

第六章 混态演化与退相干

前言

一个孤立的微观体系 A ，其状态一定可以用纯态描写。但如果考虑它和外界 B 的相互影响，便会产生 A 和 B 状态之间的量子纠缠。这时，如果根本无法将 B 认真考虑进来，或是人们对 B 没有多大兴趣，可以简化对复合问题 $A \oplus B$ （或 $A \otimes B$ ）的研究。办法是用统计平均方式刨除 B 对 A 的影响，使问题简化成在统计平均背景下，单独对 A 的研究。显然，全局看这或许是一种不得已的，但局部看却突出了子系统 A 考量的统计性研究模式。

这种对子系统作局部性的研究，导致 QM 在以下三个方面有重大发展：其一，产生了和纯态概念完全不同的混态概念；其二，纯态遵守 *Schrodinger* 方程，演化为幺正的；与此鲜明对照的是，混态演化方程——主方程 (*Master Equation*) 表明演化一般不是幺正的和可逆的；其三，测量过程一般不是正交投影，而是非正交投影。由于在状态描述、状态演化、测量塌缩三个基本问题上的发展， QM 呈现出了崭新面貌，摆脱了局限于对孤立系的描述，进入对开放系统的研究，开始了全面、深入、主动干预的阶段。

本讲论述系统混态随时间的演化规律。如果说，决定纯态演化的映射称为算符，那么，决定混态密度算符演化的映射就称为超算符。下面讲述超算符的映射性质，以及混态密度算符随时间的演化规律——主方程及求解。

§6.1 混态演化之一——Kraus 定理

1, 密度矩阵的时间演化方程

密度矩阵时间演化的量子 *Liouville* 方程。简略回顾一下孤立系的量子理论。设孤立量子体系 *Hamiltonian* H ，将态矢依照 *Schrodinger* 方程随时间的演化转化为密度矩阵演化，即得 $\rho(t)=U(t)\rho(0)U^+(t)$ 。这时，体系密度矩阵随时间演化的量子 *Liouville* 方程，

$$\boxed{i\hbar \frac{d\rho(t)}{dt} = [H(t), \rho(t)]} \quad (6.1)$$

如果 H 不显含时间，形式上可将此方程积出，

$$\boxed{\begin{cases} \rho(t) = U(t)\rho(0)U^{-1}(t) \\ U(t) = e^{-iHt/\hbar} \end{cases}} \quad (6.2a)$$

为了专注考量相互作用的影响，从 H 中分离出感兴趣的部分 H_i ，即 $H = H_0 + H_i$ ，作么正变换 $U_0(t) = e^{iH_0 t/\hbar}$ ，转入相互作用图象。记

$$\boxed{\rho_I(t) = U_0(t)\rho(t)U_0^{-1}(t)} \quad (6.2b)$$

对此式求时间导数，即得

$$\boxed{\begin{cases} i\hbar \frac{d\rho_I(t)}{dt} = [H_i^{(I)}(t), \rho_I(t)] \\ H_i^{(I)}(t) = U_0(t)H_i U_0^{-1}(t) \end{cases}} \quad (6.2c)$$

通常便是由此出发转入积分方程形式，用逐级叠代法近似求解。

期望值演化方程。已知力学量 Ω 平均值为 $\bar{\Omega}(t) = \text{tr}\{\rho(t)\Omega\}$ ，故

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \bar{\Omega}(t) = i\hbar \text{Tr} \left\{ \rho(t) \frac{\partial \Omega(t)}{\partial t} \right\} + i\hbar \text{Tr} \left\{ \frac{\partial \rho(t)}{\partial t} \Omega(t) \right\} \quad (6.3a)$$

由于

$$\text{Tr} \left\{ \rho(t) \frac{\partial \Omega(t)}{\partial t} \right\} = \frac{\partial \overline{\Omega(t)}}{\partial t}$$

于是对孤立量子体系有

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \bar{\Omega}(t) = i\hbar \frac{\partial \overline{\Omega(t)}}{\partial t} + \text{Tr} \{ [H(t), \rho(t)] \Omega(t) \}} \quad (6.3b)$$

若已知 $H(t), \rho(t)$, 便可以按此计算 Ω 平均值随时间的变化。

2. 密度矩阵的映射——超算符映射方法

现在从信息论的角度, 将量子体系 A 与环境 E 区分开, 并且片面地(局部地)只对 A 进行观测, 这时量子体系 A 的密度矩阵 ρ_A 将如何演化?

由于 A 和 E 存在人为操控之外的各种不可控制或无法精确考虑的相互作用, 不能指望 $A \oplus E$ 这个孤立量子体系时间演化算符 $U_{AE}(t)$ 可以因子分离 $U_{AE}(t) \neq U_A(t) \otimes U_E(t)$ 。于是, 即便环境 E 初始处于基态 $|0\rangle_E$, $A \oplus E$ 初始处于可分离态 $\rho_A(0) \otimes |0\rangle_{EE} \langle 0|$, 经 t 时间演化之后, 也将出现 A 态与 E 态的量子纠缠,

$$\boxed{\rho_{AE}(t) = U_{AE}(t) \{ \rho_A(0) \otimes |0\rangle_{EE} \langle 0| \} U_{AE}^+(t)} \quad (6.4)$$

这时, 为了专注考察子体系 A 的演化, 需要执行对环境态的部分求迹, 以便统计性地排除环境 E 的影响, 得到子体系 A 的约化密度矩阵 $\rho_A(t)$,

$$\begin{aligned} \rho_A(t) &= \text{tr}_E \{ U_{AE}(t) [\rho_A(0) \otimes |0\rangle_{EE} \langle 0|] U_{AE}^+(t) \} \\ &= \sum_{\mu} \langle \mu | \{ U_{AE}(t) [\rho_A(0) \otimes |0\rangle_{EE} \langle 0|] U_{AE}^+(t) \} | \mu \rangle_E \end{aligned}$$

这里 $\{ |\mu\rangle_E \}$ 是环境 *Hamiltonian* $\mathcal{H}_E$ 的一组正交归一基。令

$$\boxed{{}_E \langle \mu | U_{AE}(t) | 0 \rangle_E \equiv M_{\mu}(t)} \quad (6.5)$$

这里， $M_\mu(t)$ 是一组作用在子体系 A 上的算符。它们表示系统 A 与环境 E 相互作用演化中，环境 E 由 $|0\rangle_E$ 向 $|\mu\rangle_E$ 跳变过程对系统 A 状态的影响。它们由演化算符 $U_{AE}(t)$ 中相互作用、环境 E 的一组基 $\{|\mu\rangle_E\}$ (以及其中基态 $|0\rangle_E$) 共同决定。利用 (6.5) 式定义，将 A 任一初始混态 $\rho_A(0)$ 演化为 $\rho_A(t)$ 的过程表示为

$$\boxed{\rho_A(t) \equiv \mathcal{S}(\rho_A(0)) = \sum_{\mu} M_{\mu}(t) \rho_A(0) M_{\mu}^{\dagger}(t)} \quad (6.6)$$

(6.6) 式时间演化定义了一个超算符映射 $\mathcal{S}$ ：它把子系统 A 初始时刻密度矩阵 $\rho_A(0)$ 线性地映射为 t 时刻密度矩阵 $\rho_A(t)$ 。(6.6) 式称为超算符 $\mathcal{S}$ 的算符求和表示，或称作超算符 $\mathcal{S}$ 的 *Kraus* 表示。这里，由 $U_{AE}(t)$ 的么正性，立即可得

$$\begin{aligned} \sum_{\mu} M_{\mu}^{\dagger}(t) M_{\mu}(t) &= \sum_{\mu} {}_E\langle 0| U_{AE}^{\dagger}(t) |\mu\rangle_{EE} \langle \mu| U_{AE}(t) |0\rangle_E \\ &= {}_E\langle 0| U_{AE}^{\dagger}(t) U_{AE}(t) |0\rangle_E = I_A \end{aligned} \quad (6.7)$$

确实地， $\rho_A(t)$ 仍是密度矩阵，因为：

第一， $\rho_A(t)$ 是厄米的；

第二， $\rho_A(t)$ 是单位迹的

$$\begin{aligned} \text{tr}_A \rho_A(t) &= \sum_{\mu} \text{tr}_A \{ M_{\mu}(t) \rho_A(0) M_{\mu}^{\dagger}(t) \} = \sum_{\mu} \text{tr}_A \{ M_{\mu}^{\dagger}(t) M_{\mu}(t) \rho_A(0) \} \\ &= \text{tr}_A \left\{ \sum_{\mu} \{ M_{\mu}^{\dagger}(t) M_{\mu}(t) \} \rho_A(0) \right\} = \text{tr}_A \rho_A(0) = 1 \end{aligned}$$

第三， $\rho_A(t)$ 是半正定的：由 $\rho_A(0)$ 半正定，即对 A 的任意态 $|\varphi\rangle_A$ ，有 ${}_A\langle \varphi | \rho_A(0) | \varphi \rangle_A \geq 0$ ，于是有

$${}_A\langle \varphi | \rho_A(t) | \varphi \rangle_A = \sum_{\mu} [{}_A\langle \varphi | M_{\mu}(t)] \rho_A(0) [M_{\mu}^{\dagger}(t) | \varphi \rangle_A] \geq 0$$

这里可将 $M_{\mu}^{\dagger}(t) | \varphi \rangle_A$ 看作是 A 的某个态。这三点表明， $\rho_A(t)$ 是一个密度矩阵。

超算符 $\mathcal{S}$ 是子系统密度矩阵的随时间演化的映射算符，它提供了密度矩阵演化的一个普遍描述。包括纯态到混态、混态到混态的退相干（甚至混态到基态——纯态衰变）的演化过程。

显然，只当环境 E 的态空间维数为1（或者算符序列 $\{M_\mu\}$ 中只有一个是线性独立的那些过程），才不会出现退相干过程(详见下面§6.4)。就是说，如果 $\mathcal{S}$ 求和表示算符 M_μ 中，至少有两个是线性无关的，那么在 U_{AE} 演化作用下，即使初态是 A 的一个纯态，经过演化也会与 E 发生纠缠，并在对 E 取迹之后成为混态。这时系统 ρ_A 演化一般不再是可逆的，超算符 $\mathcal{S}$ 也不再是幺正的。

超算符 $\mathcal{S}$ 求和表示的特例是等时映射的 *von Neumann* 正交投影测量和 *POVM* 广义测量。它们分别是

$$\rho_A \rightarrow \rho'_A = \sum_i E_i \rho_A E_i, \quad \sum_i E_i = 1 \quad (6.8a)$$

$$\rho_A \rightarrow \rho''_A = \sum_\mu \sqrt{F_\mu} \rho_A \sqrt{F_\mu}, \quad \sum_\mu F_\mu = 1 \quad (6.8b)$$

3, 超算符的性质, *Kraus* 定理

i, 超算符的几个性质。由于超算符表示系统随时间的演化，当然可以连乘起来串接演化，但注意它们又是不可逆的。于是，总结列举它们有以下几个重要性质：

所有超算符只构成动力学半群；

超算符必定保持内积，即超算符必为等距算符；

超算符若可逆必为幺正，反之也是。

最后一点和算符理论中“等距算符有逆算符必为幺正算符，反之也是”的论断相对应。

关于“超算符为幺正算符的充要条件”也可以换种提法（习题 6.3）：

$$M_{\mu}M_{\nu}^{\dagger}=C_{\mu\nu} \text{ 是常数, 且 } \text{tr } C=1 \quad (6.9)$$

ii, Kraus 定理

以上叙述表明，大系统随时间么正演化结果，在子系统中必定表现为超算符的算符求和形式。反过来，现在证明下述论断：

【Kraus 算符求和定理】

“设 $\mathcal{S}$ 是开放系统 A 密度矩阵 ρ_A 的一个映射，如果此映射满足 4 个条件：1) 线性的，2) 保持厄米性的，3) 保迹的，4) 完全正的，则此映射必定可以表示成上面算符求和的形式。”

在证明此定理之前需要预先解释：第 4 条“**完全正的**”含义是：“用添加任意子空间 B 的办法，对空间 A 进行直积推广时，算子 $\mathcal{S}_A$ 的推广 $\mathcal{S}_A \otimes I_B$ 仍然总保持为正的”。这条要求表面上看起来有点多余，但在物理上是合理的，只有在这样限制下的映射才能确保子系统密度矩阵映射后还是另一个密度矩阵。因为，**其一**，一个算符是正的并不总能保证它是完全正的。比如，转置运算虽是正的但却不是完全正的（见习题 4。于是这明确宣示，转置运算不在超算符映射之列）。**其二**，当我们研究系统 A 演化时，确实不能否定我们未觉察到的与 A 完全不耦合的其它子系统 B 的存在。这个要求正是说当 A 演化而 B 不演化时，组合系统的任何初始密度矩阵仍旧演化为另一个密度矩阵。

证明：分两步【2】，**首先**，叙述“**奈属态方法**”。

设伴随空间 $\mathcal{H}_B$ 的维数不小于所研究空间的维数，即 $\dim \mathcal{H}_B \geq \dim \mathcal{H}_A = N$ 。已给定 $\mathcal{H}_A$ 中任一算符 M_A 。下面描述算符 $M_A \otimes I_B$ 如何对直积空间 $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ 一个最大纠缠纯态的作用，来全面地表示算符 M_A 在 $\mathcal{H}_A$ 中的作用。考虑最大纠缠态（注意未归一化）

$$|\Psi\rangle_{AB} = \sum_{i=1}^N |i\rangle_A |i'\rangle_B \quad (6.10)$$

其中 $\{|i\rangle_A\}$ 和 $\{|i'\rangle_B\}$ 分别是 $\mathcal{H}_A$ 和 $\mathcal{H}_B$ 中的正交归一基。注意，从最大纠缠态 $|\Psi\rangle_{AB}$ 出发，用如下“部分内积”办法，总可以将 $\mathcal{H}_A$ 中任一

纯态 $|\varphi\rangle_A = \sum_i \alpha_i |i\rangle_A$ (求和项数 $\leq N$) 映射到 $\mathcal{H}_B$ 中相应纯态 $|\varphi^*\rangle_B$:

$$|\varphi^*\rangle_B = \sum_i \alpha_i^* |i'\rangle_B; \quad |\varphi\rangle_A = {}_B \langle \varphi^* | \Psi \rangle_{AB} \quad (6.11)$$

通常称 $|\varphi^*\rangle_B$ 为指标态 (*index state*), $|\varphi\rangle_A$ 是亲属态 (*relative state*)。

这里有映射,

$$|\varphi\rangle_A = \sum_{i=1}^N \alpha_i |i\rangle_A \leftrightarrow |\varphi^*\rangle_B = \sum_{i'=1}^N \alpha_i^* |i'\rangle_B \quad (6.12)$$

这种映射显然是反线性么正映射——反么正映射。并且一般只涉及 $\mathcal{H}_B$ 某个子空间。现在, 将算符 $M_A \otimes I_B$ 作用在态 $|\Psi\rangle_{AB}$ 上,

$$(M_A \otimes I_B) |\Psi\rangle_{AB} = \sum_i M_A |i\rangle_A \otimes |i'\rangle_B$$

利用指标态-亲属态方法, 可将算符 M_A 对亲属态的作用表示成:

$$M_A |\varphi\rangle_A = (M_A \otimes I_B) {}_B \langle \varphi^* | \Psi \rangle_{AB} = {}_B \langle \varphi^* | (M_A \otimes I_B) |\Psi\rangle_{AB} \quad (6.13)$$

这种方法可以用下面说法解释: 通过对 $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ 中一个最大纠缠态进行测量, 可以实现 $\mathcal{H}_A$ 的一个纯态系综——特别是, 当 $\mathcal{H}_B$ 中测量结果为指标态 $|\varphi^*\rangle_B$ 时, 便在 $\mathcal{H}_A$ 中制备了它的亲属态 $|\varphi\rangle_A$ 。注意 A 和 B 可能是两个处于不同地点的子系统, 对这个两体最大纠缠态 $|\Psi\rangle_{AB}$ 的操作, 是先施加算符操作再制备态 $|\varphi\rangle_A$ (按 (6.13) 式右侧理解), 还是先制备态 $|\varphi\rangle_A$ 再施加算符操作 (按 (6.13) 式左侧理解), 只要是类空间隔就没有差别。这如同塌缩和关联塌缩的关系一样, 并无绝对的意义 (即与观察者无关)。

其次, 将上述亲属态方法应用于满足题设 4 个条件的超算符 $\$A$ (注意不是用于算符, 而是超算符)。由于 $\$A$ 是完全正的, 所以 $\$A \otimes I_B$ 是正的。将 $\$A \otimes I_B$ 作用于已知最大纠缠态密度矩阵 $\rho_{AB} = |\Psi\rangle_{AB} \langle \Psi|$, 结果是 $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ 中的另一个密度矩阵 ρ'_{AB} 。和通常密度矩阵一样, ρ'_{AB} 总可以展开为一个纯态系综。即, 总有

$$(\$ _A \otimes I _B)(|\Psi\rangle_{AB} \langle\Psi|)=\sum_{\mu} q_{\mu}|\Phi_{\mu}\rangle_{AB} \langle\Phi_{\mu}| \quad (6.14)$$

这里 $q_{\mu} > 0, \sum_{\mu} q_{\mu} = 1, \langle\Phi_{\mu}|\Phi_{\mu}\rangle_{AB} = N$ 。于是，按现在方法就得到

$$\begin{aligned} \$ _A (|\varphi\rangle_A \langle\varphi|) &= \$ _A \left[\langle\varphi^*|\Psi\rangle_{AB} \langle\Psi|\varphi^*\rangle_B \right] = \langle\varphi^*| \$ _A \otimes I _B (|\Psi\rangle_{AB} \langle\Psi|) |\varphi^*\rangle_B \\ &= \sum_{\mu} q_{\mu} \langle\varphi^*|\Phi_{\mu}\rangle_{AB} \langle\Phi_{\mu}|\varphi^*\rangle_B \equiv \sum_{\mu} M_{\mu} |\varphi\rangle_A \langle\varphi|M_{\mu}^+ \end{aligned} \quad (6.15)$$

最后一步恒等号定义了 $\mathcal{H}_A$ 中的一个算符系列 $\{M_{\mu}, \mu = 0, 1, \dots\}$ ：

$$M_{\mu} : |\varphi\rangle_A \rightarrow \sqrt{q_{\mu}} \langle\varphi^*|\Phi_{\mu}\rangle_{AB} \equiv M_{\mu} |\varphi\rangle_A \quad (6.16)$$

注意 $|\Phi_{\mu}\rangle_{AB}$ 与 $|\varphi\rangle_A$ 无关。由 (6.14) 式， $\$$ 的作用导致 $|\Phi_{\mu}\rangle_{AB}$ 和脚标 μ 有关， $|\Phi_{\mu}\rangle_{AB}$ 并不正比于最大纠缠态 $|\Psi\rangle_{AB}$ ，所以 $\langle\varphi^*|\Phi_{\mu}\rangle_{AB}$ 也就不正比于 $|\varphi\rangle_A$ 。如果独立 M_{μ} 个数多于 1， M_{μ} 不么正。总之可得：

i, 由 (6.15) 式， $\$ _A (|\varphi\rangle_A \langle\varphi|) = \sum_{\mu} M_{\mu} |\varphi\rangle_A \langle\varphi|M_{\mu}^+; \forall |\varphi\rangle_A \in \mathcal{H}_A$ 。

ii, 由 (6.16) 式， M_{μ} 对 $|\varphi\rangle_A$ 作用是线性的（注意 $|\varphi\rangle_A \rightarrow \langle\varphi^*|$ 显然是线性的，再加上由 (6.14) 式， $|\Phi_{\mu}\rangle_{AB}$ 与 $|\varphi\rangle_A$ 无关）。

iii, 对任意混态 ρ_A ，因为可展开作为一个纯态系综，而 $\$ _A$ 又是线性的。于是有

$$\begin{aligned} \rho_A &= \sum_i p_i |\varphi_i\rangle_A \langle\varphi_i| \Rightarrow \\ \$ _A (\rho_A) &= \sum_i p_i \$ (|\varphi_i\rangle_A \langle\varphi_i|) = \sum_{i,\mu} p_i M_{\mu} |\varphi_i\rangle_A \langle\varphi_i|M_{\mu}^+ = \sum_{\mu} M_{\mu} \rho_A M_{\mu}^+ \end{aligned}$$

iv, $\sum_{\mu} M_{\mu}^+ M_{\mu} = 1$ 。因为 $\$ _A$ 对任何 ρ_A 是保迹的（这是定理原设的条件——只是当时不知它有没有现在这种求和表示）。

定理证毕。

简单总结以上论证：因为 $\$ _A$ 是完全正的，所以 $\$ _A \otimes I _B$ 将 $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ 上一个最大纠缠态密度矩阵变为另一个密度矩阵。这个密度矩阵能表达成一个纯态系综 $\{\sqrt{q_{\mu}} |\Phi_{\mu}\rangle_{AB}, \forall \mu\}$ 。在 $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ 中这

些纯态中的每个态都关联着（借助亲属态方法）算符求和表示中的每一项。

【讨论】上面叙述了如何由超算符 $\mathcal{S}_A$ 的系综表示转换到它的求和表示。详细点说，借助亲属态构造方法，在超算符 $\mathcal{S}_A$ 对最大纠缠纯态密度矩阵变换的系综表示（(6.14) 式）与 $\mathcal{S}_A$ 的算符求和表示（(6.15) 式）之间可以建立起相互对应关系。其实，也能逆向进行，即从算符求和表示转到系综表示。即如果

$$\mathcal{S}_A(|i\rangle_A \langle j|) = \sum_{\mu} M_{\mu} |i\rangle_A \langle j| M_{\mu}^+$$

则

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}_A \otimes I_B)(|\Psi\rangle_{AB} \langle\Psi|) &= (\mathcal{S}_A \otimes I_B) \sum_{i,j} |i\rangle_A |i'\rangle_B \langle j'|_A \langle j|_B \\ &= \sum_{i,j,\mu} M_{\mu} |i\rangle_A |i'\rangle_B \langle j'|_A \langle j|_B M_{\mu}^+ \\ &= \sum_{\mu} \sum_{i,j} (M_{\mu} |i\rangle_A |i'\rangle_B) (\langle j'|_A \langle j|_B M_{\mu}^+) = \sum_{\mu} q_{\mu} |\Phi_{\mu}\rangle_{AB} \langle\Phi_{\mu}| \end{aligned}$$

这里记 $\sum_i M_{\mu} |i\rangle_A |i'\rangle_B \equiv \sqrt{q_{\mu}} |\Phi_{\mu}\rangle_{AB}$ 。注意，由于涉及的 $\{|i\rangle_A\}$ 和 $\{|i'\rangle_B\}$ 未见得将基矢全部用上了，所以它们不一定是完备的。于是此式只是对相应 M_{μ} 的定义， q_{μ} 的数值也由左边决定。于是，这就导出了相应的系综表示。

§6.2 混态演化之二——主方程方法

1. 密度矩阵的演化——主方程的导出

i, Markov 近似

【定义】凡是量子体系 A 之外并与体系有相互作用的全部自由度，统称之为环境 E 。

这些被称为环境的自由度，有些是属于另一些体系的，也可能属于所研究体系本身而为我们所不感兴趣或是难以计入的另外方面的自由度。如果环境 E 的自由度数目远大于 A 本身正对之

进行研究的自由度数目的，使得可以近似认定 E 不受 A 的影响，这种环境 E 称为热库 R 。

单就时间变数而言，如果体系 A 在任一时刻状态 $\rho_A(t)$ 的变化 $d\rho_A(t)/dt$ 只依赖于此时此刻的 $\rho_A(t)$ 和此时此刻的物理量 $\hat{A}_i(t), (i=1, 2, \dots)$ ，才可能存在某种微分方程，用于描写体系的动力学演化过程：

$$\frac{d\rho_A(t)}{dt} = f(\rho_A(t), \hat{A}_i(t), \dots) \quad (6.17)$$

这里，算符 $\hat{A}_i(t)$ 是体系 A 自身原有的，以及 A 和 E 相互作用后经过对 E 平均折算而出现的 A 的某些算符。但要注意两点，**其一**，**即便在大系统 $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ 中总体系动力学演化遵守微分方程——Schrodinger 方程，也不能保证在子系统 $\mathcal{H}_A$ 中 $\rho_A(t)$ 的演化可以用某个微分方程来描述**。因为，一个处在与环境 E 相互作用中的体系 A ，其信息将会通过相互作用流向环境 E ，也必定有另一些信息从环境 E 流向体系 A 。更关键的是，一般说环境 E 可以保留和记忆从 A 流过来的信息，并在将来某个时刻再以某种形式返还给 A 以影响 A 将来的状态，因而现时刻 A 的状态会受到过去某些时刻 A 和 E 相互作用的影响。于是，**单纯从观察 A 角度来看，双方信息的往返将表现为 A 状态的涨落和耗散，并且一般不保证 A 的动力学演化过程可以用微分方程形式来描写。除非信息反馈时， E 的记忆与反馈时间尺度 $\tau_{\text{记忆}} = \tau_{\text{rem}}$ 远快于 A 的演化时间尺度**

$$\tau_{\text{演化}} = \tau_{\text{rev}},$$

$$\boxed{\tau_{\text{rev}} \gg \tau_{\text{rem}}} \quad (6.18a)$$

才有可能找到适当的微分方程描写 A 的动力学演化过程。**其二**，再进一步，一般说来， A 与环境相互作用以及 A 本身还含有被忽略掉的细节和次要自由度。这类略去的作用细节、删去的次要自由度、抹平掉的高频涨落（统称高频截断），就像在时间轴上对体系演化进行间隔采样，是一种关于时间粗粒化的处理。这种近似采样成立的条件是：粗粒化时间间隔 $\tau_{\text{粗粒}} = \tau_{\text{coa}}$ 一方面很小于体系演化衰减的时间尺度 τ_{rev} ，而另一方面又很大于热库记忆的时间尺度 τ_{rem} 。总之，通常情况下，一种有效的描述应当满足【1、18】：

$$\tau_{\text{rev}} \gg \tau_{\text{coa}} \gg \tau_{\text{rem}} \quad (6.18b)$$

这是下面推导和应用主方程的时候，应注意保证满足的制约条件。**以上分析概括为 Markov 近似——这是一个认定热库 R 对信息衰减和反馈是瞬时的，也即忽略热库记忆（累积）效应的近似；是一个略去相互作用细节、删去次要自由度、抹平高频涨落的高频截断近似。针对量子网络情况，这个近似也被等效地换说成：先后顺序各个逻辑环节的噪音来源各自独立地起作用【14】。**

ii, 混态的演化方程——主方程推导

给定初条件下，量子开放体系的混态演化基本方程常称作主方程。它是此子系统的约化密度算符在环境或热库影响下的时间演化方程。上面已经表明，一般说，这应当是一个不等时（按因果规律应当具有各种程度时间延迟）的积分微分方程，仅在 **Markov 近似**下简化成为等时微分方程。

推导子系统约化密度矩阵演化主方程的办法主要有：源自

1928 年 *Pauli* 工作的 *Pauli-Zwanzig* 方法、*Louisell* 方法，超算符方法。*Pauli-Zwanzig* 方法主要参见【8、9、10、11】；*Louisell* 方法主要参见【12】。其实 *Louisell* 方法可以看作 *Zwanzig* 方法取一种特殊的情况，即投影算符为对热库的求迹运算，并加上 *Markov* 近似。下面选择最简单的超算符方法——从 *Kraus* 表示出发来导出它【1】。

设孤立系 A 的 *Hamiltonian* 是 H ，其密度矩阵的么正演化为

$$\rho_A(t) = e^{-iHt/\hbar} \rho_A(0) e^{iHt/\hbar}$$

将 A 推广到 *Markov* 近似下开放系统非么正演化过程。这时假定：

$$\rho_A(t) = \text{Tr}^{(E)} \{ U_{EA}(t) \rho_A(0) \otimes \rho_E(0) U_{EA}^+(t) \} \equiv \mathcal{L}(t) [\rho_A(0)] \quad (6.19)$$

这里线性超算符 $\mathcal{L}(t)$ 被称作 *Lindblad 算符*（也见【1】，或【14】p.386）。它将初始时刻 $\rho_A(0)$ 映射为 t 时刻 $\rho_A(t)$ 的导数。如果要求它不仅是线性的，而且是完全正的、保迹的和强连续的，就可以从体系 A 与环境 E 相耦合的 *Kraus* 方程出发，在 *Markov* 近似下，推导这个开放系统的非么正演化方程。设耦合系统 *Hamiltonian* 为 $H = H_A + H_E + H_{AE}$ ，其中 H_A 是 A 体系的 *Hamiltonian*。考虑 $t \rightarrow t + dt$ 无穷小时间段内的演化 $U_{AE}(t \rightarrow t + dt) \equiv U_{AE}(t, dt)$ ，得

$$\begin{cases} \rho_A(t + dt) \equiv \mathcal{S}[\rho_A(t)] = \sum_{\mu} M_{\mu}(t, dt) \rho_A(t) M_{\mu}^+(t, dt) \\ M_{\mu}(t \rightarrow t + dt) = {}_E \langle \mu | U_{AE}(t, dt) | 0 \rangle_E (= M_{\mu}(t, dt)); \end{cases} \quad (6.20)$$

此时全部变化都在无穷小 dt 内发生，各项对 dt 均可作线性展开，

$$\left\{ \begin{array}{l} U_{AE}(t, dt) = I_{AE} - \frac{i}{\hbar} H(t) dt \\ M_0(t, dt) = {}_E \langle 0 | U_{AE}(t, dt) | 0 \rangle_E = I_A + \left(-\frac{i}{\hbar} H_A(t) + K_A(t) \right) dt \\ M_\mu(t, dt) = {}_E \langle \mu | U_{AE}(t, dt) | 0 \rangle_E = -iL_{A,\mu}(t) \sqrt{dt} \end{array} \right. \quad (6.21)$$

其中，第二个方程小实部 K_A 表示： E 和 A 相互作用 H_{AE} （经 E 基态平均后）对 A 状态的耗散。就是说，实部 $\text{Re}\{M_0(t, dt)\} \neq I_A$ 表明， E 和 A 相互作用造成量子纠缠中，即便 E 状态仍保留在基态没有跃迁， A 也可能不还原而以一定概率向 A 的其它状态跃迁。单纯从 A 观察来看，这种现象是 A 原来状态的一种耗散。（6.21）式第三个方程是针对 E 状态有跃迁（ $\mu > 0$ ）的中介过程。 $\sqrt{dt}$ 是考虑到 *Kraus* 求和表示关于 M_μ 为双线性的，下面推导会看得更为清楚。将（6.21）式代入（6.20）式，得

$$\begin{aligned} \rho_A(t+dt) &= M_0(t, dt) \rho_A(t) M_0^\dagger(t, dt) + \sum_{\mu>0} M_\mu(t, dt) \rho_A(t) M_\mu^\dagger(t, dt) \\ &= \left[1 + \left(-\frac{i}{\hbar} H_A(t) + K_A(t) \right) dt \right] \rho_A(t) \left[1 + \left(\frac{i}{\hbar} H_A(t) + K_A(t) \right) dt \right] \\ &\quad + \sum_{\mu>0} \left(-iL_{A,\mu}(t) \sqrt{dt} \right) \rho_A(t) \left(iL_{A,\mu}^\dagger(t) \sqrt{dt} \right) \\ &= \rho_A(t) + \left(-\frac{i}{\hbar} H_A + K_A \right) \rho_A(t) dt + \rho_A(t) \left(\frac{i}{\hbar} H_A + K_A \right) dt + \sum_{\mu>0} L_{A,\mu} \rho_A(t) L_{A,\mu}^\dagger dt \end{aligned}$$

即

$$\left. \frac{d\rho_A(t)}{dt} \right|_{t=0} = \frac{-i}{\hbar} [H_A(t), \rho_A(t)] + K_A(t) \rho_A(t) + \rho_A(t) K_A(t) + \sum_{\mu>0} L_{A,\mu}(t) \rho_A(t) L_{A,\mu}^\dagger(t) \quad (6.22)$$

为了求出 K_A 与 $L_{A,\mu}$ 的关系，注意到

$$\begin{aligned}
I_A &= \sum_{\mu=0} M_{\mu}^+(t, dt) M_{\mu}(t, dt) \\
&= \left[I_A + \left(\frac{i}{\hbar} H_A + K_A \right) dt \right] \left[I_A + \left(-\frac{i}{\hbar} H_A + K_A \right) dt \right] + \sum_{\mu>0} L_{A,\mu}^+ L_{A,\mu} dt \\
&= I_A + 2K_A dt + \sum_{\mu>0} L_{A,\mu}^+ L_{A,\mu} dt
\end{aligned}$$

于是

$$K_A = -\frac{1}{2} \sum_{\mu>0} L_{A,\mu}^+ L_{A,\mu} \quad (6.23)$$

算符 $\{L_{\mu}\}$ 序列常称为 *Lindblad* 算符或量子跳变算符。它们表示体系 A 与环境 E 相互作用所导致的对 A 状态的耗散。将 (6.23) 式代入 (6.22) 式，略去脚标 A ，即得 *Lindblad* 方程：

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [H, \rho(t)] + \sum_{\mu>0} \left\{ L_{\mu} \rho(t) L_{\mu}^+ - \frac{1}{2} L_{\mu}^+ L_{\mu} \rho(t) - \frac{1}{2} \rho(t) L_{\mu}^+ L_{\mu} \right\} \quad (6.24)$$

方程 (6.24) 是予体系（或开放体系）密度矩阵演化至方程的最常见形式。注意， $\rho(t)$ 是密度矩阵， $\rho(t+dt)$ 也是密度矩阵。事实上，主方程中 $d\rho/dt$ 是厄密的，并且是保迹的 $Tr(d\rho/dt)=0$ （注意求和号中第二、第三两项的作用）。这意味着计入耗散后概率守恒。只有保持正定性这条不明显。但从推导的出发点 *Kraus* 表示知道，只要 $\rho(0)$ 是正的，由 (6.24) 式决定的 $\rho(t)$ 也一定是正的。

2. 主方程的物理分析

方程 (6.24) 在混态演化中的地位几乎接近于 *Schrodinger* 方程在纯态演化中的地位。第一项相应于无环境时体系按 *Schrodinger* 方程的么正演化。其余项描述了体系和环境相互作用使体系经受的跃迁、耗散和退相干。含有量子跳变算符 $\{L_{\mu}\}$ 的求和项共有三个：第一个求和的每一项 $L_{\mu} \rho(t) L_{\mu}^+$ 分别诱导一种量子

跃迁；后两项求和是不论体系如何演化，体系密度矩阵保迹，即量子系综总概率守恒。

在上面推导中，*Markov* 近似表现在方程 (6.21) 上： A 体系 *Kraus* 求和中，表示相互作用结果是环境从 $|0\rangle_E \rightarrow |\mu\rangle_E$ 跃迁的 M_μ 算符，已经近似转化为 A 体系的等时（即瞬间）的量子跳变算符 $L_{A,\mu}$ ； E 和 A 之间量子态纠缠也瞬间地转化为 A 状态的耗散。因此，两种常用的关于混态变化的计算方法——*Kraus* 求和方法与主方程方法相比较，*Kraus* 求和方法要更为普遍。因为它只涉及密度矩阵的改变（映射）而不是连续演化，并未使用 *Markov* 近似。

§6.3, 主方程的求解【18】

1, 主方程求解方法 (I) ——概述

求解主方程有不少方法，视主方程的形式及求解的具体目标而定。它们大体分为两类：

i, **各种 C -数等效方法【3】**。包括稳态情况下粒子数表象的 C -数方程法；求算符期望值的 C -数方程法； P -表象、 Q -表象、*Wigner* 函数表象下 *Fokker-Planck* 方程方法等等。这些方法的共同点和实质都是将算符方程转化为普通函数方程，或是算符的矩阵元方程，成为联立方程组，适当将其截断再代数方法求解。此一类型的各种方法在量子光学和凝聚态物理中常有介绍，详细可见【3】，这里不再复述。

ii, **超算符方法【4】**。此方法最初由该文提出。对单模腔场中辐射场的主方程，若用 *Liouville* 空间方法求解，很难从已

知初态求得密度算符的解析表达式，因此提出此种方法。

单模腔场中辐射场的主方程为

$$\dot{\rho}(t) = k(N_r + 1)(2a\rho a^\dagger - a^\dagger a \rho - \rho a^\dagger a) + kN_r(2a^\dagger \rho a - aa^\dagger \rho - \rho aa^\dagger) \quad (6.25)$$

为了解析求解此方程，定义如下三个超算符(J_1, J_2, L):

$$J_1[\rho] \equiv 2\gamma a \rho a^\dagger, J_2[\rho] \equiv 2\beta a^\dagger \rho a, L[\rho] \equiv -(\gamma + \beta)(a^\dagger a \rho + \rho a^\dagger a) \quad (6.26)$$

式中的常数 $\gamma = k(N_r + 1)$, $\beta = kN_r$ 。由(6.26)式右边玻色算符的对易关系，容易证明所定义的超算符满足如下对易关系

$$\begin{cases} [J_2, J_1][\rho] = \frac{4\beta\gamma}{\beta + \gamma} L[\rho] - 4\beta\gamma \rho \\ [J_1, L][\rho] = -2(\beta + \gamma) J_1[\rho] \\ [J_2, L][\rho] = 2(\beta + \gamma) J_2[\rho] \end{cases} \quad (6.27)$$

※ 计算检验:

$$\begin{aligned} * [J_2, J_1][\rho] &= J_2[2\gamma a \rho a^\dagger] - J_1[2\beta a^\dagger \rho a] \\ &= 4\beta\gamma a^\dagger a \rho a^\dagger a - 4\beta\gamma aa^\dagger \rho aa^\dagger = 4\beta\gamma a^\dagger a \rho a^\dagger a - 4\beta\gamma (a^\dagger a + 1)\rho(a^\dagger a + 1) \\ &= \frac{4\beta\gamma}{\beta + \gamma} L[\rho] - 4\beta\gamma \rho \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * [J_1, L][\rho] &= -(\beta + \gamma) J_1[(a^\dagger a \rho + \rho a^\dagger a)] - 2\gamma L[a \rho a^\dagger] \\ &= -(\beta + \gamma) 2\gamma a (a^\dagger a \rho + \rho a^\dagger a) a^\dagger + 2\gamma (\gamma + \beta) (a^\dagger aa \rho a^\dagger + a \rho a^\dagger a^\dagger a) \\ &= 2\gamma (\beta + \gamma) (-aa^\dagger a \rho a^\dagger - a \rho a^\dagger aa^\dagger + a^\dagger aa \rho a^\dagger + a \rho a^\dagger a^\dagger a) \\ &= 2\gamma (\beta + \gamma) (-a \rho a^\dagger - a \rho a^\dagger) = -2(\beta + \gamma) J_1[\rho] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * [J_2, L][\rho] &= -(\beta + \gamma) J_2[(a^\dagger a \rho + \rho a^\dagger a)] - 2\beta L[a^\dagger \rho a] \\ &= -(\beta + \gamma) 2\beta a^\dagger (a^\dagger a \rho + \rho a^\dagger a) a + 2\beta (\beta + \gamma) (a^\dagger aa^\dagger \rho a + a^\dagger \rho aa^\dagger a) \\ &= 2\beta (\beta + \gamma) (-a^\dagger a^\dagger a \rho a - a^\dagger \rho a^\dagger aa + a^\dagger aa^\dagger \rho a + a^\dagger \rho aa^\dagger a) \\ &= 2\beta (\beta + \gamma) (2a^\dagger \rho a) = 2(\beta + \gamma) J_2[\rho] \end{aligned}$$

于是，(6.25)式可以写成

$$\dot{\rho}(t) = (J_1 + J_2 + L - 2\beta)[\rho] \quad (6.28)$$

此式的形式解为

$$\rho(t) = \exp(-2\beta t) \exp\{(J_1 + J_2 + L)t\} [\rho(0)] \quad (6.29)$$

此式可以分拆，【4】中得出如下表达式，

$$\rho(t) = \exp(-2\beta t) \exp[f_3(t)] \exp[f_2(t)J_2] \exp[f_0(t)L] \exp[f_1(t)J_1] [\rho(0)] \quad (6.30)$$

对此式微分并利用上面 (6.27) (6.28) 式，可得 (6.30) 式中各系数函数所满足的微分方程

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{df_0}{dt} + \frac{4\beta\gamma}{\beta+\gamma} f_2 = 1 \\ \frac{df_1}{dt} = e^{-2(\beta+\gamma)f_0} \\ \frac{df_2}{dt} + 2(\beta+\gamma) \frac{df_0}{dt} f_2 + 4\beta\gamma f_2^2 = 1 \\ \frac{df_3}{dt} = 4\beta\gamma f_2 \end{array} \right.$$

解这组微分方程可得各系数为

$$\left\{ \begin{array}{l} f_0 = \frac{\gamma-\beta}{\gamma+\beta} t + \frac{1}{\gamma+\beta} \ln \left(\frac{\beta e^{2(\beta-\gamma)t} - \gamma}{\beta - \gamma} \right) \\ f_1 = f_2 = \frac{1}{2} \frac{e^{2(\beta-\gamma)t} - 1}{\beta e^{2(\beta-\gamma)t} - \gamma} \\ f_3 = 2\beta t - \ln \frac{\beta e^{2(\beta-\gamma)t} - \gamma}{\beta - \gamma} \end{array} \right. \quad (6.31)$$

于是对于任意初态，将 (6.31) 式代入 (6.30) 式后，即可得出 $\rho(t)$ 的解析表达式。

例如，取初态为相干态 $\rho(0) = |\alpha\rangle\langle\alpha|$ ，经过一些计算可得

$$\rho(t) = \frac{\exp\{-N(t)|\tilde{\alpha}(t)|^2\}}{1+N(t)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{N(t)}{1+N(t)} \right)^n \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{n}{k} \binom{n}{m} \sqrt{k!m!} \tilde{\alpha}^*(t)^{n-k} \tilde{\alpha}(t)^{n-m} |\tilde{\alpha}(t), k\rangle \langle \tilde{\alpha}(t), m|$$

其中

$$N(t) = N_r(1 - e^{-2kt}), \quad \tilde{\alpha}(t) = \frac{\alpha e^{-kt}}{1+N(t)}, \quad |\tilde{\alpha}(t), k\rangle = D[\tilde{\alpha}(t)]|k\rangle$$

这里 $D[\tilde{\alpha}(t)]$ 为位移算符。当 $t \rightarrow \infty$ 时，由于 $\tilde{\alpha}(t) \rightarrow 0, N(t) \rightarrow N_r$ ，所以 $\rho(t)$ 将变为热态，即

$$\rho(t \rightarrow \infty) = \frac{1}{1+N_r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{N_r}{1+N_r} \right)^n |n\rangle \langle n| \quad (6.32)$$

由上面叙述可知，此方法优点是，依据初态便可以通过求解系数微分方程办法给出 $\rho(t)$ 的解析表达式。

2. 主方程求解方法 (II) ——超算符 Lie 代数方法

上面超算符方法有不足之处。这就是该方法未曾考查主方程中可能含有的 Lie 代数对称结构，当然也就没有融入 Lie 代数的对易关系考量。其后果是：仍需求解联立微分方程组来确定分拆系数函数。但在量子光学和量子信息论中，许多主方程含有一些超算符的某种对称结构。利用这些对称结构，结合我们发展的对算符序列的量子变换理论，拓展为各种超算符变换，发展了结合量子变换理论的 Lie 代数求解主方程方法【5、6、7】。方法可以求解一大类主方程，无需求解微分方程组便可确定分拆系数函数。特别是，主方程中含有超算符的 $SU(1,1), SU(2)$ 结构时，此类主方程可以用代数方法严格求解【6、7】。下面叙述这一方法【18】。

简略说，对方程（6.24）作变换 $\rho'(t) = e^{iHt/\hbar} \rho(t) e^{-iHt/\hbar}$ ，转入相互作用图象，消去含体系 *Hamiltonian* 项，仍借用原先记号，有

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = \sum_{\mu>0} \left\{ L_{\mu} \rho(t) L_{\mu}^+ - \frac{1}{2} L_{\mu}^+ L_{\mu} \rho(t) - \frac{1}{2} \rho(t) L_{\mu}^+ L_{\mu} \right\} \quad (6.33)$$

假如方程（6.33）结构中（视 $\{L_{\mu}\}$ 具体形式）含有超算符的 $SU(1,1), SU(2)$ 等的对称结构，即，如果存在超算符 $K_{\pm}, K_0$ ，可以将右边量子跳变算符求和表示重新整理成为如下标准形式：

$$\frac{d\rho(t)}{dt} \equiv [w_+ K_+ + w_- K_- + w_0 K_0] [\rho(t)] \quad (6.34a)$$

$w_{\pm}, w_0$ 是不显含时间参数，超算符 $\{K_{\pm}, K_0\}$ 满足如下封闭对易关系，

$$[K_-, K_+] [\rho(t)] = 2\varepsilon K_0 \rho(t); [K_0, K_{\pm}] [\rho(t)] = \pm K_{\pm} \rho(t) \quad (6.34b)$$

当 $\varepsilon = +1$ 时，（6.34b）式构成 $SU(1,1)$ Lie 代数， $\{K_{\pm}, K_0\}$ 是 $SU(1,1)$ 的生成元； $\varepsilon = -1$ 时，它们为 $SU(2)$ 的生成元。

主方程（6.34a）式可以形式地积出来，表示成为

$$\rho(t) = \exp\{(w_+ K_+ + w_- K_- + w_0 K_0) t\} [\rho(0)] \quad (6.35)$$

现在的任务是分解（6.35）式这种指数和形式的超算符，使其成为单项指数超算符连乘的形式，以便于进一步从 $\rho(0)$ 得到 $\rho(t)$ 的显式表达式。由于对易规则（6.34b）是封闭的，按 *Baker-hausdorff* 公式容易验证有如下两种解——由降算符到升算符的乘积分解（升序乘积解），和由升算符到降算符的乘积分解（降序乘积解）：

$$\exp\{(w_+ K_+ + w_- K_- + w_0 K_0) t\} = \exp(x_+(t) K_+) \exp(K_0 \ln x_0(t)) \exp(x_-(t) K_-) \quad (6.36a)$$

$$\exp\{(w_+ K_+ + w_- K_- + w_0 K_0) t\} = \exp(y_-(t) K_-) \exp(K_0 \ln y_0(t)) \exp(y_+(t) K_+)$$

(6.36b)

升序分解和降序分解的两组系数 $(x_+(t), x_-(t), x_0(t))$ 、 $(y_+(t), y_-(t), y_0(t))$ 与系数 (w_+, w_-, w_0) 的关系由封闭对易规则 (6.34) 式确定。具体说, 按 *Lie* 代数表示论, $SU(1,1)/SU(2)$ 超算符生成元 $K_{\pm}, K_0$ 可用 (2×2) 矩阵来表示,

$$K_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, K_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\varepsilon & 0 \end{pmatrix}, K_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

现用此矩阵表示展开(6.36a、b)式。首先, (6.36a、b)左边均为

$$\begin{aligned} \exp\{(w_+ K_+ + w_- K_- + w_0 K_0)t\} &= \exp \begin{pmatrix} \frac{1}{2} w_0 t & w_+ t \\ -\varepsilon w_- t & -\frac{1}{2} w_0 t \end{pmatrix} \\ &= \frac{\text{sh}(\gamma t)}{\gamma t} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} w_0 t & w_+ t \\ -\varepsilon w_- t & -\frac{1}{2} w_0 t \end{pmatrix} + \text{ch}(\gamma t) I \\ &= \begin{pmatrix} \text{ch}(\gamma t) + \frac{w_0}{2\gamma} \text{sh}(\gamma t) & \frac{w_+}{\gamma} \text{sh}(\gamma t) \\ -\varepsilon \frac{w_-}{\gamma} \text{sh}(\gamma t) & \text{ch}(\gamma t) - \frac{w_0}{2\gamma} \text{sh}(\gamma t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

中间参量 $\gamma = \sqrt{\frac{1}{4} w_0^2 - \varepsilon w_+ w_-}$; 右边按升降两种顺序分为两种结果,

$$\begin{cases} e^{x_+(t)K_+} e^{K_0 \ln x_0(t)} e^{x_-(t)K_-} = \frac{1}{\sqrt{x_0(t)}} \begin{pmatrix} x_0(t) - \varepsilon x_+(t)x_-(t) & x_+(t) \\ -\varepsilon x_-(t) & 1 \end{pmatrix} \\ e^{y_-(t)K_-} e^{K_0 \ln y_0(t)} e^{y_+(t)K_+} = \sqrt{y_0(t)} \begin{pmatrix} 1 & y_+(t) \\ -\varepsilon y_-(t) & y_0(t)^{-1} - \varepsilon y_+(t)y_-(t) \end{pmatrix} \end{cases}$$

由此, 上述两种分解式内的展开系数分别由下式决定【6】

$$\begin{pmatrix} ch(\gamma t) + \frac{w_0}{2\gamma} sh(\gamma t), & \frac{w_+}{\gamma} sh(\gamma t) \\ -\varepsilon \frac{w_-}{\gamma} sh(\gamma t), & ch(\gamma t) - \frac{w_0}{2\gamma} sh\gamma(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{x_0(t)}} \begin{pmatrix} x_0(t) - \varepsilon x_+(t)x_-(t), & x_+(t) \\ -\varepsilon x_-(t), & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ch(\gamma t) + \frac{w_0}{2\gamma} sh(\gamma t), & \frac{w_+}{\gamma} sh(\gamma t) \\ -\varepsilon \frac{w_-}{\gamma} sh(\gamma t), & ch(\gamma t) - \frac{w_0}{2\gamma} sh\gamma(t) \end{pmatrix} = \sqrt{y_0(t)} \begin{pmatrix} 1, & y_+(t) \\ -\varepsilon y_-(t), & y_0(t)^{-1} - \varepsilon y_+(t)y_-(t) \end{pmatrix}$$

(6.37a)

令等式两边矩阵元对应相等，即得时间相关的分解系数表达式。

最后，(6.35) 式的解，既可以通过分解表示为升序乘积的形式

$$\rho(t) = e^{x_+(t)K_+} e^{K_0 \ln x_0(t)} e^{x_-(t)K_-} \rho(0) \quad (6.37b)$$

也可以通过分解表示为降序乘积的形式

$$\rho(t) = e^{y_-(t)K_-} e^{K_0 \ln y_0(t)} e^{y_+(t)K_+} \rho(0) \quad (6.37c)$$

因此，当主方程具有这些对称结构时，利用 (6.36) 和 (6.37) 两式，便能普遍地解决它的含时解问题。当然，也许在得到 (6.34) 式这种标准形式之前，可能还需要预先作适当的变换，如同 [6] 和下面例解中所做的那样。

与【4】中方法相比，这里方法不但给出了这一类主方程解的一般显示表达式，而且得到系数也无需求解微分方程。由于许多开放体系的主方程都可以归结为这两类形式，此处方法具有一定的普遍性。

3, 例算 (I): 简单主方程求解

i, 与电磁场相互作用导致振子衰减问题【1】

考虑一个与电磁场相互作用的谐振子 $H_A \equiv H_0 = \hbar\omega a^\dagger a$,

$$H' = \sum_i \lambda_i (ab_i^\dagger + a^\dagger b_i) \quad (6.38a)$$

这里, 作为热库的电磁场为无相互作用的多自由度系统 $\sum_i \hbar\omega_i b_i^\dagger b_i$, 假定热库处于零温度。设振子在单位时间内 $(n=1) \rightarrow (n=0)$ 衰变概率为 Γ , 但振子不吸收光子。对于 $n>1$ 的高激发态, 认为这些光子各自独立衰变, 并且振子可以级联的单光子辐射衰减直至基态。这时只有一个量子跳变算符 $L_1 = \sqrt{\Gamma}a$ 。Lindblad 方程为

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[H_0, \rho] + \Gamma \left\{ a\rho a^\dagger - \frac{1}{2}a^\dagger a\rho - \frac{1}{2}\rho a^\dagger a \right\} \quad (6.38b)$$

这里量子跳变项表示振子发射光子而衰减。此处模型也可以理解为一个与电磁涨落真空态相耦合的两能级原子, 于是原子由激发态自发辐射衰变到基态。这正是 (以后要讲的关于单个 *qubit* 的) 退相干三种基本模式中的“振幅阻尼模式”。这由下面计算结果也可知道。为化简方程 (6.38), 消去右边第 1 项, 将其引入相互作用图象, 即作变换

$$\begin{cases} \rho_I(t) = e^{iH_0 t/\hbar} \rho(t) e^{-iH_0 t/\hbar} \\ \Omega_I(t) = e^{iH_0 t/\hbar} \Omega(t) e^{-iH_0 t/\hbar} \end{cases} \quad (6.39)$$

得到 (用公式 $\exp(\gamma a^\dagger a) f(a, a^\dagger) \exp(-\gamma a^\dagger a) = f(ae^{-\gamma}, a^\dagger e^\gamma)$)

$$\frac{d\rho_I(t)}{dt} = \Gamma \left\{ a_I \rho_I a_I^\dagger - \frac{1}{2} a_I^\dagger a_I \rho_I - \frac{1}{2} \rho_I a_I^\dagger a_I \right\}; \quad a_I(t) = a e^{-i\omega t} \quad (6.40a)$$

注意, 这里算符 $(a, a^\dagger)$ 本身不显含时间 (如同 x 和 p 一样)。于是

$$\frac{d\rho_I}{dt} = \Gamma \left\{ a \rho_I a^\dagger - \frac{1}{2} a^\dagger a \rho_I - \frac{1}{2} \rho_I a^\dagger a \right\} \quad (6.40b)$$

现在, 求给定初值后光子占有数平均值 $\langle n \rangle$ 的变化。按 (6.7a) 式

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle n \rangle &= \frac{d}{dt}\langle a^+ a \rangle = \text{Tr} \left(a^+ a \frac{d\rho_I}{dt} \right) \\
&= \Gamma \text{Tr} \left\{ a^+ a a \rho_I a^+ - \frac{1}{2} a^+ a a^+ a \rho_I - \frac{1}{2} a^+ a \rho_I a^+ a \right\} \\
&= \Gamma \text{Tr} \left\{ a^+ a a \rho_I a^+ - a^+ a a^+ a \rho_I \right\} = \Gamma \text{Tr} \left\{ a^+ [a^+, a] a \rho_I \right\} \\
&= -\Gamma \text{Tr} \left\{ a^+ a \rho_I \right\} = -\Gamma \langle n \rangle
\end{aligned} \tag{6.41}$$

积分即得

$$\langle n(t) \rangle = \langle n(0) \rangle \exp(-\Gamma t) \tag{6.42}$$

ii, 振子的位相衰减【1】

研究振子（ a^+, a ）和热库（ $b_i^+, b_i, i=1, \dots$ ）耦合问题。相互作用为

$$H_I = \left(\sum_i \lambda_i b_i^+ b_i \right) a^+ a \tag{6.43}$$

按定义，只有一个 *Lindblad* 算符 $L_\mu = a^+ a$ ，相互作用图象中主方程为

$$\frac{d\rho_I}{dt} = \Gamma \left(a^+ a \rho_I a^+ a - \frac{1}{2} (a^+ a)^2 \rho_I - \frac{1}{2} \rho_I (a^+ a)^2 \right) \tag{6.44}$$

这里常数 Γ 解释为：当振子被单个量子占据时，热库光子被振子散射的散射率。如假定振子的占有量子数是 n ，则散射率就是 Γn^2 。因子 n^2 是由于，振子在 $|n\rangle$ 态上时， n 个量子对热库光子散射的散射振幅相干叠加，总散射振幅将正比于 n ，所以散射率正比于 n^2 。

对于（6.44）形式的主方程，很容易在粒子数表象中求解它：方程两边用振子的数态 $\langle n|, |m\rangle$ 夹积，并令 $\langle n| \rho_I |m\rangle = \rho_{nm}$ ，即得主方程的矩阵元形式为

$$\begin{aligned}\frac{d\rho_{nm}}{dt} &= \Gamma \left(nm - \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}m^2 \right) \rho_{nm} \\ &= -\frac{\Gamma}{2}(n-m)^2 \rho_{nm}\end{aligned}\quad (6.45)$$

对时间积分，即得

$$\rho_{nm}(t) = \rho_{nm}(0) \exp \left[-\frac{1}{2}(n-m)^2 \Gamma t \right] \quad (6.46)$$

【模型讨论】 这是一个典型的相位退相干模型。足够长时间后，非对角项 $n \neq m$ 都会衰减掉（越远离对角线的项衰减越快）。只剩下全部对角项保持在初始数值。假定初始时刻制备一个猫态：

$$\begin{aligned}|Cat\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|n_1\rangle + |n_2\rangle); \\ \rho_{cat}(0) &= \frac{1}{2}(|n_1\rangle_{AA}\langle n_1| + |n_2\rangle_{AA}\langle n_2| + |n_1\rangle_{AA}\langle n_2| + |n_2\rangle_{AA}\langle n_1|)\end{aligned}\quad (6.47)$$

这是个纯态，由两个占有数本征态的相干叠加而成。由于设定它是猫态，两个占有数应当相差很大 $|n_1 - n_2| \gg 1$ 。于是演化结果，非对角项十分迅速地衰减掉了 $\exp\left(-\frac{1}{2}(n_1 - n_2)^2 \Gamma t\right) \rightarrow 0$ 。

【“Schrodinger-Cat 佯谬”的解释】 人们从来看不到“死”“活”两个状态是相干叠加着的猫。那是因为：猫是宏观物体，叠加纠缠十分庞杂，而且死、活两个状态涉及的自由度差别十分巨大。因此，即便初始制备出了这种相干叠加态，按此处相位退相干模型计算结果，其退相干速度也会非常快速，以致就此问题进行实验观察是不切实际的。

4. 例算 (II)：主方程的超算符方法求解

i, 压缩热库下的阻尼振子【6、18】。这时主方程为

$$\begin{aligned}\dot{\rho}(t) = & \frac{r}{2}(N+1)(2a\rho a^+ - a^+a\rho - \rho a^+a) + \frac{r}{2}N(2a^+\rho a - aa^+\rho - \rho aa^+) \\ & + \frac{r}{2}M(2a^+\rho a^+ - (a^+)^2\rho - \rho(a^+)^2) + \frac{r}{2}M^*(2a\rho a - a^2\rho - \rho a^2)\end{aligned}\quad (6.48)$$

式中 N 是热库平均光子数， r 是衰减速率， M 是与压缩热库有关的参数。第 1、2 两项分别对应 *Lindblad* 算符 $L_1 = a, L_2 = a^+$ 。由于振子占有数减少对应热库光子数增加，所以第 1 项热库平均光子数不是 N 而是 $N+1$ ；第 2 项则相反。第 3、4 两项不厄米，只是互为厄米。于是表面上看 (6.48) 式并不是所说的标准形式，需要通过适当的量子变换转化为所要的标准形式，以便暴露方程中隐含的超算符 *Lie* 代数结构。通常采用平移变换来消除含 M, M^* 项。压缩算符

$S(\varsigma) = \exp\left\{\frac{1}{2}(\varsigma^*a^2 - \varsigma(a^+)^2)\right\}$ 进行的变换为

$$a' \equiv S^+(\varsigma)aS(\varsigma), \quad \rho' \equiv S^+(\varsigma)\rho S(\varsigma) \quad (6.49)$$

这里 ς 为不含时的待定参数。关于 $S(\varsigma)$ 的变换作用，简单计算可知

$$\begin{cases} a' = ch(|\varsigma|)a - \frac{\varsigma}{|\varsigma|}sh(|\varsigma|)a^+ \\ a'^+ = ch(|\varsigma|)a^+ - \frac{\varsigma^*}{|\varsigma|}sh(|\varsigma|)a \end{cases} \quad (6.50)$$

将变换 (6.49) 代入 (6.48) 式并注意 (6.50)，再定义超算符映射：

$$\left\{ \begin{array}{l} K_-[\rho'] \equiv a^+\rho'a \\ K_+[\rho'] \equiv a\rho'a^+ \\ K_0[\rho'] \equiv -\frac{1}{2}(a^+a\rho' + \rho'a^+a + \rho') \end{array} \right. \quad (6.51)$$

利用 (6.51) 式，将 (6.48) 式简单整理即得

$$\dot{\rho}'(t) = \left[\alpha K_+ + \beta K_- + (\alpha + \beta) K_0 + \frac{r}{2} \right] [\rho'(t)] \quad (6.52)$$

其中系数为

$$\begin{cases} \alpha = rNch(2|\zeta|) + rch^2(|\zeta|) - \frac{r}{2|\zeta|} sh(2|\zeta|)(M\zeta^* + M^*\zeta) \\ \beta = rNch(2|\zeta|) + rsh^2(|\zeta|) - \frac{r}{2|\zeta|} sh(2|\zeta|)(M\zeta^* + M^*\zeta) \end{cases} \quad (6.53a)$$

让其中 ζ 由下式决定

$$\frac{|\zeta|}{\zeta} Mcth(|\zeta|) + \frac{|\zeta|}{\zeta} M^*th(|\zeta|) = 2N + 1 \quad (6.53b)$$

利用玻色对易关系可以证明：三个超算符满足 $SU(1,1)$ 对易关系，
即有

$$\begin{cases} [K_-, K_+][\rho'] = 2K_0[\rho'] \\ [K_0, K_{\pm}][\rho'] = \pm K_0[\rho'] \end{cases} \quad (6.54)$$

这些对易子可以用计算直接验证：

$$\begin{aligned} (K_- K_+ - K_+ K_-)[\rho'] &= K_- [a\rho'a^+] - K_+ [a^+\rho'a] = a^+a\rho'a^+a - aa^+\rho'aa^+ \\ &= -a^+a\rho' - \rho'aa^+ - \rho' \equiv 2K_0[\rho'] \\ (K_0 K_+ - K_+ K_0)[\rho'] &= K_0 [a\rho'a^+] - K_+ \left[\frac{-1}{2} (a^+a\rho' + \rho'aa^+ + \rho') \right] \\ &= \frac{-1}{2} (a^+aa\rho'a^+ + a\rho'a^+a^+a + a\rho'a^+) + \frac{1}{2} (aa^+a\rho'a^+ + a\rho'a^+aa^+ + a\rho'a^+) \\ &= a\rho'a^+ \equiv K_+[\rho'] \\ (K_0 K_- - K_- K_0)[\rho'] &= K_0 [a^+\rho'a] - K_- \left[\frac{-1}{2} (a^+a\rho' + \rho'a^+a + \rho') \right] \\ &= \frac{-1}{2} (a^+aa^+\rho'a + a^+\rho'aa^+a + a^+\rho'a) + \frac{1}{2} (a^+a^+a\rho'a + a^+\rho'a^+aa + a^+\rho'a) \rho' \\ &= -a^+\rho'a \equiv -K_-[\rho'] \end{aligned}$$

由此直接写出 (6.52) 式两种形式的解。比如，降序乘积解为

$$\rho'(t) = e^{rt/2} \exp(y_- K_-) \exp(K_0 \ln y_0) \exp(y_+ K_+) [\rho'(0)] \quad (6.55a)$$

并有分解系数

$$y_- = \frac{\beta(e^{-rt} - 1)}{\beta e^{-rt} - \alpha}, \quad y_+ = \frac{\alpha(e^{-rt} - 1)}{\beta e^{-rt} - \alpha}, \quad y_0 = \left(\frac{(\alpha e^{rt/2} - \beta e^{-rt/2})}{r} \right)^2 \quad (6.55b)$$

最后求得解为

$$\begin{aligned} \rho(t) &= S(\zeta) \rho'(t) S^+(\zeta) \\ &= e^{rt/2} S(\zeta) \exp(y_- K_-) \exp(K_0 \ln y_0) \exp(y_+ K_+) [S^+(\zeta) \rho(0)] \end{aligned} \quad (6.56)$$

至此，再取定初态，即可将此计算进行到底。【6】中不失一般性的取了初态为压缩相干态，继续完成了计算。此处不再叙述。

ii, 带驱动项的阻尼振子【6、18】

设线性驱动项为 $H_D = \varepsilon(t)a^+ + \varepsilon^*(t)a$ ，主方程为

$$\begin{aligned} \dot{\rho}(t) &= -i[H_D, \rho] + \frac{r}{2}(N+1)(2a\rho a^+ - a^+a\rho - \rho a^+a) \\ &\quad + \frac{r}{2}N(2a^+\rho a - aa^+\rho - \rho aa^+) \\ &\quad + \frac{r}{2}M\left(2a^+\rho a^+ - (a^+)^2\rho - \rho(a^+)^2\right) \\ &\quad + \frac{r}{2}M^*\left(2a\rho a - (a)^2\rho - \rho(a)^2\right) \end{aligned} \quad (6.57)$$

为消去线性项，从而将其化为标准形式，预先作简单平移变换

$$\rho'(t) = D^+(\alpha)\rho(t)D(\alpha), \quad D(\alpha) = \exp[\alpha(t)a^+ - \alpha^*(t)a] \quad (6.58)$$

其中 $\alpha(t)$ 为待定参数。在此变换下，主方程成为

$$\begin{aligned}
\dot{\rho}' = & \left(-i\varepsilon - \frac{r}{2}\alpha - \dot{\alpha} \right) (a^+ \rho' - \rho' a) - \left(-i\varepsilon - \frac{r}{2}\alpha - \dot{\alpha} \right)^* (a \rho' - \rho' a^+) \\
& + \frac{r}{2} (N+1) (2a \rho' a^+ - a^+ a \rho' - \rho' a^+ a) \\
& + \frac{r}{2} N (2a^+ \rho' a - a a^+ \rho' - \rho' a a^+) \\
& + \frac{r}{2} M \left(2a^+ \rho' a^+ - (a^+)^2 \rho' - \rho' (a^+)^2 \right) \\
& + \frac{r}{2} M^* \left(2a \rho' a - (a)^2 \rho' - \rho' (a)^2 \right)
\end{aligned}$$

现在，选择函数 $\alpha(t)$ 满足

$$\dot{\alpha}(t) + \frac{r}{2}\alpha(t) + i\varepsilon = 0 \quad (6.59)$$

则上面方程变为

$$\begin{aligned}
\dot{\rho}' = & \frac{r}{2} (N+1) (2a \rho' a^+ - a^+ a \rho' - \rho' a^+ a) + \frac{r}{2} N (2a^+ \rho' a - a a^+ \rho' - \rho' a a^+) \\
& + \frac{r}{2} M \left(2a^+ \rho' a^+ - (a^+)^2 \rho' - \rho' (a^+)^2 \right) + \frac{r}{2} M^* \left(2a \rho' a - (a)^2 \rho' - \rho' (a)^2 \right)
\end{aligned} \quad (6.60)$$

接着按上题所说的求解程序，不难将计算进行下去。最后即得最一般阻尼谐振子的解。

iii, 热库中两能级原子体系

此时，相互作用图象中的主方程为

$$\begin{aligned}
\dot{\rho}(t) = & \frac{r}{2} (N+1) (2\sigma_- \rho \sigma_+ - \sigma_+ \sigma_- \rho - \rho \sigma_+ \sigma_-) \\
& + \frac{r}{2} N (2\sigma_+ \rho \sigma_- - \sigma_- \sigma_+ \rho - \rho \sigma_- \sigma_+)
\end{aligned} \quad (6.61)$$

为解此主方程，定义下面超算符映射

$$K_-[\rho] \equiv \sigma_- \rho \sigma_+, \quad K_+[\rho] \equiv \sigma_+ \rho \sigma_-, \quad K_0[\rho] \equiv \frac{1}{2} (\sigma_+ \sigma_- \rho + \rho \sigma_+ \sigma_- - \rho) \quad (6.62)$$

可以证明，它们满足 $SU(2)$ 对易关系，

$$\begin{cases} [K_-, K_+][\rho] = -2K_0[\rho] \\ [K_0, K_{\pm}][\rho] = \pm K_{\pm}[\rho] \end{cases} \quad (6.63)$$

于是，利用这些超算符可以将方程（6.61）表示成如下形式，

$$\dot{\rho}(t) = \left\{ \beta K_+ + \alpha K_- + (\beta - \alpha) K_0 - \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \right\} [\rho(t)] \quad (6.64)$$

$$\alpha = r(N+1), \quad \beta = rN$$

所以可得此主方程密度算符的升序乘积和降序乘积两种解

$$\begin{cases} \rho(t) = \exp\left(-\frac{1}{2}(\alpha + \beta)t\right) \exp(x_+ K_+) \exp(K_0 \ln x_0) \exp(x_- K_-) [\rho(0)] \\ \rho(t) = \exp\left(-\frac{1}{2}(\alpha + \beta)t\right) \exp(y_- K_-) \exp(K_0 \ln y_0) \exp(y_+ K_+) [\rho(0)] \end{cases} \quad (6.65)$$

其中系数为

$$\begin{aligned} x_0 &= \left(\frac{\alpha e^{(\alpha+\beta)t/2} + \beta e^{-(\alpha+\beta)t/2}}{\alpha + \beta} \right)^{-2}; \quad x_+ = \frac{\beta(e^{(\alpha+\beta)t} - 1)}{\alpha e^{(\alpha+\beta)t} + \beta}; \quad x_- = \frac{\alpha(e^{(\alpha+\beta)t} - 1)}{\alpha e^{(\alpha+\beta)t} + \beta} \\ y_0 &= \left(\frac{\beta e^{(\alpha+\beta)t/2} + \alpha e^{-(\alpha+\beta)t/2}}{\alpha + \beta} \right)^2; \quad y_+ = \frac{\beta(e^{(\alpha+\beta)t} - 1)}{\beta e^{(\alpha+\beta)t} + \alpha}; \quad y_- = \frac{\alpha(e^{(\alpha+\beta)t} - 1)}{\beta e^{(\alpha+\beta)t} + \alpha} \end{aligned} \quad (6.66)$$

iv, 场与原子在热库中的主方程问题

这里，开放体系是指辐射场与原子， ρ 为辐射场与原子的密度算符。这时主方程为

$$\dot{\rho}(t) = \frac{r}{2}(2\sigma_- \rho \sigma_+ - \sigma_+ \sigma_- \rho - \rho \sigma_+ \sigma_-) + \frac{k}{2}(2a \rho a^\dagger - a^\dagger a \rho - \rho a^\dagger a) \quad (6.67)$$

定义如下超算符

$$\begin{aligned} K_-[\rho] &\equiv a^\dagger \rho a, \quad K_+[\rho] \equiv a \rho a^\dagger, \quad K_0[\rho] \equiv -\frac{1}{2}(a^\dagger a \rho + \rho a^\dagger a + \rho) \\ J_-[\rho] &\equiv \sigma_- \rho \sigma_+, \quad J_+[\rho] \equiv \sigma_+ \rho \sigma_-, \quad J_0[\rho] \equiv \frac{1}{2}(\sigma_+ \sigma_- \rho + \rho \sigma_+ \sigma_- - \rho) \end{aligned} \quad (6.68)$$

可以检验, $\{K_{\pm}, K_0\}, \{J_{\pm}, J_0\}$ 分别满足 $SU(1,1)$ 和 $SU(2)$ 对易关系, 并且 $\{K_{\pm}, K_0\}$ 和 $\{J_{\pm}, J_0\}$ 相互对易。所以主方程的解可写为

$$\rho(t) = \exp\left(\frac{(k-r)t}{2}\right) \exp[(J_- - J_0)rt] \exp[(K_+ + K_0)kt] [\rho(0)] \quad (6.69)$$

然后再按上面分解办法对 (6.69) 式进行分解, 便得到初值的解析解。

v, 减小或放大的非线性谐振子问题【5、18】

这时体系 *Hamiltonian* 为 $H = \chi(a^+a)^2$ 。各自只有一个 *Lindblad* 算符, 分别为 $L = a$ 和 $L = a^+$ 。两个主方程分别为

$$\begin{cases} \dot{\rho}(t) = -i\chi[(a^+a)^2, \rho] + \frac{r}{2}(N+1)(2a\rho a^+ - a^+a\rho - \rho a^+a) \\ \quad + \frac{r}{2}N(2a^+\rho a - aa^+\rho - \rho aa^+) \\ \dot{\rho}(t) = -i\chi[(a^+a)^2, \rho] + \frac{r}{2}(N+1)(2a^+\rho a - aa^+\rho - \rho aa^+) \\ \quad + \frac{r}{2}N(2a\rho a^+ - a^+a\rho - \rho a^+a) \end{cases} \quad (6.70)$$

下面给出它们的解。为此定义如下超算符映射

$$\begin{cases} K_-[\rho] \equiv a^+\rho a, \quad K_+[\rho] \equiv a\rho a^+ \\ K_0[\rho] \equiv -\frac{1}{2}(a^+a\rho + \rho a^+a + \rho) \\ K_3[\rho] \equiv a^+a\rho - \rho a^+a \end{cases} \quad (6.71a)$$

容易检验它们满足以下对易关系

$$\begin{aligned} [K_-, K_+][\rho] &= 2K_0[\rho], \quad [K_0, K_{\pm}][\rho] = \pm K_{\pm}[\rho] \\ [K_3, K_{\pm}] &= [K_3, K_0] = 0 \end{aligned} \quad (6.71b)$$

于是方程 (6.70) 可改写为

$$\dot{\rho}(t) = \left(w_+ K_+ + w_- K_- + w_0 K_0 + i\chi K_3 + \frac{r}{2} \right) [\rho] \quad (6.72)$$

注意，这里系数 $w_0 = w_0(K_3)$ 是超算符 K_3 的函数。总共有

$$w_+ = r(N+1), \quad w_- = rN, \quad w_0 = 2rN + 2i\chi K_3 + 1 \quad (6.73)$$

虽然主方程 (6.72) 中的系数不是常数，但由于 K_3 与 $K_\pm, K_0$ 都对易，因此解可写为

$$\rho(t) = \exp\{(w_+ K_+ + w_- K_- + w_0 K_0)t\} \exp(i\chi K_3 t) [\rho(0)] \quad (6.74)$$

利用前面分解方法即得升序乘积和降序乘积两个等价解：

$$\begin{aligned} \rho(t) &= e^{rt/2+i\chi K_3 t} \exp[x_+(K_3, t) K_+] \exp[\ln x_0(K_3, t) K_0] \exp[x_-(K_3, t) K_-] [\rho(0)] \\ \rho(t) &= e^{rt/2+i\chi K_3 t} \exp[y_-(K_3, t) K_-] \exp[\ln y_0(K_3, t) K_0] \exp[y_+(K_3, t) K_+] [\rho(0)] \end{aligned} \quad (6.75)$$

系数为

$$\begin{aligned} x_\pm(K_3, t) &= \frac{2w_\pm sh\varphi}{2\varphi ch\varphi - w_0 sh\varphi}, \quad x_0(K_3, t) = \left(\frac{2\varphi}{2\varphi ch\varphi - w_0 sh\varphi} \right)^2 \\ y_\pm(K_3, t) &= \frac{2w_\pm sh\varphi}{2\varphi ch\varphi + w_0 sh\varphi}, \quad y_0(K_3, t) = \left(\frac{2\varphi}{2\varphi ch\varphi + w_0 sh\varphi} \right)^{-2} \\ \varphi(K_3, t) &= \left(\frac{1}{4} w_0^2 - w_+ w_- \right)^{1/2} t \end{aligned} \quad (6.76)$$

如设初态为相干态 $\rho(0) = |\alpha\rangle\langle\alpha|$ ，进一步计算表明这里的 *Lie* 代数方法仍具有很大的方便性。计算时只要注意到根据 (6.71a) 有

$$e^{f(K_3)} |\alpha\rangle\langle\alpha| = e^{f(0)} |\alpha\rangle\langle\alpha|$$

这里 $f(K_3)$ 是超算符 K_3 的任意函数。进一步详细计算可见【5】。

由本节的几个例算可知，所阐述的超算符 *Lie* 代数方法具有较大的普遍性。它的优点还在于能够给出初条件下解的解析表达式。于是，有了密度算符的解析表达式，就可以方便地研究量子态的非定域性动力学、纠缠特性、退相干过程等。

练习题

[6.1] 如果将一般的超算符 $S: \rho \rightarrow \rho'$ 用参数化来表示, 须用多少个实参数? 这里 ρ 是 N 维 *Hilbert* 空间中的一个密度矩阵。

(提示: 利用 S 的映射性质)。

[6.2] 定义 *Fock* 空间一个算符 $\hat{\Omega}: |n\rangle \rightarrow |n+1\rangle, n=0,1,2,\dots$ 。证明这是个等距算符, 满足 $\Omega^\dagger \Omega = I, \Omega \Omega^\dagger \neq I$ 。求出第二个表达式。

(提示: 利用算符 $\hat{\Omega}$ 的谱表示——并矢表示式)。

[6.3] 证明: 超算符为么正算符(或可逆算符)的充分必要条件是:

$$M_\mu M_\nu^\dagger = C_{\mu\nu} \text{ 是常数, 且 } \text{tr } C = 1$$

[6.4] 定义: 如果 H_A 上一个算符 Ω_A 没有负本征值, 就称其为正算符; 如果将它推广成任何张量积 $\Omega_A \otimes I_B$ 的形式, 也都不出现负本征值, 就称它是完全正的算符。这里 I_B 是某一任意 B 系统状态空间中的单位算符。证明: H_A 上的转置算符 $T_A: \rho_A \rightarrow \rho_A^T$ 是个正算符, 但不是一个完全正的算符。

(提示: 只需令 B 维数和 A 相同, 选纠缠态 $|\Phi\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N |i\rangle_A \otimes |i\rangle_B$, 将 $T_A \otimes I_B$ 作用在 $\rho_{AB} = |\Phi\rangle_{AB} \langle \Phi|$ 上。表明作用后的 $\rho'_{AB} = T_A \otimes I_B \rho_{AB}$ 是一个这样的算符, 以致 $N\rho'_{AB}$ 是将 A 态和 B 态交换的交换算符。它有正负两个本征值, 对应于交换为对称和反对称的两种态。所以 ρ'_{AB} 有负本征值。)

[6.5] 证明: *Kraus* 定理。

(提示: 利用上题纠缠态 $|\Phi\rangle_{AB}$ 以及所谓“亲属态”方法。即, 对

H_A 中任一态——称作亲属态 $|\varphi\rangle_A = \sum_i \alpha_i |i\rangle_A$ ，则 H_B 中对应有一个

“指标态” $|\varphi^*\rangle_B = \sum_i \alpha_i^* |i\rangle_B$ ，使得 $|\varphi\rangle_A = {}_B\langle\varphi^*|\Phi\rangle_{AB}$ 。再利用 $\$$ 的完全

正的性质，将 $\$ \otimes I_B$ 作用于 $\rho_{AB} = |\Phi\rangle_{AB}\langle\Phi|$ 上。）

[6.6] 为了再次具体地说明主方程方法和 *Kraus* 求和框架之间的关联，将下面两个主方程（(6.40b)和(6.44)式）

$$\frac{d\rho_I}{dt} = \Gamma \left\{ a\rho_I a^\dagger - \frac{1}{2} a^\dagger a \rho_I - \frac{1}{2} \rho_I a^\dagger a \right\}$$

$$\frac{d\rho_I}{dt} = \Gamma \left(a^\dagger a \rho_I a^\dagger a - \frac{1}{2} (a^\dagger a)^2 \rho_I - \frac{1}{2} \rho_I (a^\dagger a)^2 \right)$$

等效表示为 *Kraus* 求和的形式。即给出两个 *Kraus* 算符 $\{M_0, M_1\}$ 的 2×2 矩阵表示。

参考文献

【1】 *J.Preskill, 《Lecture Notes for Physics 229: Quantum Information and Computation》, CIT, Sept. 1998。*

【2】 *B.Schumacher, quant-ph/9604023, appendix。*

【3】 杨洁，《量子主方程及其求解的若干方法》，中国科学技术大学硕士学位论文，2003年5月。并参见其中所列文献。*Yang Jie, et al., Chin.Phys.Lett., 20, 796 (2003)。*

【4】 *L.M.Arevalo-Aguilar and H.Moya-Cessa, Quantum Semiclass. Opt., 10, 671 (1998)。*

【5】 逯怀新，《连续变量量子信息论的若干研究——量子变换理论的应用》，中国科技大学博士学位论文，2003年1月。

【6】 *H.X.Lu, J.Yang, Y.D.Zhang and Z.B.Chen, PRA, 67, 024101*

- (2003)。
- 【 7 】 *H.X.Lu, Z.B.Chen and Y.D.Zhang, Mod. Phys. Lett. B16, 595 (2002)。*
- 【 8 】 *W.Pauli, Probleme der Modernen Physik, Arnold Sommerfeld zum 60, Geburtsage gewidmet von seinen Schülern, volume 1, Hirzel Verlag,1928。*
- 【 9 】 *R. Zwanzig, Statistical Mechanics of Irreversibility, volume 3, Interscience, New York, 1961。*
- 【 10 】 *I. Prigogine, Non-Equilibrium Statistical Mechanics , Interscience, New York, 1962。*
- 【 11 】 *G.S.Agarwal, Progress in Optics, volume 11, North-Holland, Amsterdam, 1973。*
- 【 12 】 *W.H.Louisell, Quantum Statistical Properties of Radiation, 陈水, 于熙令译, 北京: 科学出版社, 1982。*
- 【 13 】 *A Quantum Information Science and Technology Roadmap, Part 1 : Quantum Computation, Section 6.9, § 6.3, LA-UR-04-1778, April 2, 2004。*
- 【 14 】 *M.A.Nielsen and I.L.Chuang, 《Quantum Computation and Quantum information》 , Cambridge University Press, 2000。*
- 【 15 】 *J.S.Bell, Speakable and unspeakable in quantum mechanics, Cambridge University Press, Cambridge,1987。*
- 【 16 】 *K. Hepp, Hev. Phys. Acta, Vol. 45, 237(1972)。*

- 【17】** 孙昌璞，衣学喜，周端陆，郁司夏，《量子退相干问题》，
收入《量子力学新进展》第一辑，北京大学出版社，2000 年。
- 【18】** 张永德，《量子信息物理原理》，北京：科学出版社，2012
年。第六章。