等式、***CHSH*** 不等式、***GHZ*** 定理、***Hardy*** 定理、 ***Cabello*** 定理所共有的局限性。

参考文献

【1】 *A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen*, "*Can Quantum Mechanics description of physical reality be considered complete?*", *Phys. Rev.* 47, 777 (1935)。

【2】 *D. Bohm*, 《量子理论》，侯德彭译，商务印书馆，1982。

【3】 *J.S. Bell, Physics,* 1, 195 (1964)。

【4】 *S.L.Braunstein, A.mann, and M. Revzen, PRL*68, 3259(1992)

【5】 *J.F. Clauser, M.A. Horne, A. Shimony, R.A. Holt, PRL*，23, 880(1969)。

【6] *Jian-wei Pan, 《Quantum Teleportation and Multi-photon Entanglement》, the dissertation for PhD. Institute for Experimental Physics, University of Vienna,* 1998.

【7】 *J. W. Pan, et.al., Nature,* 403, 515(2000)。

【8】 *L.Hardy, PRL*，71, 1665(1993); *S. Goldstein, PRL*，72, 1951 (1994)。

【9】 *A. Cabello, PRL*87, 010403(2001)。

【10】张永德,《量子力学》，北京:科学出版社，2003 年

【11】*Z. B. Chen, J.W.Pan,G.Hou,and Y.D.Zhang, PRL*88, 040406 (2002)

【12】 侯广，《量子纠缠与非定域性及二者之间的联系》，中国科学技术大学博士论文，2003 年 4 月。

【13】 *J. D.* 比约肯，*S. D.* 德雷尔，《相对论量子场》，北京：科学出版社，1984 年，第 238 页，特别是第 292 页。

【14】 *A. Stefanov, H. Zbinden, and N. Gisin, Quantum Correlations with Spacelike Separated Beam Splitters in Motion: Experimental Test of Multisimultaneity, PRL* 88, 120404 (2002)。

【15】 *J. S. Bell, Speakable and unspeakable in quantum mechanics, Cambridge University Press,* 1987, p.55，100.

【16】 潘建伟等人用 4 光子符合测量检验量子理论非定域性的实验（*PRL*86, 4435(2001)）；以及赵志、潘建伟等人 5 光子符合纠缠测量和开目标 *Teleportation* 实验（*Nature*，430, July, 2004。）

【17】 *Z.B.Chen, J.W.Pan, Y.D.Zhang, C.Brukner, A.Zeilinger, PRL*90, 160408(2003)

【18】 *Sixia Yu, Zeng-Bing Chen, Jian-wei Pan, and Yong-De Zhang, Classifying N-qubit Entanglement via Bell Inequalities, PRL*90，080401（2003）。

【19】 *Sixia Yu, Jian-wei Pan, Zeng-Bing Chen, and Yong-De Zhang, Comprehensive Test of Entanglement for Two-level Systems via Indeterminacy Relationship, PRL* 91, 217903(1-4) (2003)。

【20】 *T.yang, et.al., quant-ph*/0502085
【21】量子纠缠问题参阅[10]和下面文献：*A.Peres, Phys.Rev.Lett.* 77, 1413(1996)。 *J.Preskill,* 《*Lecture Notes for Physics* 299: *Quantum Information and Quantum Computation*》, *CIT*，*Sept.* 1998。*S.J.Wu, X.M.Chen, and Y.D.Zhang,* *Phys.Lett. A*275, 244(2000)。吴盛俊，硕士论文《量子纠缠理论若干研究》，2000 年 6 月，中国科学技术大学近代物理系。张永德，吴盛俊，侯广，黄民信，《量子信息，物理原理和某些进展》，华中师范大学出版社，2002 年 11 月。
【22】 *N.D. Mermin,* *PRL*65, 1838(1990)
【23】 *D.N.Klyshko,* *Phys. Lett. A*172,399(1993)
【24】 *J. Uffink,* *PRL*88, 230406(2002)
【25】 *N.Gisin, H.Bechmann-Pasquinucci,* *Phys. Lett. A*246, 1(1998)
【26】]*Z.B.Chen, et.al., quant-ph*/0308102,0307143