第七章 李群李代数初步

截至上一章结束，按北京大学物理学院研究生课程的教学规划，《群论 I》需要覆盖的内容已基本覆盖。在北京大学物理学院研究生课程的教学计划中，紧跟《群论 I》的课程是《群论 II》，它对应的是李群李代数。相关教学既要进行数学理论的讲解，又要针对此部分理论在物理学中应用进行详细的说明。这些，我们在本教材的第一版中是完全没有涉及的。教材的第一版于 2019 年 9 月出版。出版后，因为讲授的方式相对简单，得到了一些读者的认可。在读者的反馈中，不少人提到希望加入一些关于李群李代数的介绍。于是，在 2021 年底，笔者开始着手对教材进行第二版修订，并特意增加本章。

在物理学的学习过程中，帮助我们理解所学内容的物理内涵的一个利器是关于其发展史的介绍。本书序言中我们已经提到，像所有其它学科一样，群论的发展也有一个历史进程。本章，按这个习惯，我们先就群论课程中李群李代数这部分内容产生的历史背景进行一个简单的说明。基础，当然是有限群理论。它是 18 世纪末到 19 世纪中叶由 Joseph-Louis Lagrange（拉格朗日，1736-1813）、Paolo Ruffini（鲁菲尼，1765-1822）、Niels Henrik Abel（阿贝尔，1802-1829）、Évariste Galois（伽罗瓦，1811-1832）、Arthur Cayley（凯莱，1822-1895）等人在利用置换群理解一元高次方程的求解的过程中产生的。到了十九世纪末，Arthur Moritz Schönflies（熊夫利，1853-1928）、Evgraf Stepanovich Fedorov（费多罗夫，1853-1919）将其应用至晶体结构的描述并发展出点群、空间群的概念。点群、空间群的理论在二十世纪初由 Carl Hermann（赫尔曼，1898-1961）、Charles-Victor Mauguin（毛古因，1878-1958）进行了重新整理。同样，在十九世纪末、二十世纪初，

Ferdinand Georg Fröbenius（费罗贝尼乌斯，1849-1917）、William Burnside（伯恩赛德，1852-1927）、Issai Schur（舒尔，1875-1941）、Alfred Young（杨，1873-1940）等人也将有限群理论进行了进一步的完善与发展。其中，最重要的改进是群表示论得到完善。之后，在量子力学诞生。这些理论在量子力学的研究中得到了广泛地应用。前六章我们基本上对这些内容都进行了讲解。

除了这些有限群理论，从 19 世纪后半叶开始，还有一部分人在努力将有限群的理论推广至无限群。这时，非欧几何在 Johann Carl Friedrich Gauss（高斯，1777-1855）、Georg Friedrich Bernhard Riemann（黎曼，1826-1866）等人的推动下已成熟，拓扑学的一些基本概念也开始发展。二十世纪初，这部分理论在物理学的研究中也开始有所体现，比如 Hendrik Antoon Lorentz（洛伦兹，1853-1928）、Jules Henri Poincare（庞加莱，1854-1912）、Amalie Emmy Noether（诺特，1882-1935）的工作。在这个时期，David Hilbert（希尔伯特，1862-1943）将希尔伯特空间概念的引入线性代数使其从早期求解线性方程组的工具成为一个更系统、适用性更广的数学理论[1]，它在物理学的研究中也开始发挥作用（线性代数在量子力学中的应用就是一个典型的例子）。与之有关联的是在我们群论学科的发展方面上世纪 20 年代群表示论的成熟标志着有限群理论彻底成型（上段提到过）。而李群李代数理论的发展也是大致同期在这个历史背景下发生的。其中，Hermann Klaus Hugo Weyl（1885-1955）等人开创性地引入规范的概念，为物理学的发展打

[1]以希尔伯特命名的数学概念很多。据说有一次希尔伯特不得已问自己的同事什么是希尔伯特空间？他年轻时深受 Felix Klein（克莱因，1849-1925）赏识，被认为是哥廷根数学学派最合适的接班人。他也没有辜负这种期待，与好友 Hermann Minkowski（闵可夫斯基，1864-1909）一道，延续了高斯、黎曼、克莱因等前辈的辉煌，带出了外尔、冯.诺伊曼、诺特、柯朗、魏格纳等后辈，并深深地影响了马克斯.玻恩等人。在将哥廷根大学地数学学派带到另一个高峰的同时，也对 20 世纪初的物理学革命做出了积极地贡献（广义相对论方面与爱因斯坦的讨论，以及通过玻恩及其学生们影响的量子论向量子力学的进化）。

开了大门 [2]。上世纪后半叶，此理论在物理学中得到广泛应用，李群李代数更是成为粒子物理研究中的必需。至此，《群论 I》、《群论 II》的课程内容基本成型，其在物理学院的群论课程中的地位也基本奠定。

因为专业背景的原因，非常系统地针对李群李代数部分的基础理论及其在粒子物理研究中的应用进行深入的讲解并不在笔者的能力范围内。本章撰写过程中的重点是将这些理论在历史上的发展进行一个简单的总结，专注于对多数读者而言比较容易吸收的内容，为学生继续选《群论 II》的课程进行一些铺垫。

在第二章，我们提到过达朗贝尔说的一句话：代数是慷慨的，她往往会比对她的要求给出的更多（Algebra is generous, she often gives more than is asked of her）。实际上，从《几何原本》开始，很多数学的分支都具备这样的特点。从一个或几个公设（postulate）、定义（definition）、公共观念（common notion）或者公理（axioms）出发，推出一系列命题（proposition），这些命题中正确的就是定理（theorem）。进而，构建一个理论体系。这个理论体系，可以成为包括物理学在内的很多自然科学分支以及工程应用的工具。读者在对群论这门近世代数的分支的学习过程中，应该也可以体会到这种感觉。前面我们学习过有限群，在此基础上，人们很自然会想到还存在无限群，同时关于它肯定也有一套理论与应用。这

[2] 实际上，在上世纪 20 年代群论一方面作为纯数学发展如火如荼，另一方面也与物理学中前沿的量子理论产生了最初的碰撞。作为大学教师，笔者在讲授这些课程的时候有时会进行猜测。做这些猜测，是感觉有些事情从自己看到的材料来讲应该是有联系的。把这些猜测讲给学生，并不是为了八卦，而是觉得学生以其目前的知识储备与阅历，或许不会想到这些。笔者作为老师给了学生这些分析（逻辑上合理的分析），是希望学生多掌握一些学科发展规律，而不是课本上固定的知识点。有了对这些规律的认识，以后自己在做关键的学术判断（比如方向选择）的时候，多一些参考。以这里的情况为例，笔者会联想到杨武之先生是 1928 年获芝加哥大学博士学位、1929 年入职清华大学数学系的。这些前沿的数学很可能通过杨武之先生在不久的将来影响到了少年时代的杨振宁先生，进而在后期深刻地影响了其学术生涯。在杨振宁先生总结的二十世纪的三个物理学关键词中（量子化、相位因子、对称性），与这个相关的就占了两个。

套关于无限群的理论，按理说会复杂很多。

在无限群中，存在两种情况：群元是可列的（也就是说群元与正整数集存在一一对应关系）、群元是连续的。前者虽然无限，但处理方式与有限群没有太多差异。与之形成鲜明对比的，是关于连续群的理论相比于有限群的理论要多很多新的内容。本节针对后者进行初步介绍。

连续群中，李群是研究地最为清楚的一类[3]。它是一种可以用实参数来表达的，具有流形性质的连续群。因为流形是建立在豪斯道夫（Hausdorff）空间这样一个具有分离性的拓扑空间上的[4]，李群的定义要求其有流形的性质，那很自然它一定也是一种拓扑群。豪斯道夫空间中，任意一个有界的闭子集又是紧致的。因此，紧致这个概念在我们下面的讨论中也会出现。同时，拓扑群的一个特征就是群运算是连续的。也就是说其群元在进行乘法操作与求逆操作时，相应的映射为连续映射[5]。在描述此连续映射的过程中，毫无疑问要基于开集、闭集、覆盖、极限等概念，讨论像同胚、连通、同伦、同构这样的拓扑学（按梁灿彬、周彬老师的描述就是“橡皮膜上的几何学”的性质）的概念。因此，拓扑、微分流形这两门学科中的一些基本概念，比如开集、闭集、拓扑空间、极限点、开覆盖、紧致、连续映射、拓扑映射，将首先作为基础来进入我们的课程，来支撑后续拓扑

[3]李群只是连续群的一部分，具有微分流形的特质。有些连续群也不是李群，比如：以数的加法为群元乘法的有理数的集合就是连续群但不是李群。它无法用微分的形式来进行分析。换句话说，李群是一种具有很好的数学结构的群，可用微分的方式进行分析。这里我们关于连续的定义是通过把群元作为映射，然后基于连续映射来定义的。这与一些数学上的定义或许不同。如果大家读到这个例子感觉有问题，请耐心把本章看完，然后体会我们的逻辑。

[4]豪斯道夫空间根据 Felix Hausdorff（1868-1942）命名，是可分离的连续的拓扑空间。最典型的豪斯道夫空间是欧氏空间，基于其可以定义微分。

[5]这种连续是拓扑意义上的连续，是基于连续映射定义的，离散群也可以具备这种性质，其具体意义我们后面会详细解释。

性质、流形性质、李群李代数性质的讨论的展开。领悟这些关系，需要读者针对这些概念反复阅读本章及相关教材的内容。

在开始本章正式内容前，我们再次就撰写的内容的信息来源进行一个强调，以表示对前辈老师们的尊重[6]。在本书第一版的前言部分，笔者曾强调过这个教材的内容大量参考了田光善老师的讲义、韩其智与孙洪洲老师的教材以及王宏利老师的讲义，是北京大学物理学院《群论 I》多年来教学积累的一个总结[7]。这些材料中，韩其智、孙洪洲老师的教材基本定义了我们教学的整体逻辑。在这次出版补充的本章内容中，我们也是基于这两位前辈合著的教材的第六章的基本内容与基本逻辑[6]，结合了北京师范大学物理系梁灿彬、周彬两位老师合著的《微分几何入门与广义相对论》的前两章的一些内容[25]、北京大学数学学院丘维声老师《群表示论》第六章的一些内容[26]、北京大学物理学院高崇寿老师的《群论及其在粒子物理中的应用》[27]、北京师范大学物理系周彬老师的线上课程《李代数理论及其在物理学中的应用》、北京大学物理学院刘玉鑫老师与王一男老师的李群李代数讲义来撰写的[8]。具体内容，分：曲面上的几何、拓扑空间、微分流形、李群、李代数共五节进行展开。

[6]这里提到的多数老师都是前辈。王一男老师例外，是北京大学物理学院最近引进的一位极其出色的年轻人。笔者从其讲义中也学到很多。

[7]实际上，这些也仅仅是笔者了解到的北京大学物理学院《群论》课程在最近这些年的教学情况。更早的一些尝试，对后期的教学也都是值得记录与强调的。比如，一个很偶然的机会，笔者从华盛顿大学钱纮老师那里了解到在上世纪 50 年代末，北京大学物理系的群论课程曾经由数学系的钱敏老师负责过一段时间。后来中科院理论物理所的苏肇冰老师（也是北京大学兼职教授）、北京大学物理系的高崇寿老师都是其班上的学生。钱敏老师担任物理系群论课程主讲教师这段历史在 2003 年北京大学物理学科 90 年纪念材料（未发行，内部材料）中有体现。

[8]两位老师各有其讲义，其中刘玉鑫老师的讲义近期将由北京大学出版社出版。

7.1 曲面上的几何

这里我们说的曲面上的几何，指的是非欧几何。由于我们的基础教育（甚至包含多数高等教育）并不包含非欧几何的内容，人们往往会觉得与之相关的一些名词（比如本章不可能绕过的拓扑空间与微分流形）非常的高深与抽象。为了将读者带入，我们从一些简单的关于空间的概念出发来展开讨论。

我们首先想说的是类似看起来复杂与高深的学术成就的诞生都是符合最直观、最简单的逻辑的。比如，我们都知道早期欧氏几何描述的是均匀的、可以无限扩展的三维空间的性质。而在古希腊的多数自然哲学体系中，人们认为地球是处在中心宇宙这个同心球体的中心的。比如，在亚里士多德的宇宙模型中，连续的、无限的直线运动是不被允许的，匀速圆周运动才是完美的[28]。这样，就不可避免地会带来一个逻辑上比较简单但非常值得思考的问题：当我们站到地面上的一点我们看到的是欧氏空间，但当我们把自己放在上帝视角去看这个同心球模型中的地球我们就会意识到地球上的某个人看到的欧氏空间是无法通过无限延展覆盖整个地球的球面的[9]。考虑到这一点，后来人们对欧氏几何提出质疑就不足为奇了。

此质疑过程中比较有代表性的是 1826 年俄罗斯数学家 Nikolai Ivanovich Lobachevsky（罗巴切夫斯基，1792-1856）在喀山的一个数学家会议中宣读的他的关于非欧几何的论文《几何学原理及平行线定理严格证明的摘要》。这里，他提

[9]虽然地球是个球形的直接验证一直要等到 16 世纪初麦哲伦的环球航行，但考虑到早期人们航海时首先看到船帆这个生活经验、月球是圆的这个观测、以及球形在古希腊哲学中占据的重要位置，我们可以想象在很早的时候人们就有了地球是个球形这样一种认识。在很多古希腊的宇宙模型中，这点也都可以得到体现。

出如果将欧氏几何中的第五条公设去除[10]，基于前面的几条公设还是可以构建一个几何体系。但遗憾的是此理论在当时并没有被人们接受。1853 年，哥廷根大学数学系教授高斯建议他的学生黎曼在其教授资格考试（Habilitation）中以非欧几何为题目完成资格考试论文。基于此建议，黎曼将此论文题目定为《On the hypotheses which underlie geometry》[11]。此后，非欧几何正式在主流学界被广泛接受。

黎曼的主要研究对象是椭球球面，在这个过程中，他引入了流形（英文是 manifold，意思是多褶皱，江泽涵先生按“天地有正气，杂然赋流形”进行翻译，信达雅兼顾）的概念，来描述类似基于曲面的几何。在描述这个曲面的几何时，平行线公设是不需要的。就像图 7.1 中的地球，如果我们画一个很大的三角形，则在局域的视角我们认为相互平行的两条经线，在全局视角看来是可以相交的。图中这个三角形的内角和也不是 180 度。黎曼几何很好地利用了欧氏空间的性质，把复杂的曲面分成很多封闭的区域的集合。类似封闭的区域的集合称为图卡（Atlas，有时也翻译为坐标图卡、图集、图汇）[12]。每个区域对应的局部空间（开集），与欧氏空间这种完全没有扭曲的空间的开集在结构上对应[13]。因此，可以

[10]欧氏几何是一个由五条公设（postulates）、五条公理（common notions）出发建立的几何体系。

[11]对德国学者，在其学术生涯中正常情况下是要完成两个论文的。一个是其博士学位论文，一个是其教授资格考试论文。

[12]这里要感谢北京大学数学学院的周珍楠教授。之前笔者一直找不到合适的翻译，他给了一个很全面的回答。

[13]这种对应被称为 mapping。其词根，与大地测量中的 map 是相关的。按周彬老师线上课程的讲述，在 19 世纪上半叶，高斯因为接到一个画地图的任务，便开始对这方面的问题进行思考了。笔者认同此说法，因此这里写下来供读者参考。

用欧氏空间中的微分工具来描述其结构。而相邻的区域，有重叠部分。在这些重叠的部分，又可以通过微分性质的连续性，保证完美地拼接起来。这种拼接允许空间扭曲，而类似空间的扭曲会带来与欧氏几何完全不一样的性质。

后来，大家都知道这套基于数学家对空间概念的探索而引入的数学语言诞生半个世纪后，在爱因斯坦发展的广义相对论中发挥了至关重要的作用[14]。这个背后，实际上就是上一段提到的本质上很简单的图像。同时，我们也要指出本章要讲的很多看似高深、看似复杂的概念，都与这个简单的图像相关。本着这个思路，下面我们先从拓扑空间的概念出发引入一套基本语言来描述空间的拓扑性。之后，作为拓扑空间中一个可以利用微分方程来分析的例子，我们引入微分流形，进而为后面引入李群的概念奠定接触。

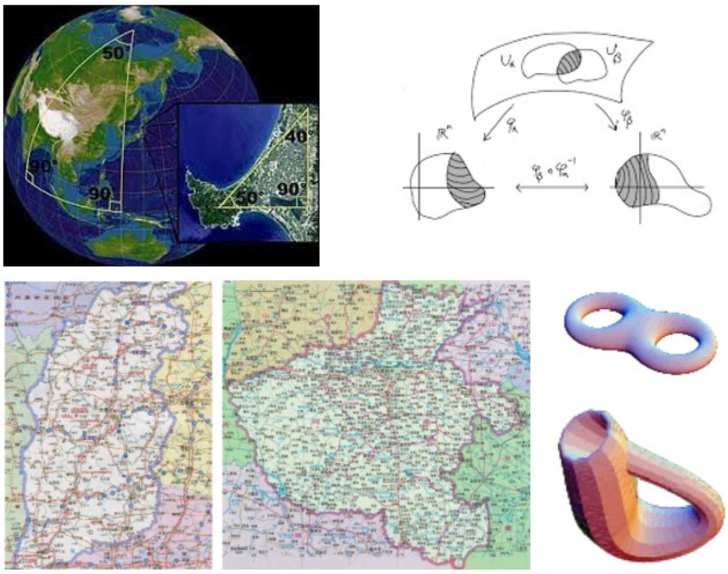

图 7.1 非欧几何中的一些概念。左上角是地球，很显然，其表面是一个球面。在地球表面画一个无限大的三角形，内角和显然并不为零。为了描述其表面，需要通过相互交叠的开集（右上）引入图卡（左下）的概念。这些都是非欧几何中的基本语言。它是描述右下曲面的理想工具。从这些图也可以看出，拓扑的概念与非欧几何也密切相关。右下角的瓶子被称为克莱因瓶。

[14]广义相对论中的关键点就是时空扭曲。这也就不难理解为什么我们说他去哥廷根大学讲完报告后，看到希尔伯特所提的问题为何那么地紧张了。现在，我们描述宇宙的结构是有限无边，也是基于类似的几何图像。

7.2 拓扑空间

拓扑学研究的是几何图形或空间在连续改变形状后还能保持不变的性质。其中，最关键的是物体间的位置关系而非它们的具体形状与大小。因此，引用梁灿彬、周彬老师教材中的原话：拓扑又被通俗地称为“橡皮膜上的几何学”。在拓扑学中，重要的性质包括空间的连续性、紧致性、连通性。而李群，是一个既有群的结构，又有微分流形结构（因此自然地也会有拓扑结构）的群，是目前在物理学中具有最重要的应用的连续群。

为了让读者在学习具体概念的过程中时刻能够进行定位，我们先此节的关键几点内容列出：

1） 拓扑空间、开集、邻域、闭集

2） 拓扑子空间（相对拓扑空间）、直积拓扑空间

3） 拓扑空间的连通性

4） 拓扑空间的紧致性

5） 豪斯道夫空间

6） 拓扑映射（也叫同胚映射），它能让拓扑性质（如开集、闭集、连通性、紧致性）保持不变

7） 道路、道路连通、道路同伦、基本群的概念，以及如何由它们来描述的拓扑空间的连通性（单连通、复连通）

具体讨论，先从拓扑空间与开集的定义开始依次进行。

定义 7.1 拓扑空间与开集：设X是一个集合，其元素 x、y、z 称为点，若能在X上规定一个子集组ϑ，它是一系列子集的集合，满足：

1. $X \in \vartheta$，$\emptyset \in \vartheta$；

2. **$\boldsymbol{\vartheta}$中有限个元素$\mathbf{O}_1$、$\mathbf{O}_2$、⋯、$\mathbf{O}_k$的交集属于$\boldsymbol{\vartheta}$；**

3. **$\boldsymbol{\vartheta}$中任意多个元素$\mathbf{O}_i$的并集属于$\boldsymbol{\vartheta}$；**

则集合$\mathbf{X}$与$\boldsymbol{\vartheta}$合在一起构成一个拓扑空间$(\mathbf{X},\boldsymbol{\vartheta})$。$\boldsymbol{\vartheta}$称为$\mathbf{X}$的一个拓扑，$\boldsymbol{\vartheta}$中的每个$\mathbf{O}_i$都是$\mathbf{X}$的开集。

此定义的给出的一个明确的信息，是拓扑空间是一个定义了子集组的集合。这个子集组，是由开集组成的。换句话说，基于一个集合$\mathbf{X}$，可以定义出不同的拓扑空间$(\mathbf{X},\boldsymbol{\vartheta}_1)$与$(\mathbf{X},\boldsymbol{\vartheta}_2)$。以$\mathbf{X}=\{a,b,c\}$为例，可以定义：

$$\boldsymbol{\vartheta}_1=\cup\,\mathbf{O}_i=\{\emptyset,\{a,b,c\}\}$$

这个$(\mathbf{X},\boldsymbol{\vartheta}_1)$是一个拓扑空间。类似以$\boldsymbol{\vartheta}=\{\emptyset,\mathbf{X}\}$的形式基于$\mathbf{X}$定义的拓扑空间，称为平庸的拓扑空间。对基于$\mathbf{X}$定义的拓扑空间来说，平庸的拓扑空间拥有的开集数最少。

同时，也可以定义：

$$\boldsymbol{\vartheta}_2=\cup\,\mathbf{O}_i=\{\emptyset,\{a\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,b,c\}\}$$

这些开集$\mathbf{O}_i$之间的交集属于$\boldsymbol{\vartheta}_2$，并集也属于$\boldsymbol{\vartheta}_2$。因此，这个$(\mathbf{X},\boldsymbol{\vartheta}_2)$也是拓扑空间。

除此之外，还可以定义：

$$\boldsymbol{\vartheta}_3=\cup\,\mathbf{O}_i=\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$$

$(\mathbf{X},\boldsymbol{\vartheta}_3)$也是拓扑空间。对$\mathbf{X}$而言，像$(\mathbf{X},\boldsymbol{\vartheta}_3)$这样的拓扑空间称为分立的拓扑空间，它包含的开集数目最多。

但如果取：

$$\boldsymbol{\vartheta}_4=\cup\,\mathbf{O}_i=\{\emptyset,\{a,b\},\{a,c\},\{a,b,c\}\}$$

则由于$\{a,b\}$与$\{a,c\}$的交集不属于$\boldsymbol{\vartheta}_4$，$(\mathbf{X},\boldsymbol{\vartheta}_4)$就不是拓扑空间。

基于开集、拓扑空间，我们可以定义邻域与闭集。

定义 7.2 邻域：上述定义的拓扑空间$(\mathbf{X},\boldsymbol{\vartheta})$，$\mathbf{O}_i$是一个开集。对$\mathbf{O}_i$中的任何一个元素，$\mathbf{O}_i$都是其邻域。

定义 7.3 闭集：上述定义的拓扑空间$(\mathbf{X},\boldsymbol{\vartheta})$，取$\mathbf{A}$为$\mathbf{X}$的一个子集。如果$\mathbf{X}$与$\mathbf{A}$的差集是开集，则$\mathbf{A}$是闭集。

对上面的讲到的分立拓扑空间$(\mathbf{X},\boldsymbol{\vartheta}_3)$，其中的任何一个开集都是其闭集。除了这些例子，欧氏空间以及欧氏空间中的曲面也可以构成拓扑空间。它们相对于一般的拓扑空间，还一些特殊的结构，比如连通、紧致等，后面会马上讲到。

基于拓扑空间，可引入拓扑子空间、拓扑空间的直积两个定义。

定义 7.4 相对拓扑：设$(\mathbf{X},\boldsymbol{\vartheta})$是一个拓扑空间，$\mathbf{A}$是$\mathbf{X}$上的一个子集，令：

$$\boldsymbol{\vartheta}_{\mathbf{A}}=\{\mathbf{O}\cap\mathbf{A}|\mathbf{O}\in\boldsymbol{\vartheta}\}$$

这时，$(\mathbf{A},\boldsymbol{\vartheta}_{\mathbf{A}})$也满足拓扑空间的定义，称为$(\mathbf{X},\boldsymbol{\vartheta})$的拓扑子空间或者相对拓扑空间。$\boldsymbol{\vartheta}_{\mathbf{A}}$称为$\boldsymbol{\vartheta}$在$\mathbf{A}$上的相对拓扑。

定义 7.5 直积拓扑空间：设$\big(\mathbf{X},\boldsymbol{\vartheta}(\mathbf{X})\big)$与$\big(\mathbf{Y},\boldsymbol{\vartheta}(\mathbf{Y})\big)$都是拓扑空间，$\mathbf{Z}=\mathbf{X}\otimes\mathbf{Y}$是$\mathbf{X}$与$\mathbf{Y}$的直积集合，令：

$$\boldsymbol{\vartheta}(\mathbf{Z})=\left\{\mathbf{O}=\underbrace{\cup}_{\mathbf{O}_1\in\widetilde{\mathbf{O}}_1、\mathbf{O}_2\in\widetilde{\mathbf{O}}_2}\mathbf{O}_1\otimes\mathbf{O}_2\middle|\widetilde{\mathbf{O}}_1\in\boldsymbol{\vartheta}(\mathbf{X})、\widetilde{\mathbf{O}}_2\in\boldsymbol{\vartheta}(\mathbf{Y})\right\}$$

则$\boldsymbol{\vartheta}(\mathbf{Z})$是$\mathbf{Z}$上的一个拓扑，$\big(\mathbf{Z},\boldsymbol{\vartheta}(\mathbf{Z})\big)$是个拓扑空间，称为$\big(\mathbf{X},\boldsymbol{\vartheta}(\mathbf{X})\big)$与$\big(\mathbf{Y},\boldsymbol{\vartheta}(\mathbf{Y})\big)$的直积拓扑空间。

这里的直积，就像第一章我们提到的有序对。很多文献中，也叫卡氏积。关于拓扑空间，有连通性这样一个性质。

定义 7.6 拓扑空间的连通性：设$(\mathbf{X},\boldsymbol{\vartheta})$是拓扑空间，若不存在两个不空的开集$\mathbf{O}_1$、$\mathbf{O}_2$使：

$$\mathbf{O}_1\cup\mathbf{O}_2=\mathbf{X}$$
$$\mathbf{O}_1\cap\mathbf{O}_2=\emptyset$$

则称$(\mathbf{X},\boldsymbol{\vartheta})$是连通的拓扑空间。反之，如果存在$\mathbf{O_1}$、$\mathbf{O_2}$满足上述性质，则称这个拓扑空间是不连通的。

比如，一个球的球面上所有的点形成的拓扑空间就是连通的，因为我们无法在其中找到两个开集（这里对应一个不带边界的区域），使其并集为整个球面而交集是空集。但是两个不接触的球，按上面的描述形成的拓扑空间，就是不连通的。因为可以取$\mathbf{O_1}$为一个球面上点的集合形成的开集，$\mathbf{O_2}$为另一个球面上点的集合形成的开集。它们显然具备并集等于整个拓扑空间但交集为空集的性质。

另一个例子可以取：

$$\mathbf{X} = \{a, b, c\}$$
$$\boldsymbol{\vartheta} = \big\{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\big\}$$

取$\mathbf{X}$的子集$\mathbf{A} = \{b, c\}$，以及$\boldsymbol{\vartheta}$在$\mathbf{A}$上的相对拓扑：

$$\boldsymbol{\vartheta}_{\mathbf{A}} = \big\{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}\big\}$$

$(\mathbf{A}, \boldsymbol{\vartheta}_{\mathbf{A}})$是$(\mathbf{X}, \boldsymbol{\vartheta})$的拓扑子空间。这时，$(\mathbf{X}, \boldsymbol{\vartheta})$是连通的，$(\mathbf{A}, \boldsymbol{\vartheta}_{\mathbf{A}})$是不连通的。因此，连通的拓扑空间的子空间不一定是连通的。

我们经常接触的欧氏空间及其直积拓扑空间，都是连通的。

讨论完连通之后我们讨论紧致。它是基于极限、覆盖（开覆盖）、有限子覆盖进行定义的，首先我们说极限。

定义 7.7 极限点：设$\mathbf{A}$是拓扑空间$\mathbf{X}$的一个子集，$\boldsymbol{x}$是$\mathbf{X}$中的一个点。若对$\boldsymbol{x}$点的任何一个邻域$\mathbf{U}$，都有：

$$(\mathbf{U} - \boldsymbol{x}) \cap \mathbf{A} \neq \emptyset$$

则称$\boldsymbol{x}$是$\mathbf{A}$的极限点或聚点。

根据这个定义，我们知道极限点是可以被一个集合中的点任意逼近的点。其中，$\boldsymbol{x}$不一定属于$\mathbf{A}$。当$\boldsymbol{x}$不属于时$\mathbf{A}$，$\mathbf{A}$、$\mathbf{U}$、$\boldsymbol{x}$的相互关系如图 7.2 所示。$\boldsymbol{x}$处在

这个$\mathbf{A}$开集的边界上。$\mathbf{A}$和它所有的极限点形成的和集，称为$\mathbf{A}$的闭包，记为$\overline{\mathbf{A}}$。

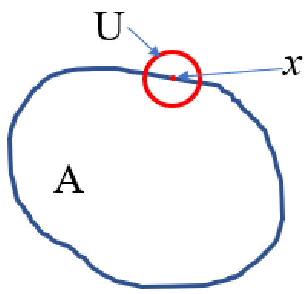

图 7.2 $\mathbf{A}$的极限点。对$\boldsymbol{x}$点的任何一个邻域$\mathbf{U}$，都有$(\mathbf{U}-\boldsymbol{x})\cap\mathbf{A}\neq\emptyset$。根据定义，极限点既包含边界内部的点，也包含边界上的点。只要能被这个集合中的点任意逼近，都可以。

定义 7.8 开覆盖：拓扑空间X有一个开集的集合$\{\boldsymbol{O}_\alpha\}$。若对$\mathrm{A}\subset\mathrm{X}$，有$\mathrm{A}\subset\cup_\alpha\boldsymbol{O}_\alpha$，则称$\{\boldsymbol{O}_\alpha\}$覆盖了A，或称$\{\boldsymbol{O}_\alpha\}$是A的一个开覆盖 [15]。

定义 7.9 设$\{\boldsymbol{O}_\alpha\}$是A的一个开覆盖。若$\{\boldsymbol{O}_\alpha\}$中的有限个元素(这里的元素是集合)构成的子集$\{\boldsymbol{O}_1,\boldsymbol{O}_2,\cdots\boldsymbol{O}_m\}$也覆盖A，则称$\{\boldsymbol{O}_\alpha\}$对A具有有限子覆盖。

基于开覆盖与有限子覆盖，可以定义紧致。

定义 7.10 紧致：如果对于拓扑空间中的某子集A的任意开覆盖，都有有限的子覆盖，则称A是紧致的。

举个例子，一维欧氏空间中的任何一个开区间或者半开区间，都不是紧致的，但闭区间是紧致的。其原因，就是对$(a,b]$，只要找到它的一个开覆盖，不具备有限子覆盖，就可以证明它不是紧致的。而这个开覆盖是存在的，比如：$\left\{\left(a+\frac{1}{2},b+\frac{1}{2}\right),\left(a+\frac{1}{2^2},b+\frac{1}{2^2}\right),\cdots,\left(a+\frac{1}{2^n},b+\frac{1}{2^n}\right),\cdots\right\}$。这是一个开集的集合。这个开集的集合覆盖了$(a,b]$，因此是开覆盖。但是它没有一个有限的开集元素的集合，来覆盖$(a,b]$。因此，这个半开区间不是紧致的。一维欧氏空间的全开区间（或者高维欧氏空间中的开区域或半开区域）也不具备紧致的特性。但是当此区域变成闭区

[15] 字面意思，开集的集合形成的覆盖。

域的时候，区域中的任意一点的极限点都属于这个区域，相应的此区域也紧致。

这里讨论这些概念，是因为我们后面讲李群的时候会说明，它是具有微分流形的结构的。既然是微分结构，它的一个基本特征就是具有从非欧空间向欧氏空间的微分同胚映射（具体定义后面解释）。具有微分结构是其固有性质，我们也是要基于微分结构来分析非欧空间与相关映射的。在定义微分结构的时候，空间的紧致性就很重要了。

庆幸的是，微分流形的概念是建立在豪斯道夫（Hausdorff）空间上的。在豪斯道夫空间中，紧致与闭子集之间是可以划等号的。它们往欧氏空间的映射也可以是微分同胚的。因此，从逻辑上，我们先把极限、紧致这些概念讲完之后，下面要讲的就是豪斯道夫（Hausdorff）空间。

豪斯道夫空间的一个基本特性是空间内的领域是可以分离的，具体定义如下。

定义 7.11 豪斯道夫空间：拓扑空间$(\mathbf{X},\boldsymbol{\vartheta})$叫做豪斯道夫空间（或$\mathbf{T_2}$空间），如果对$\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbf{X}$，且$\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y}$，存在$\mathbf{O_1}$与$\mathbf{O_2}\in\boldsymbol{\vartheta}$，使得$\boldsymbol{x}\in\mathbf{O_1}$，$\boldsymbol{y}\in\mathbf{O_2}$，满足$\mathbf{O_1}\cap\mathbf{O_2}=\emptyset$。

我们常见的 n 维欧氏空间R^n就是豪斯道夫空间。豪斯道夫空间是一种特殊的拓扑空间，与n维欧氏空间具备紧密的联系。它描述的几何是非欧的。但是因为它与欧氏空间紧密的联系，人们总是可以在局部用欧氏几何的方法去描述它。不同的局部通过有交集的区域进行拼接，可构造出整个的非欧的空间。就像图 7.1 中，我们总是可以通过小块的开的曲面区域拼接出球面。而小块的开的曲面区域既有曲面的微分结构，又可以用小块的开的平面区域通过映射的方式来进行分析。

到这里，我们讨论的都是拓扑空间的性质。下面，我们开始讨论拓扑空间之间的映射。就像前面注脚中提到的，映射的词根是 map。提出时，它应该有个基

本的意思是从非欧空间往欧氏空间做对应。映射有三要素：定义域、值域、映射规则。李群是一个连续群，其中元素做的事情，是将一个拓扑空间映射到另一个与之具有相同拓扑结构的拓扑空间。而这个映射本身，需要是连续的。因此，关于映射的讨论也从连续性开始。

定义 7.12 映射连续：设$\left(\mathbf{X}, \vartheta(\mathbf{X})\right)$、$\left(\mathbf{Y}, \vartheta(\mathbf{Y})\right)$是拓扑空间，如果映射$\mathbf{f}: \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$满足条件：对$\forall x \in \mathbf{X}$，若对$f(x)$的任意一个邻域$\mathbf{V}_{\mathbf{f}(x)} \subset \mathbf{Y}$，都存在$x$的一个邻域$\mathbf{U}_x$，使得$f(\mathbf{U}_x) \subset \mathbf{V}_{\mathbf{f}(x)}$。这时，称映射$f$在$x$连续。

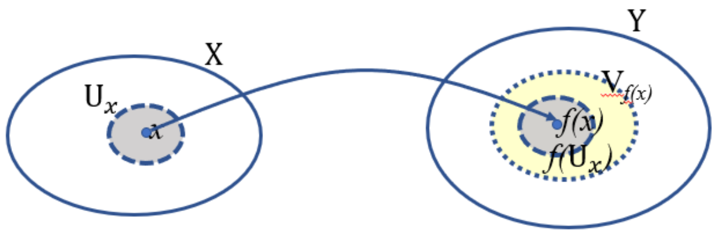

图 7.3 连续映射示意图。

此关系可以具体表述为图 7.3。当映射f在$\mathbf{X}$中任意一点都连续的时候，称f是一个连续映射。连续映射的一个好处是它可以让人们在拓扑空间之间建立联系。基于它，人们可以定义同胚映射（也称拓扑映射）。在定义同胚映射之前，我们可以先熟悉一下连续映射的几个性质。

定理 7.1 设$\left(\mathbf{X}, \vartheta(\mathbf{X})\right)$、$\left(\mathbf{Y}, \vartheta(\mathbf{Y})\right)$是拓扑空间，$f: \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$是它们之间的映射。下面四个条件是等价的：

1. **f是连续映射；**
2. **$\mathbf{Y}$中的每个开集在f下的逆像是$\mathbf{X}$中的开集；**
3. **$\mathbf{Y}$中的每个闭集在f下的逆像是$\mathbf{X}$中的闭集；**
4. **对$\forall \mathbf{A} \subset \mathbf{X}$，有：对$f(\bar{\mathbf{A}}) \subset \overline{f(\mathbf{A})}$。**

这些性质的一个共性，是$f: \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$是连续映射与由$\mathbf{Y}$中某集合性质推出的其

在$\boldsymbol{f}$下的逆像下的$\mathbf{X}$中某集合性质的等价性。如果要求这个映射是一一满映射，且其逆映射也是连续映射，则这个映射就可以保持两个拓扑空间所有的拓扑性质不变了。这时，我们称其为同胚映射（拓扑映射），具体定义如下。

定义 7.13 拓扑映射：设$\left(\mathbf{X}, \boldsymbol{\vartheta}(\mathbf{X})\right)$、$\left(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\vartheta}(\mathbf{Y})\right)$是拓扑空间，如果映射$\boldsymbol{f}: \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$是一一对应的满映射，它是连续映射。除此之外，其逆映射也连续。这时，称$\boldsymbol{f}$是$\left(\mathbf{X}, \boldsymbol{\vartheta}(\mathbf{X})\right)$与$\left(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\vartheta}(\mathbf{Y})\right)$这两个拓扑空间的同胚映射，也称拓扑映射。

结合定理 7.1，我们知道同胚映射下两个拓扑空间的点、开集、闭集都具备一一对应关系。其连通性、紧致性也都会一致。因此，拓扑映射联系起来的是两个拓扑结构完全相同的拓扑空间。它使得“橡皮膜上的几何学”能够存在。

现在讲完了拓扑空间的性质，讲完了拓扑空间的映射。在前面讲拓扑空间的性质的时候，我们讲到了连通性。对连通性更为严格的描述，需要借助于连续映射，并在此基础上引入道路、道路连通、道路同伦、基本群等概念，进而区分单连通与复连通。基于这个逻辑，本节的最后一部分内容讨论这些概念（道路、道路连通、道路同伦、基本群）。道路连通的基础是道路这个概念。因此，我们从道路说起。

定义 7.14 道路：设$\left(\mathbf{X}, \boldsymbol{\vartheta}(\mathbf{X})\right)$是拓扑空间，$\mathbf{I}$是一维欧氏空间（$\mathbf{R}^{\mathbf{1}}$，也就是实数轴）上的区间$[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$。也就是说$\mathbf{I} = \left\{\boldsymbol{t} | \boldsymbol{t} \in \mathbf{R}^{\mathbf{1}}, 且\mathbf{0} \le \boldsymbol{t} \le \mathbf{1}\right\}$。如果连续映射$\boldsymbol{\alpha}: \mathbf{I} \to \mathbf{X}$满足$\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{0}) = \boldsymbol{x}_{\mathbf{0}}$、$\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{1}) = \boldsymbol{x}_{\mathbf{1}}$，其中$\boldsymbol{x}_{\mathbf{0}}$、$\boldsymbol{x}_{\mathbf{1}} \in \mathbf{X}$，则称$\boldsymbol{\alpha}$是从$\boldsymbol{x}_{\mathbf{0}}$到$\boldsymbol{x}_{\mathbf{1}}$的一条道路。

这个定义已经用到了前面讲的连续映射。同时，也需要指出：**这个道路指的是连续映射$\boldsymbol{\alpha}$，而不是$\{\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{t})\}$这些$\mathbf{X}$中的点（如图 7.4 所示）**。点相同，映射不相同，也是不同的道路。

由于道路的存在，我们可以把拓扑空间中的两个点进行一个无缝的连接。它

是我们最为常见也是在数学上最好处理的欧氏空间与更为广义的拓扑空间的之间的一个纽带。基于这种连接，可定义道路连通。这个道路连通，对于描述更为广义的拓扑空间的连通性至关重要。

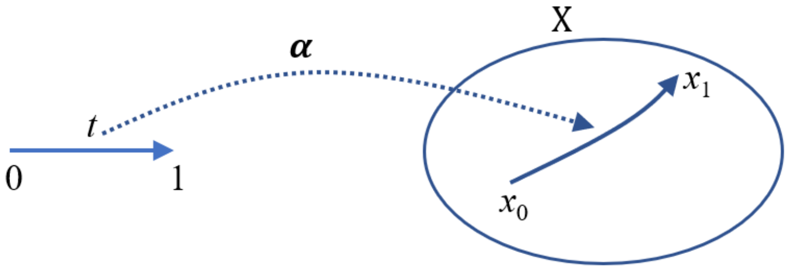

图 7.4 道路示意图。

定义 7.15 道路连通：设$(\mathbf{X},\vartheta(\mathbf{X}))$是拓扑空间，如果其中任意两点$x_0$、$x_1$都存在道路，则称这个拓扑空间是道路连通（弧连通）的。

这里讲的道路连通比前面讲的连通要严格。前面的连通可以存在于不连续的拓扑空间。这里的道路连通对应的拓扑空间必须是连续的。它指的是通过一维欧氏空间中的属于区间$\mathbf{I}=\left\{\boldsymbol{t}|\boldsymbol{t}\in\mathbf{R}^1,\text{且}\mathbf{0}\leq\boldsymbol{t}\leq\mathbf{1}\right\}$中的实数$\boldsymbol{t}$，将拓扑空间$\mathbf{X}$中的点$\boldsymbol{x_0}$连续的变为$\boldsymbol{x_1}$的映射。这里$\boldsymbol{t}$是连续的，因此它对应的拓扑空间$\mathbf{X}$也是连续的。

如果一个拓扑空间是道路连通的，则它一定是连通的。反之，如果一个拓扑空间是连通的，它不一定道路连通。因为它或许无法与一维欧氏空间中的属于区间$\mathbf{I}=\left\{\boldsymbol{t}|\boldsymbol{t}\in\mathbf{R}^1,\text{且}\mathbf{0}\leq\boldsymbol{t}\leq\mathbf{1}\right\}$中的连续变化的实数$\boldsymbol{t}$存在一一对应关系。这里，我们根据韩其智、孙洪洲老师《群论》教材中的习惯[16]，按定理的形式把这个关键点列出来。

定理 7.2 若拓扑空间$(\mathbf{X},\vartheta(\mathbf{X}))$是道路连通的，则它是连通的。

前面，我们先是基于连续映射定义了拓扑映射（即同胚映射），它描述的是

[16] 与前面很多章节类似，本章在逻辑上也整体遵循韩其智、孙洪洲老师的《群论》教材。

两个拓扑空间之间全等的拓扑结构。基于连续映射，我们还定义了道路与道路连通。道路是从一维欧氏空间中的区间$\mathbf{I}=\left\{\boldsymbol{t}|\boldsymbol{t}\in\mathbf{R}^{\mathbf{1}},\text{且}\mathbf{0}\le\boldsymbol{t}\le\mathbf{1}\right\}$到拓扑空间$\mathbf{X}$中的两个点$\boldsymbol{x}_{\mathbf{0}}$、$\boldsymbol{x}_{\mathbf{1}}$之间的连线的映射。

下面要讲的两个概念是映射同伦与道路同伦。其中，映射同伦描述的是拓扑空间$\mathbf{X}$与$\mathbf{Y}$之间的可以通过某个参数从$\mathbf{0}$到$\mathbf{1}$的连续变化联系起来的两个连续映射之间的关系。这两个连续映射，如果可以通过此参数的连续变化联系起来，则$\mathbf{X}$与$\mathbf{Y}$之间的这两个连续映射是同伦的。

而道路同伦联系起来的，是一维欧氏空间中的区域$\mathbf{I}=\left\{\boldsymbol{t}|\boldsymbol{t}\in\mathbf{R}^{\mathbf{1}},\text{且}\mathbf{0}\le\boldsymbol{t}\le\mathbf{1}\right\}$与拓扑空间$\mathbf{X}$中两个元素之间的连线的映射（也就是道路）。也就是说映射同伦针对的映射关系，是从一个拓扑空间$\mathbf{X}$到另一个拓扑空间$\mathbf{Y}$的两个映射。而后者针对的映射关系，是从一维欧氏空间中的区域$\mathbf{I}=\left\{\boldsymbol{t}|\boldsymbol{t}\in\mathbf{R}^{\mathbf{1}},\text{且}\mathbf{0}\le\boldsymbol{t}\le\mathbf{1}\right\}$到拓扑空间$\mathbf{X}$中两个元素之间的连线。而后者针对的拓扑空间中两个点之间的“道路”，可用于描述拓扑空间的连通度。

这两个概念中，映射同伦相对好理解，我们从它的定义开始。

定义 7.16 映射同伦：设$\boldsymbol{f}_{\mathbf{0}}$、$\boldsymbol{f}_{\mathbf{1}}$是从拓扑空间$\mathbf{X}$到拓扑空间$\mathbf{Y}$的两个连续映射。如果存在一个从直积拓扑空间$\mathbf{X}\otimes\mathbf{I}$到$\mathbf{Y}$的连续映射$\boldsymbol{F}$，对任意$\boldsymbol{x}\in\mathbf{X}$，有：

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\mathbf{0})=\boldsymbol{f}_{\mathbf{0}}(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\mathbf{1})=\boldsymbol{f}_{\mathbf{1}}(\boldsymbol{x})$$

其中$\mathbf{I}=\left\{\boldsymbol{t}|\boldsymbol{t}\in\mathbf{R}^{\mathbf{1}},\text{且}\mathbf{0}\le\boldsymbol{t}\le\mathbf{1}\right\}$，则称映射$\boldsymbol{f}_{\mathbf{0}}$、$\boldsymbol{f}_{\mathbf{1}}$同伦。记为：

$$\boldsymbol{f}_{\mathbf{0}}\cong\boldsymbol{f}_{\mathbf{1}}:\mathbf{X}\to\mathbf{Y}$$

这个$\boldsymbol{F}$称为从$\boldsymbol{f}_{\mathbf{0}}$到$\boldsymbol{f}_{\mathbf{1}}$的一个伦移。当$\boldsymbol{f}_{\mathbf{1}}$是一个常值映射时，与它同伦的映射都称为零伦映射。

它针对的是存在于两个拓扑空间$\mathbf{X}$与$\mathbf{Y}$之间的两个可以通过某参数变化连接起来连续映射。稍微形象些，可将其表示为图 7.5。

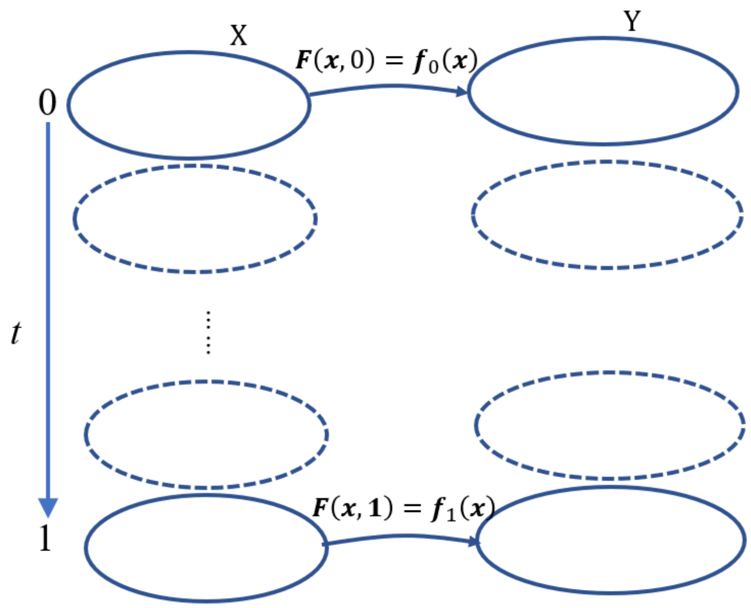

图 7.5 映射同伦示意图。

定义 7.17 道路同伦：α描述的是从$\mathrm{I}=\left\{t|t\in\mathrm{R}^1,\text{且}0\le t\le 1\right\}$中的$t=0$到$t=1$的连线到拓扑空间X中的两个点$x_0$、$x_1$之间的一条连线之间的道路，此道路本身是个映射。$\beta$描述的是从$\mathrm{I}=\left\{t|t\in\mathrm{R}^1,\text{且}0\le t\le 1\right\}$中的$t=0$到$t=1$的连线到拓扑空间X中的两个点$x_0$、$x_1$之间的另一条连线之间的道路。如果定义一个从$\mathrm{I}\otimes\mathrm{I}$到X中$x_0$、$x_1$两点之间连线的映射，对$t_1$、$t_2\in[0,1]$，满足：

$$F(t_1,0)=\alpha(t_1),\ \ F(t_1,1)=\beta(t_1)$$
$$F(0,t_2)=x_0,\ \ F(1,t_2)=x_1$$

这时，称道路α与β同伦，记为$\alpha\cong\beta$。F称为从α到β的伦移。

当α与β同伦时，α这个映射可以连续地变为β这个映射。这个连续变化的特性，与前面将的映射同伦是一致的。区别是前者联系起来的是两个$\mathbf{X}\rightarrow\mathbf{Y}$的映射。而后者联系起来的，是描述一个拓扑空间X中的两个点x_0、x_1之间连线的映射。稍微形象些，可将道路同伦表示为图 7.6。

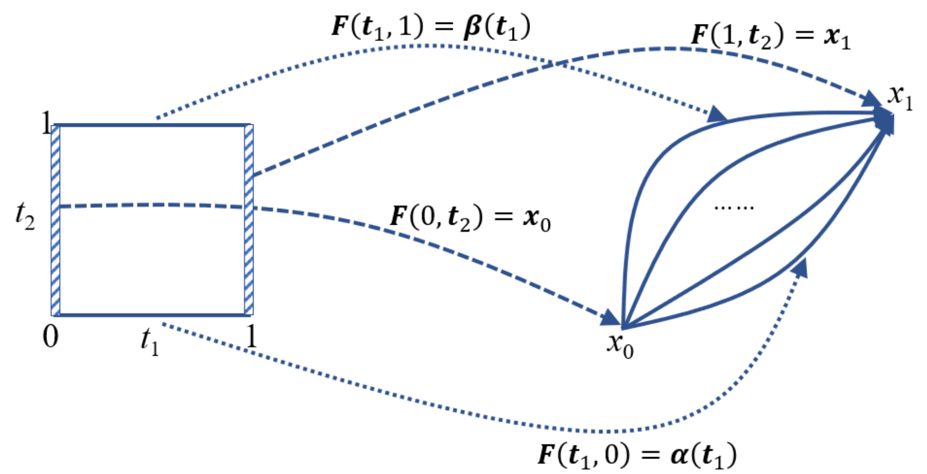

图 7.6 道路同伦示意图。

不管是映射同伦，还是道路同伦，都是一种等价关系。具备如下性质：

定理 7.3 设f、h、g是拓扑空间X到拓扑空间Y的连续映射，则：

1. $f \cong f$;
2. 若$f \cong g$，则$g \cong f$;
3. 若$f \cong g$、$g \cong h$，则$f \cong h$。

同样，对于道路同伦，也有类似关系。设α、β、γ是拓扑空间X中的两个点x_0、x_1之间的道路，有：

1. $\alpha \cong \alpha$;
2. 若$\alpha \cong \beta$，则$\beta \cong \alpha$;
3. 若$\alpha \cong \beta$、$\beta \cong \gamma$，则$\alpha \cong \gamma$。

同时，与映射之间可以定义乘积一样，道路之间也可以定义乘积。这些乘积之间具备如下性质：

定理 7.4 设$\alpha_0 \cong \alpha_1$、$\beta_0 \cong \beta_1$，若乘积$\alpha_0\beta_0$有定义（也就是说α_0的终点在拓扑空间X中刚好是β_0的起点），则$\alpha_1\beta_1$也自然有定义，且：

$$\alpha_0\beta_0 \cong \alpha_1\beta_1$$

定理 7.5 设$\boldsymbol{\alpha} \cong \boldsymbol{\beta}$，则$\boldsymbol{\alpha}^{-1} \cong \boldsymbol{\beta}^{-1}$。

而基于定理 7.3，就可以定义道路同伦类了。

定义 7.18 道路同伦类：设$\boldsymbol{\alpha}$描述的是从$\mathbf{I} = \left\{\boldsymbol{t} | \boldsymbol{t} \in \mathbf{R}^{\mathbf{1}}, 且 \mathbf{0} \leq \boldsymbol{t} \leq \mathbf{1}\right\}$中的$\boldsymbol{t} = \mathbf{0}$到$\boldsymbol{t} = \mathbf{1}$的连线到拓扑空间$\mathbf{X}$中的两个点$\boldsymbol{x}_{\mathbf{0}}$、$\boldsymbol{x}_{\mathbf{1}}$之间的一条连线之间的道路。则可以用$\langle\boldsymbol{\alpha}\rangle$描述所有与$\boldsymbol{\alpha}$同伦的道路的集合，称为一个$\boldsymbol{\alpha}$的道路同伦类。

道路同伦类中的道路是要具有相同的起点和终点的。由于定理 7.4，当道路$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$的乘积有定义时，也可定义道路同伦类的乘积：

$$\langle\boldsymbol{\alpha}\rangle\langle\boldsymbol{\beta}\rangle = \langle\boldsymbol{\alpha\beta}\rangle$$

三条道路的乘积有定义时，其同伦类也有定义，且可结合：

$$(\langle\boldsymbol{\alpha}\rangle\langle\boldsymbol{\beta}\rangle)\langle\boldsymbol{\gamma}\rangle = \langle\boldsymbol{\alpha}\rangle(\langle\boldsymbol{\beta}\rangle\langle\boldsymbol{\gamma}\rangle)$$

基于定理 7.5，道路同伦类的逆也有如下性质：

$$\langle\boldsymbol{\alpha}^{-1}\rangle = \langle\boldsymbol{\alpha}\rangle^{-1}$$

有了这些性质，如果再定义一个单位元，就可以基于道路同伦类来定义群了。这个单位元可取为常值映射$\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x}_0}$。具体而言，就是把图 7.6 左边的正方形，如图 7.7 所示，全部投影为拓扑空间$\mathbf{X}$的一个点$\boldsymbol{x}_{\mathbf{0}}$。这个时候，在上面三个性质的基础上，加上常值映射$\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x}_0}$以及$\langle\boldsymbol{\alpha}\rangle$这个道路同伦类（$\boldsymbol{x}_{\mathbf{0}}$为$\langle\boldsymbol{\alpha}\rangle$的起点，也为其终点）乘积的性质[17]：

$$\langle\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x}_0}\rangle\langle\boldsymbol{\alpha}\rangle = \langle\boldsymbol{\alpha}\rangle、\langle\boldsymbol{\alpha}\rangle\langle\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x}_0}\rangle = \langle\boldsymbol{\alpha}\rangle$$

$$\langle\boldsymbol{\alpha}\rangle\langle\boldsymbol{\alpha}^{-1}\rangle = \langle\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x}_0}\rangle、\langle\boldsymbol{\alpha}^{-1}\rangle\langle\boldsymbol{\alpha}\rangle = \langle\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x}_0}\rangle$$

就可以定义一个以道路同伦类为群元，以常值映射$\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x}_0}$为单位元，具有逆元，封闭性，结合律的群了。这个群称为以$\boldsymbol{x}_{\mathbf{0}}$为基点的基本群。

[17]在理解这些式子的时候，注意道路的起点与终点。

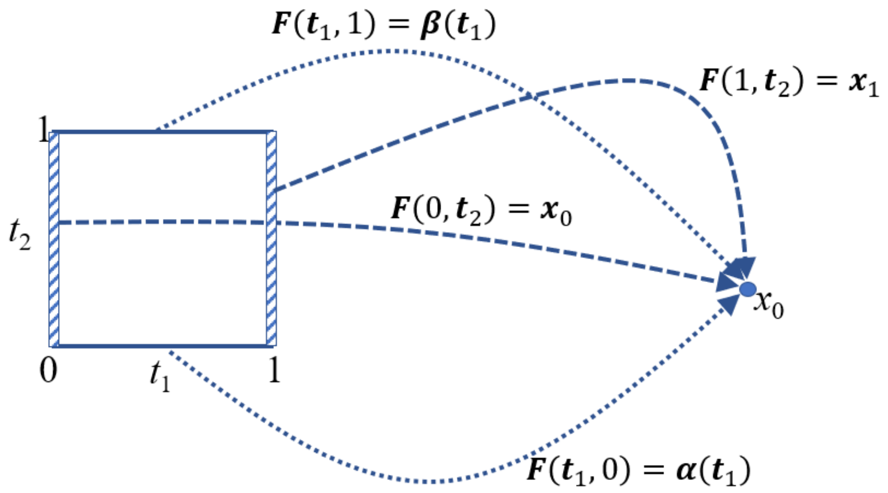

图 7.7 常值映射示意图。

定义 7.19 基本群：有拓扑空间X，x_0是其中一点。所有具有起点=终点=x_0的道路同伦类的集合，以$\langle e_{x_0}\rangle$为单位元，以$\langle\alpha\rangle\langle\beta\rangle=\langle\alpha\beta\rangle$、$\langle\alpha^{-1}\rangle=\langle\alpha\rangle^{-1}$为规则定义乘法与逆元，构成一个群。这个群称为拓扑空间X的以x_0为基点的基本群。

对于道路连通的拓扑空间，取不同基点，基本群是相互同构的。一个道路连通的拓扑空间，如果其基本群只包含单位元素，则这个空间是单连通的。在单连通的空间中，任意一条封闭的线，都可以缩为一个点。如果一个道路连通的拓扑空间中的基本群有 m 个元素，则称这个拓扑空间是 m 度连通度。总之，拓扑空间的连通性可以用基本群这个概念来描述。

7.3 微分流形

至此，关于拓扑空间的定义以及如何描述其基本性质的讨论结束。下面要讲微分流形，它是基于豪斯道夫这个拓扑空间来进行定义的。豪斯道夫空间的定义详见前面定义 7.11。简单来讲，它就是一个可分离的拓扑空间，与欧氏空间类似，其中任意有界的闭子集，都是紧致的。正是因为有这些性质，基于微分的解析手

段在分析其过程中才可以发挥关键的作用。几何上的空间很多，豪斯道夫空间此优异的性质，也是其在具体物理学的研究中找到应用的一个关键原因。

我们的讨论从微分流形的定义开始。

定义 7.20 微分流形：设$\left(\mathbf{X},\vartheta(\mathbf{X})\right)$是个豪斯道夫空间，如果存在一个映射的集合$\Phi=\{(U,\varphi_U)\}$，其中$(U,\varphi_U)$代表的是从$\mathbf{X}$的开集$U$到欧氏空间的$\mathrm{R^n}$的开集$\varphi_U(U)$的一个映射$\varphi_U\colon U\to\varphi_U(U)$。如果有下面四个条件：

1. **这些φ_U都是同胚映射；**
2. **$\cup U=\mathbf{X}$；**
3. **相容性。设(U,φ_U)、$(V,\varphi_V)\in\Phi$，且$U\cap V\neq\emptyset$，则$\varphi_V\circ\varphi_U^{-1}$是$C^\infty$类的；**
4. **最大性。如果$\mathbf{X}$的开集U'有到$\mathrm{R^n}$的一个开集的同胚映射$\varphi_{U'}$，且$(U',\varphi_{U'})$与Φ中的任意一个(U,φ_U)都相容，则必有$(U',\varphi_{U'})\in\Phi$。**

则称$(\mathbf{X},\Phi)$是一个 n 维的C^∞微分流形，也称光滑流形。Φ称为$\mathbf{X}$上的微分结构。

换句话说,微分流形描述的是一个豪斯道夫空间的微分结构。其采用的方式,是把豪斯道夫空间与欧氏空间都分别写成若干个开集的并集。然后，利用欧氏空间中的开集与豪斯道夫空间的开集之间存在同胚映射这一点,来描述这个豪斯道夫空间。当然，这个映射不改变两个开集作为小的拓扑空间的拓扑结构。而开集之间，要保证足够的重叠。这种重叠要求有相容性。也就是说把它放到一个开集时，与放到另一个开集中时，用微分的方式来描述欧氏空间往它们的投影时，结果可以通过$\varphi_V\circ\varphi_U^{-1}$这个有任意阶连续偏导数的函数进行联系。

这样的结果，就是在$U\cap V$、$\varphi_U(U\cap V)$、$\varphi_V(U\cap V)$这三个集合间，形成一个相容的闭环。如图 7.8 所示，它们可以通过φ_U、$\varphi_V\circ\varphi_U^{-1}$、$\varphi_V^{-1}$形成一个顺时针的投影的闭环,也可以通过$\varphi_V$、$\varphi_U\circ\varphi_V^{-1}$、$\varphi_U^{-1}$形成一个逆时针的投影的闭环。

任何一个元素，在经过这些闭环的投影后，保持不变。这个不变既指其在其集合中元素不变，也指其微分结构的不变。毫无疑问，微分流形在数学上提供了一个在解析表达上非常简介且严格的工具。这个工具可以被用来描述李群这种连续群。而这种连续群，在物理上，具有很重要的应用。

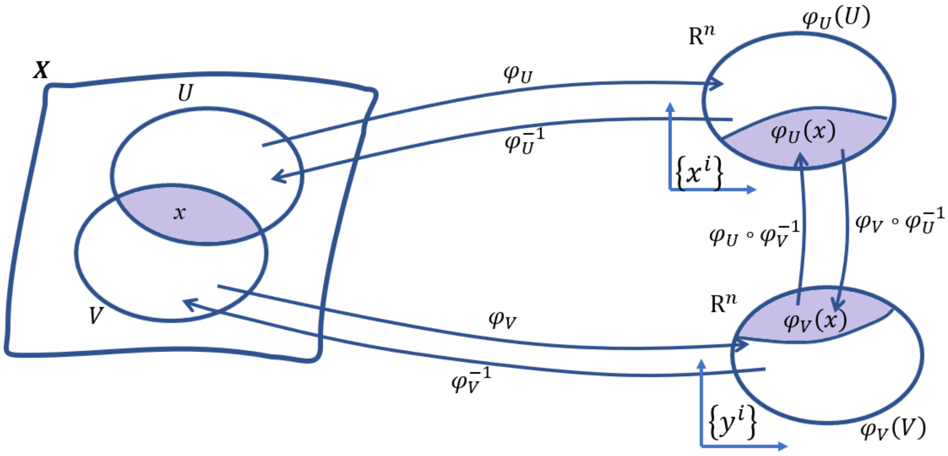

图 7.8 微分流形示意图

上面这个定义中，有个$\boldsymbol{C}^{\infty}$。它指的是定义在$\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$这个欧氏空间的函数$\boldsymbol{f}$，如果对其中某一点的任意阶梯阶偏导数都存在，则称这个函数$\boldsymbol{f}$是$\boldsymbol{C}^{\infty}$的。如果是$\boldsymbol{C}^{\infty}$，则这个函数也是光滑的。

比$\boldsymbol{C}^{\infty}$稍微弱一些，可以是$\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{r}}$，这个$\boldsymbol{r}$是正整数。它的意思是$\boldsymbol{f}$在这一点，有$\boldsymbol{r}$级偏导数存在。比$\boldsymbol{C}^{\infty}$这个条件强一些，有个$\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{\omega}}$，它指的是这个函数可以在这一点做收敛的幂级数展开。如果这个函数$\boldsymbol{f}$在其定义的每个点上，都可以做幂级数展开，则称它是解析的，记为$\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{\omega}}$。一个函数可以是$\boldsymbol{C}^{\infty}$但不解析[18]，比如：

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}) = \begin{cases} \boldsymbol{e}^{-\mathbf{1}/\boldsymbol{t}} & \text{for } \boldsymbol{t} > \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \text{for } \boldsymbol{t} \leq \mathbf{0} \end{cases}$$

此函数在$\boldsymbol{t} = \mathbf{0}$这一点就存在无穷阶导数，因此光滑。但它不能在这点做收敛的

[18] 解析的函数都光滑，但光滑的函数不一定解析。

幂级数展开，因此不解析[19]。在上面那个定义中，可以有C^{ω}微分流形。同样，依赖于f的性质，也可以有C^r流形与解析流形。

在上面的投影关系中，对于拓扑空间$\mathbf{X}$中的某个点$x \in U$，可以通过其微分结构$\mathbf{\Phi}$中的(U, φ_U)，找到一个$\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$中的点与之对应。这个点是个$\mathbf{n}$维向量，其第i个维度上的坐标为：

$$x^i = [\varphi_U(x)]^i$$

因此，也可以把φ_U理解为U上的局部坐标系，U称为其坐标邻域。这个就像我们画地图时把地球这个球面分为好多块小曲面中的一个小曲面，从这个小曲面U上，很容易往二维平面φ_U做同胚映射。每个这种映射(U, φ_U)，称为$\mathbf{X}$的一个坐标对，也就是U中任意一点的局部坐标系。这一点，在图 7.8 中有体现。

同时，在微分流形的定义中，还有一个相容原理。它描述的是一个$\mathbf{X}$中的点，可以有不同的局部坐标系。就像中国地图如果分省画，会有一个河南省地图、一个山西省地图。河南的地图上面一般会出现上西的晋城。山西的地图上面一般也会出现河南的焦作。这两个地图对应的区域的整体，不含边界，是开集。晋城、焦作是这两个开集中的公共区域。以晋城这个区域中的某个点为例，它在不同的坐标系下可以有不同的坐标（山西地图上的坐标记为(U, φ_U)，在河南地图上的坐标记为(V, φ_V)），记为：

$$x^i = [\varphi_U(x)]^i$$

[19]展开讨论一下。解析这个概念背后，在物理里面，实际上是物理规律不同的体现。上面的 f(t)函数，在 t=0 两边实际上体现出的是两个物理规律。它们是无法通过解析延拓找到对方的。像我们做实验的时候最常接触到的相的概念，表示的也是物体的物性按某种解析规律变化的状态函数（比如温度、压强、磁场）的区域。边界上不解析，对用的就是不同的区域呈现不同的物理规律。像杨振宁先生、李政道先生在上世纪 50 年代提出的李-杨零点的概念，实际上就是从解析的角度对相变进行了一个完美的数学解释。这部分内容可以作为一个扩展阅读供读者参考，详见：C. N. Yang, Phys. Rev. 85, 808 (1952); C. N. Yang and T. D. Lee, Phys. Rev. 87, 404 (1952); T. D. Lee and C. N. Yang, Phys. Rev. 87, 410 (1952)。这三篇文章中，第二篇文章是核心，讲了最关键的概念。第一篇文章是前期的算法准备，第三篇文章是第二篇文章中的概念一些具体的模型体系中的体现）。

与

$$y^i = [\varphi_V(x)]^i$$

相容性原理告诉我们的是从属于晋城的这一点在山西地图中的坐标出发(也就是其在(U, φ_U)这个平面坐标系中的局部坐标出发)，通过$\varphi_V \cdot \varphi_U^{-1}$去求其在河南地图中的坐标，其结果:

$$\left(\varphi_V \circ \varphi_U^{-1}\right)^i (x^1, x^2, \cdots, x^n)$$

应与其在河南地图中的坐标y^i完全一致。也就是说，在微分流形的定义中，有这样一个要求:

$$\left(\varphi_V \circ \varphi_U^{-1}\right)^i (x^1, x^2, \cdots, x^n) \stackrel{\text{def}}{=} f^i(x^1, x^2, \cdots, x^n) = y^i$$

这里，函数$\varphi_V \circ \varphi_U^{-1}$可以被写成$n$个偏微分函数。$C^\infty$微分流形要求这$n$个函数$f^i$是$C^\infty$的。与$C^\infty$微分流形对应，$C^r$微分流形要求它们是$C^r$的，解析流形要求它们是解析的。

与上面这个投影过程相逆，还有另一个投影过程:

$$\left(\varphi_U \circ \varphi_V^{-1}\right)^i (y^1, y^2, \cdots, y^n) \stackrel{\text{def}}{=} g^i(y^1, y^2, \cdots, y^n) = x^i$$

同样，这里对$\varphi_U \circ \varphi_V^{-1}$的要求，依然是$C^\infty$、$C^r$、或解析（分别对应光滑流形、$C^r$流形、解析流形）。这两个映射过程之间，是完全等价的。

此例子对应的最早的应用是大地测量，将曲面画为平面（画地图）。实际上，前面提到，19 世纪上半叶，高斯开始思考类似问题也与他接到一个绘制地图的任务有关。在这个过程中，他敏锐地意识到需要发展一些数学的工具，把非欧的几何空间与欧氏的几何空间通过投影、拼接的方式联系起来，才能解决自己面临的问题。其对这些工作背后的数学问题的思考，应该说也是他在后期鼓励他的学生黎曼将关于曲面的研究作为其教授资格考试论文的一个重要原因。换句话说，这个看是复杂、抽象的数学问题，其背后是有一个很直观的图像与很实际的问题做

支撑的。

在所有由投影、拼接描述的微分流形中，最特殊的一个是由欧氏空间到欧氏空间本身的这个流形。这里，可以理解为取$\mathbf{X}=\mathbf{R^n}$，投影为恒等投影$\boldsymbol{I}$，微分结构是$\boldsymbol{\Phi}=\{(\mathbf{R^n},\boldsymbol{I})\}$，这个流形记为：$(\mathbf{R^n},\boldsymbol{\Phi})$。它描述的完全不扭曲的空间。而流形强大的地方，是描述扭曲的空间。

作为一个简单的流形的例子，我们可以看一下一个圆是如何往一维欧氏空间做投影的。设$\boldsymbol{S^1}$是一个半径为 1 的圆周。毫无疑问这个一维空间相对于一维欧氏空间是扭曲的。为了描述这个扭曲的空间，我们可以针对其建立一个流形，并且保证所有的微分手段对于这个流形是适用的。具体如下图所示：

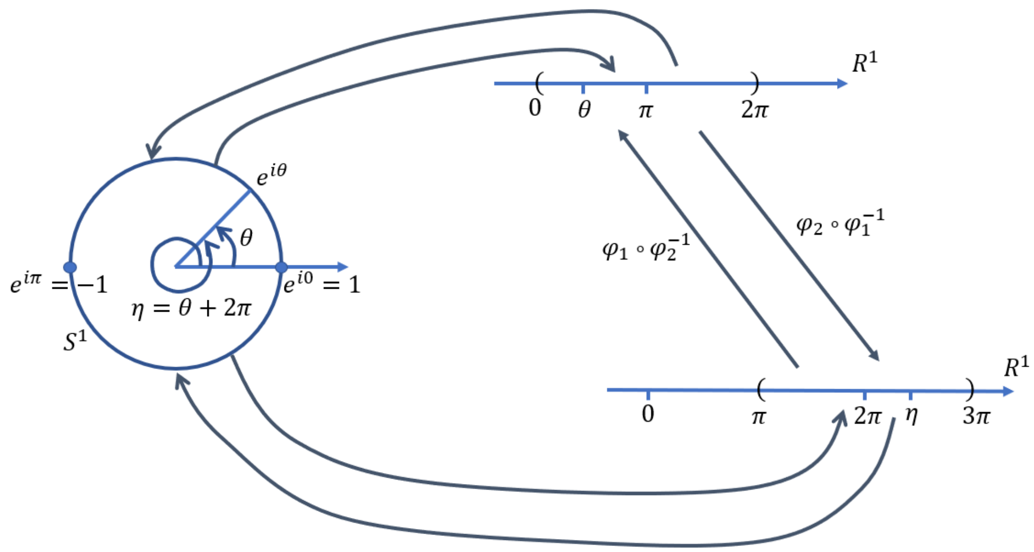

图 7.9 圆周一维流形示意图

我们可以在这个圆周上取开集$\boldsymbol{U_1}$，定义如下：

$$\boldsymbol{U_1}=\mathbf{S^1}-\{\boldsymbol{e^{i0}}\}$$

基于这个$\boldsymbol{U_1}$，可以定义一个它到一维欧氏空间上的开集$(\mathbf{0},\mathbf{2}\boldsymbol{\pi})$上的投影：

$$\boldsymbol{\varphi_1}:\boldsymbol{U_1}\to(\mathbf{0},\mathbf{2}\boldsymbol{\pi})$$

为：

$$\boldsymbol{e^{i\theta}}\to\boldsymbol{\varphi_1}\left(\boldsymbol{e^{i\theta}}\right)=\boldsymbol{\theta}\in(\mathbf{0},\mathbf{2}\boldsymbol{\pi})$$

除了这个$\boldsymbol{U_1}$，还可以定义另一个开集$\boldsymbol{U_2}$：

$$\boldsymbol{U_2 = S^1 - \{e^{i\pi}\}}$$

基于这个$\boldsymbol{U_2}$，可以定义一个它到一维欧氏空间上的开集$(\boldsymbol{\pi, 3\pi})$上的投影：

$$\boldsymbol{\varphi_2: U_2 \to (\pi, 3\pi)}$$

为：

$$\boldsymbol{e^{i\eta} \to \varphi_2(e^{i\eta}) = \eta \in (\pi, 3\pi)}$$

在$(\boldsymbol{\pi, 3\pi})$这个开区间，$\boldsymbol{\eta}$的取值遵循：

$$\boldsymbol{\eta = \begin{cases} \theta, & \pi < \theta < 2\pi \\ \theta + 2\pi, & 0 < \theta < \pi \end{cases}}$$

这里，$\boldsymbol{U_1}$和$\boldsymbol{U_2}$分别是圆周$\boldsymbol{S^1}$上去掉$\boldsymbol{e^{i0}}$和$\boldsymbol{e^{i\pi}}$点的开区间。在这两个开区间的交集中，也就是$\boldsymbol{e^{i\theta}}$中的$\boldsymbol{\theta \in (\pi, 2\pi)}$时，$\boldsymbol{S^1}$上的点通过$\boldsymbol{\varphi_1}$对应的值与通过$\boldsymbol{\varphi_2}$对应的值相等，它们是相容的。同时，$\boldsymbol{\varphi_1}$无法描述的$\boldsymbol{e^{i0} = 1}$这一点，是可以被$\boldsymbol{\varphi_2}$很好地描述的；$\boldsymbol{\varphi_2}$无法描述的$\boldsymbol{e^{i\pi} = -1}$这一点，也可以被$\boldsymbol{\varphi_1}$很好地描述。这样，通过$\Phi = \{(\boldsymbol{U_1, \varphi_1}), (\boldsymbol{U_2, \varphi_2})\}$，我们就很好地确立了一个流形$(\boldsymbol{S^1}, \Phi)$，来描述圆周这个弯曲的一维欧氏空间。

在讲下一个概念之前，我们先明确一点：从上一节拓扑空间到这一节微分流形的一个跳跃是在上一节我们只讲了连续，而在这一节我们要强调微分结构。在上一节，一个空间（也可以说是更高维空间中的曲面）到另外一个空间的映射只要连续，就能保证其拓扑结构不变。而在这一节要讲的微分流形中，我们对定义中从豪斯道夫空间到欧氏空间的映射除了要求其连续，还要求其$\boldsymbol{C^\infty}$（或$\boldsymbol{C^r}$、解析）。因为这些要求，在本节中，我们总是要基于豪斯道夫空间到欧氏空间的映射来展开讨论。实际上，本节前面的讨论都是基于一个豪斯道夫空间到欧氏空间的映射展开的。

一个豪斯道夫空间到欧氏空间的映射，我们还可以想象两个豪斯道夫空间只

要都可以被映射到欧氏空间，我们在这两个豪斯道夫空间之间也可以基于微分流形定义映射的。就像上一节定义 7.13 中的同胚映射（即拓扑映射，定义在两个拓扑空间$\mathbf{X}$与$\mathbf{Y}$之间，我们通过要求映射连续保证拓扑结构不变）。在本节，既然讲了微分流形，那么在两个拓扑空间$\mathbf{X}$与$\mathbf{Y}$之间，我们也是可以通过微分流形，来定义既保证拓扑结构不变又保证流形结构不变的映射的。这个概念叫可微同胚。它和上一节的同胚映射对应，只是多了流形结构不变的要求。

关于其讨论是要基于光滑映射展开的。我们将具体分两步进行，先讲光滑映射（或C^r映射、解析映射），再讲可微同胚。

定义 7.21 流形间的光滑映射：设(X,Φ_1)、(Y,Φ_2)分别是一个 m 维和 n 维C^∞流形，如果存在映射f：

$$f\colon \mathrm{X}\to \mathrm{Y}$$

对任意$x\in \mathrm{X}$，有$y=f(x)\in \mathrm{Y}$与之对应，且对这个y的任意局部坐标系$(V,\varphi_V)\in \Phi_2$，必有$(U,\varphi_U)\in\Phi_1$、$x\in U$存在且满足：

$$f(U)\subset V$$

以及

$$\varphi_V\circ f\circ\varphi_U^{-1}\colon \varphi_U(U)\to\varphi_V(V)$$

是C^∞的，即

$$y^i=\left(\varphi_V\circ f\circ\varphi_U^{-1}\right)^i(x^1,x^2,\cdots,x^m),\qquad 其中 i=1,2,\cdots,n$$

是C^∞的。这时，称f是X到Y的C^∞映射，或光滑映射。

这个定义所描述的关系，可参考图 7.10。参考C^∞映射，也可以定义C^r映射、解析映射，这些要求都体现在$\varphi_V\circ f\circ\varphi_U^{-1}$这个复合函数上。

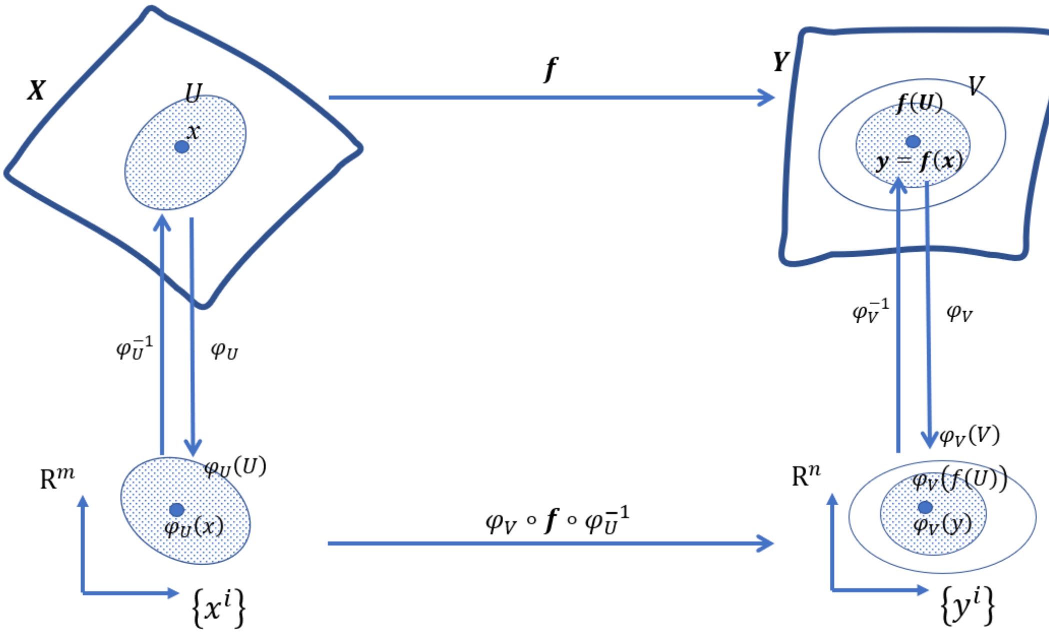

图 7.10 X到Y的C^∞、C^r、解析映射

这个映射的存在，也保证了图 7.10 中最下一行这个 m 维欧氏空间到 n 维欧氏空间的坐标变换的存在。它可以用一个$n \times m$的矩阵描述，具体形式如下：

$$\boldsymbol{D}\left(\boldsymbol{\varphi_V} \circ \boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{\varphi_U^{-1}}\right)_{\boldsymbol{\varphi_U(x)}} = \left(\left(\frac{\partial \boldsymbol{y}^i}{\partial \boldsymbol{x}^j}\right)_{\boldsymbol{\varphi_U(x)}}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{y}^1}{\partial \boldsymbol{x}^1} & \frac{\partial \boldsymbol{y}^1}{\partial \boldsymbol{x}^2} & \cdots & \frac{\partial \boldsymbol{y}^1}{\partial \boldsymbol{x}^m} \\ \frac{\partial \boldsymbol{y}^2}{\partial \boldsymbol{x}^1} & \frac{\partial \boldsymbol{y}^2}{\partial \boldsymbol{x}^2} & \cdots & \frac{\partial \boldsymbol{y}^2}{\partial \boldsymbol{x}^m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \boldsymbol{y}^n}{\partial \boldsymbol{x}^1} & \frac{\partial \boldsymbol{y}^n}{\partial \boldsymbol{x}^2} & \cdots & \frac{\partial \boldsymbol{y}^n}{\partial \boldsymbol{x}^m} \end{pmatrix}$$

这个矩阵也被称为$\boldsymbol{f}$在$\boldsymbol{x}$点对局部坐标系$\{x^i\}$和$\{y^i\}$的 Jacobi（雅可比）矩阵。

基于光滑映射，可以定义可微同胚。

定义 7.22 可微同胚：对于两个维度相同的C^∞流形(X, Φ_1)与(Y, Φ_2)，两者之间存在一个同胚映射f，其逆映射为f^{-1}。如果这个f与f^{-1}按照定义 7.21 都是光滑映射，则称(X, Φ_1)与(Y, Φ_2)可微同胚。

可微同胚意味着两个拓扑空间不光拓扑结构完全相同，光滑流形结构也完全相同。到现在，我们可以简单的把流形理解为一些曲面结构，与欧氏空间存在$\boldsymbol{C}^\infty$、$\boldsymbol{C}^r$、或解析的对应。与欧氏空间存在子空间以及可以通过卡氏积构造直积空间一

样，流形也存在子流形与直积流形。

定义 7.23 设$(\mathbf{Y},\boldsymbol{\Phi})$是一个 n 维的$\boldsymbol{C^\infty}$（$\boldsymbol{C^r}$、解析）流形，有$\mathbf{X}\subset\mathbf{Y}$，如果$\mathbf{X}$本身也形成一个拓扑空间，且在图 7.10 的基础上存在如图 7.11 所示的$(\mathbf{X},\boldsymbol{\Psi})$，满足：

1. **存在光滑映射$\boldsymbol{I}$，为恒等映射，对$\boldsymbol{x}\in\mathbf{X}$，有$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{I}(\boldsymbol{x})$；**
2. **对$\boldsymbol{X}$，存在$\boldsymbol{\varphi_U}(\mathbf{X})\subset\boldsymbol{R^m}$。**

则称$(\mathbf{X},\boldsymbol{\Psi})$是$(\mathbf{Y},\boldsymbol{\Phi})$的 m 维的光滑（$\boldsymbol{C^r}$、解析）子流形

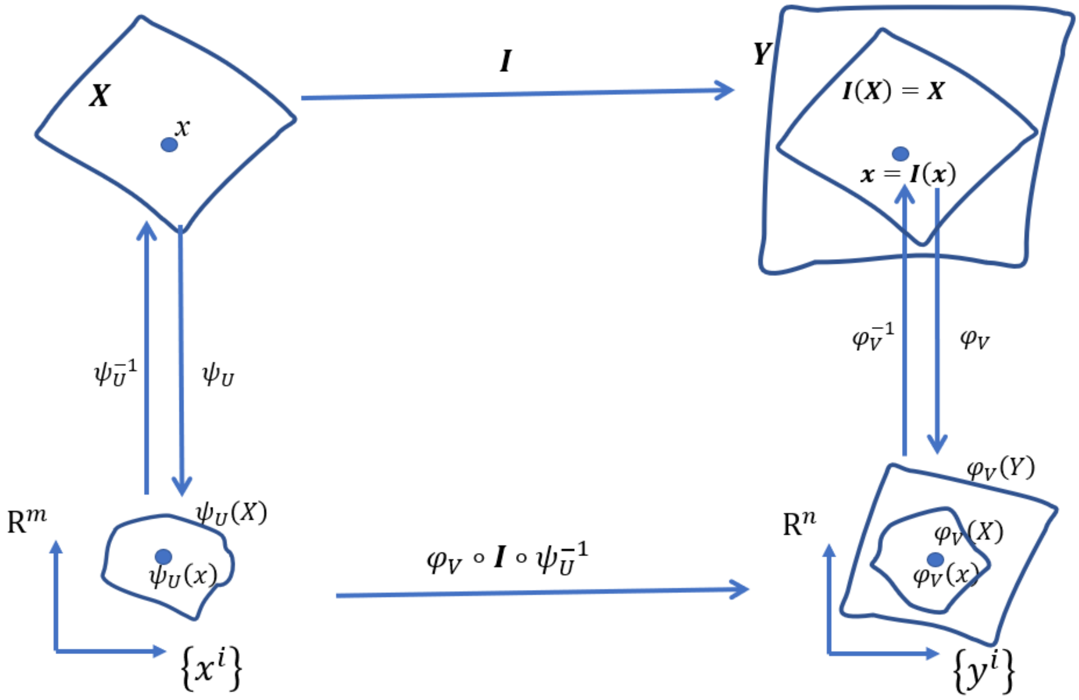

图 7.11 子流形示意图

这里，$\mathbf{X}$的拓扑可以根据需要定义[20]。如果它是由定义 7.4 给出的基于$\mathbf{Y}$与$\mathbf{X}$的关系定义的相对拓扑，那么$(\mathbf{X},\boldsymbol{\Psi})$就是$(\mathbf{Y},\boldsymbol{\Phi})$的正则子流形。不然，就是一般的子流形。与子流形相似，还有直积流形的概念。

定义 7.24 直积流形：设$(\mathbf{X},\boldsymbol{\Psi})$、$(\mathbf{Y},\boldsymbol{\Phi})$分别是一个 m 维、n 维的$\boldsymbol{C^\infty}$（$\boldsymbol{C^r}$、解析）

[20]拓扑不光是元素的集合，还是集合的集合定义的结构。上面只是说了$\mathbf{X}\subset\mathbf{Y}$，没说它们的拓扑之间的关系。

流形，其中$\boldsymbol{\Psi}=\{(\boldsymbol{U},\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{U}))\}$、$\boldsymbol{\Phi}=\{(\boldsymbol{V},\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{V}))\}$。可定义直积拓扑空间$\mathbf{X}\otimes\mathbf{Y}$的流形结构：

$$\boldsymbol{\Omega}=\left\{\left(\boldsymbol{U}\otimes\boldsymbol{V},\left(\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{U}),\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{V})\right)\right)\right\}$$

其中$(\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{U}),\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{V}))$为欧氏空间的卡氏积。这时，称$(\mathbf{X}\otimes\mathbf{Y},\boldsymbol{\Omega})$为$(\mathbf{X},\boldsymbol{\Psi})$与$(\mathbf{Y},\boldsymbol{\Phi})$的直积流形。

这些概念在我们后面讲具体的李群的时候都会用到。

7.4 李群

前面提到过，李群是一个具有流形结构的连续群。而流形又是建立在拓扑空间上的概念。因此，本节讨论先从拓扑群开始。

定义 7.25 拓扑群：集合$\mathbf{G}=\{\cdots,\boldsymbol{g},\cdots,\boldsymbol{f},\cdots\}$是一个群。如果在其是群的基础上，继续满足：

1. **$\mathbf{G}$也形成一个拓扑空间；**
2. **$\mathbf{G}$上的运算是连续的。**

则称$\mathbf{G}$是一个拓扑群。

拓扑群有两个结构，一个是群的结构，一个是拓扑结构。第二个条件的作用是保证这两个结构是相容的，具体可体现在：

1. 对$\forall\boldsymbol{g}\in\mathbf{G}$、$\forall\boldsymbol{f}\in\mathbf{G}$，其乘积$\boldsymbol{gf}$的每一个邻域$\boldsymbol{W}$，都存在$\boldsymbol{g}$的邻域$\boldsymbol{U}$与$\boldsymbol{f}$的邻域$\boldsymbol{V}$，使得$\boldsymbol{UV}\subset\boldsymbol{W}$；
2. $\forall\boldsymbol{g}\in\mathbf{G}$,对其逆元素$\boldsymbol{g}^{-1}$的任意一个邻域$\boldsymbol{V}$,都存在$\boldsymbol{g}$的邻域$\boldsymbol{U}$,使得$\boldsymbol{U}^{-1}\subset\boldsymbol{V}$。

拓扑群种类繁多，既有后面我们要讲的李群，也包含有限群。在其定义中，最关键的一点是连续。从拓扑群向李群过渡，最关键的一点就是在连续的基础上要加

微分结构了。

定义 7.26 李群：设集合G是一个群，如果它具有如下性质：

1. **G也是一个 n 维的光滑流形；**
2. **乘法运算φ：$G\otimes G\to G$和逆运算 τ：$G\to G$都是光滑映射。**

则称G是一个 n 维李群。

也就是说李群的群元，是可以由 n 个实参数确定的。连续变换这 n 个参数，可以形成一个 n 维的可以扭曲的空间。这个 n 维空间可以通过微分流形的方式，分成好多开集，每个开集可以往 n 维欧氏空间做投影。这些开集又可以拼合为整个空间。对李群而言，人们可以从光滑的要求得出其解析的性质 [21]。因此，后面的讨论中，只说李群就可以。解析在这里起了很大作用，因为这意味着不管是群元相乘产生新的群元，还是群元求逆，都可以用解析函数来表达各群元之间参数的关系。

作为例子，我们首先可以看一个 n 维欧氏空间，在恒等映射下，构成一个 n 维解析流形。如果定义群的乘法为向量加法，则对其中任意两个元素$\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{x}^2,\cdots,\boldsymbol{x}^n)$、$\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{y}^1,\boldsymbol{y}^2,\cdots,\boldsymbol{y}^n)$有：

$$\boldsymbol{I}^{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{xy})=(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})^{\boldsymbol{i}}=\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{i}}+\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{i}}$$

其中$\boldsymbol{i}$为从 1 到 n 的某个自然数，是分量指标。这个时候，很显然，映射$\boldsymbol{I}$是$\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{x}^2,\cdots,\boldsymbol{x}^n$与$\boldsymbol{y}^1,\boldsymbol{y}^2,\cdots,\boldsymbol{y}^n$的解析函数。李群元素的乘积与逆对应的映射都有定义，这个 n 维欧氏空间的向量的集合就形成一个李群。

除此之外，还有如下一系列我们日常经常遇到的李群：

i) n 维复一般线性变换群$\boldsymbol{GL(n,C)}$

[21]这个背后的数学笔者并不清楚，但物理根源，是一个李群就描述一个物理，因此就解析结构就一个。

所有$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}$的非奇异复数矩阵按矩阵乘法形成一个群。这个群的群元由$2\boldsymbol{n}^2$个实参数决定。群元的乘积与逆都可以写成这$\boldsymbol{2n^2}$个实参数的解析函数。这个群称为 n 维复一般线性变换群（$\boldsymbol{GL(n,C)}$），维数为$\boldsymbol{2n^2}$。这个空间为开空间，因此对应李群非紧致。其它的矩阵群都是它的子群。

ii) n 维实一般线性变换群$\boldsymbol{GL(n,R)}$

所有$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}$的非奇异实数矩阵也形成一个群。其群元由$\boldsymbol{n^2}$个实参数决定，此群称为 n 维实一般线性变换群（$\boldsymbol{GL(n,R)}$），维数为$\boldsymbol{n^2}$。这个空间也为开空间，对应李群非紧致。

iii) n 维复特殊线性变换群$\boldsymbol{SL(n,C)}$

上面提到的$\boldsymbol{GL(n,C)}$的群元中，取行列式为 1 的部分。行列式是个复数，等于 1 对应两个束缚条件。因此它的维度是$\boldsymbol{2n^2-2}$。这个空间为开空间，对应李群非紧致。

iv) n 维实特殊线性变换群$\boldsymbol{SL(n,R)}$

上面提到的$\boldsymbol{GL(n,R)}$的群元中，取行列式为 1 的部分。行列式是实数，对应一个束缚条件。因此，它的维度为：$\boldsymbol{n^2-1}$。这个空间为开空间，对应李群非紧致。

v) n 维酉（幺正）群$\boldsymbol{U(n)}$

这里的要求是群元$\boldsymbol{M}$满足$\boldsymbol{M^\dagger M-I=0}$。如果单从这个条件看，约束条件是$\boldsymbol{2n^2}$个。但是由于$\boldsymbol{(M^\dagger M-I)^\dagger=M^\dagger M-I}$，这也就意味着这$\boldsymbol{2n^2}$个约束条件个数折半，变为$\boldsymbol{n^2}$个。一共是$\boldsymbol{2n^2}$个参数，$\boldsymbol{n^2}$个约束条件，这样$\boldsymbol{U(n)}$群的维数就是$\boldsymbol{n^2}$。此群参数空间为闭空间，对应的李群紧致。

vi) n 维特殊酉（幺正）群$\boldsymbol{SU(n)}$

上面的$\boldsymbol{U(n)}$群的群元$\boldsymbol{M}$的行列式是$\boldsymbol{e^{i\theta}}$。这里特殊酉群的“特殊”两字，意思是这个行列式为 1，去掉了相位这个自由度。因为去掉了这个自由度，$\boldsymbol{SU(n)}$群的维数就在$\boldsymbol{U(n)}$的基础上减一，等于$\boldsymbol{n^2}-1$。这个空间为闭空间，对应李群紧致。由于$\boldsymbol{U(1)}$群的自由度对应的就是这样一个相位，它与$\boldsymbol{U(n)}$的关系是$\boldsymbol{U(n)=SU(n)\otimes U(1)}$。

vii) $\boldsymbol{U(p,q)}$、$\boldsymbol{SU(p,q)}$

整体与上面的$\boldsymbol{U(n)}$、$\boldsymbol{SU(n)}$类似，唯一的不同就是在上面的定义中，$\boldsymbol{M^\dagger M-I=0}$可以写为$\boldsymbol{M^\dagger IM-I=0}$。在这里，$\boldsymbol{I}$换为：

$$\boldsymbol{g}=\mathbf{diag}\left(\underbrace{\mathbf{1},\mathbf{1},\cdots,\mathbf{1}}_{p\text{个}},\underbrace{-\mathbf{1},-\mathbf{1},\cdots,-\mathbf{1}}_{q\text{个}},\right)$$

限制条件体现为$\boldsymbol{M^\dagger gM-g=0}$。相对于与$\boldsymbol{U(n)}$、$\boldsymbol{SU(n)}$，这里就是量度（metric）进行了一个变化。因为这个变化，与$\boldsymbol{U(n)}$、$\boldsymbol{SU(n)}$相比，对应的空间就变成了开空间，李群非紧致。维度方面，依然是$\boldsymbol{(p+q)^2}$与$\boldsymbol{(p+q)^2}-1$。

viii) n 维实正交群$\boldsymbol{O(n)}$

这里的要求是群元$\boldsymbol{M}$是实矩阵，且满足$\boldsymbol{M^TM-I=0}$。这个式子可以写成$\boldsymbol{M^TM=I}$，对应的约束条件有$\boldsymbol{\frac{1}{2}n(n+1)}$个。因此，其维度为$\boldsymbol{n^2-\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{1}{2}n(n-1)}$。这个空间为闭空间，李群紧致。

ix) n 维实特殊正交群$\boldsymbol{SO(n)}$

上面$\boldsymbol{O(n)}$中实矩阵$\boldsymbol{M}$的行列式为$\boldsymbol{\pm1}$。这里多了一个取$\boldsymbol{+1}$的要求，不改变空间维度，但改变空间连通度。此李群的维度依然是为$\boldsymbol{\frac{1}{2}n(n-1)}$，是个紧致李群。

x) $\boldsymbol{O(p,q)}$、$\boldsymbol{SO(p,q)}$

与前面从$\boldsymbol{U(n)}$、$\boldsymbol{SU(n)}$到$\boldsymbol{U(p,q)}$、$\boldsymbol{SU(p,q)}$的过渡类似，这里依然是把$\boldsymbol{M^T I M = I}$变为$\boldsymbol{M^T g M = g}$，$\boldsymbol{g}$的取法与上面例子一样，改变量度。与之相应，紧致性也会发生变化，变为非紧致李群。维度都是$\boldsymbol{\frac{1}{2}(p+q)(p+q-1)}$。这些群里面$\boldsymbol{O(1,3)}$是洛伦兹群，维度为$\boldsymbol{6}$。

xi) 欧几里得群$\boldsymbol{E(n)}$

此群群元为:

$$\boldsymbol{M = \begin{pmatrix} R_{n\times n} & a_{n\times 1} \\ 0_{1\times n} & 1 \end{pmatrix}}$$

其中$\boldsymbol{R_{n\times n}}$为$\boldsymbol{O(n)}$群群元，对应连续转动和反演这些操作。$\boldsymbol{a_{n\times 1}}$对应平移。矩阵最后一列代表时间不变。这里，$\boldsymbol{O(n)}$群的维度为$\boldsymbol{\frac{1}{2}n(n-1)}$，平移群维度为$\boldsymbol{n}$，因此$\boldsymbol{E(n)}$的维度为$\boldsymbol{\frac{1}{2}n(n+1)}$。根据这个形式，很显然，$\boldsymbol{E(n)}$群对平移群做商群，结果是$\boldsymbol{O(n)}$群。平移对应开区间，因此该群为非紧致李群。

这些群是否紧致，可通过其参数空间是开空间还是闭空间来进行判断。而其连通度，需要经过其拓扑空间基本群的分析来进行判断。这里，我们以$\mathbf{SU(2)}$与$\mathbf{SO(3)}$为例，来对其连通性的描述进行简要说明[22]。

$\mathbf{SU(2)}$的所有群元在参数空间可以用一个半径为$\boldsymbol{2\pi}$的球来描述。球内与球面上任何一点与原点连线的长度对应的是转角，方向对应的是转轴。此群的一个特殊的地方是其球面上的所有点都是等价的，对应我们在双群中讲到的$\bar{\mathbf{E}}$。单位元，同时又与半径为$\boldsymbol{4\pi}$的同心球面上的点等价。这时，从原点出发，回到原点的任意

[22] 这部分讨论在头一次课堂实践中比较失败。梁靖云、张亦鑫、陈可人等同学在课后给了很多有用的建议，特此感谢！

一条封闭路径，如果与半径为$\mathbf{2\pi}$的球面相交两次，对用的是如图 7-12a 所示的情况。图中用红色实心球标识路径与球面的交点。从 a 所示情况出发，这个路径是可以通过$\mathbf{SU(2)}$群群元参数的连续变化变为 c 所示路径的。这个路径又进而可变为原点对应的常值映射。其它相交偶数次的情况可根据此情况重复操作。

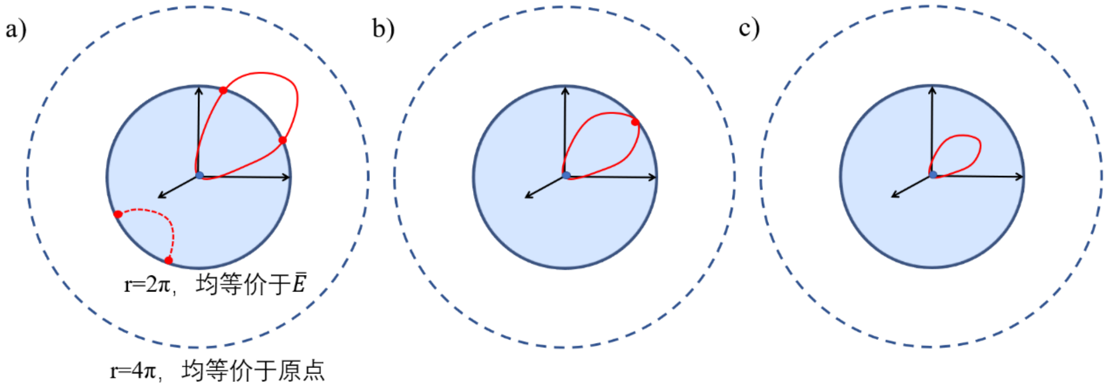

图 7.12 当路径与半径为$\mathbf{2\pi}$的球面相交两次的时候，$\mathbf{SU(2)}$群一条封闭路径演变的示意图。半径为$\mathbf{2\pi}$的球面上的点均等价于$\mathbf{\bar{E}}$，路径与其交点用红色实心球表示。路径的起点与终点都在原点。a)代表的是开始时的路径，球外的部分可投影到红色虚线所示的球内部分。b)代表我们通过群元参数的连续变化，得到路径上一个点为$\mathbf{\bar{E}}$，其它点均在球内的情况。此情况又可通过群元参数的连续变化演化为 c)所示路径，进而演化为原点定义的常值映射。

当此路径与$\mathbf{SU(2)}$的半径为$\mathbf{2\pi}$的球面相交一次的时候，可以用理解为图 7-13a 所示情况。起点为原点，终点为半径为$\mathbf{4\pi}$的球面上的一点。它等价于图 7-13b 所示的路径。因此，我们又可以从图 7-13b 所示路径出发，利用半径为$\mathbf{2\pi}$的球面上的点都相互等价的性质，通过连续变化路径上$\mathbf{SU(2)}$群群元的参数，获得图 7-13c、d、e 所示路径，进而演化为原点所的对应的常值映射。其它路径与半径为$\mathbf{2\pi}$的球面相交奇数次的情况，可以把它看作偶数加一。偶数次的部分可以通过图 7-12 所示的方式消掉，剩下的一次，按图 7-13 所示来理解。这样，$\mathbf{SU(2)}$群就只有一个道路同伦类，基本群元素是一个，单连通。

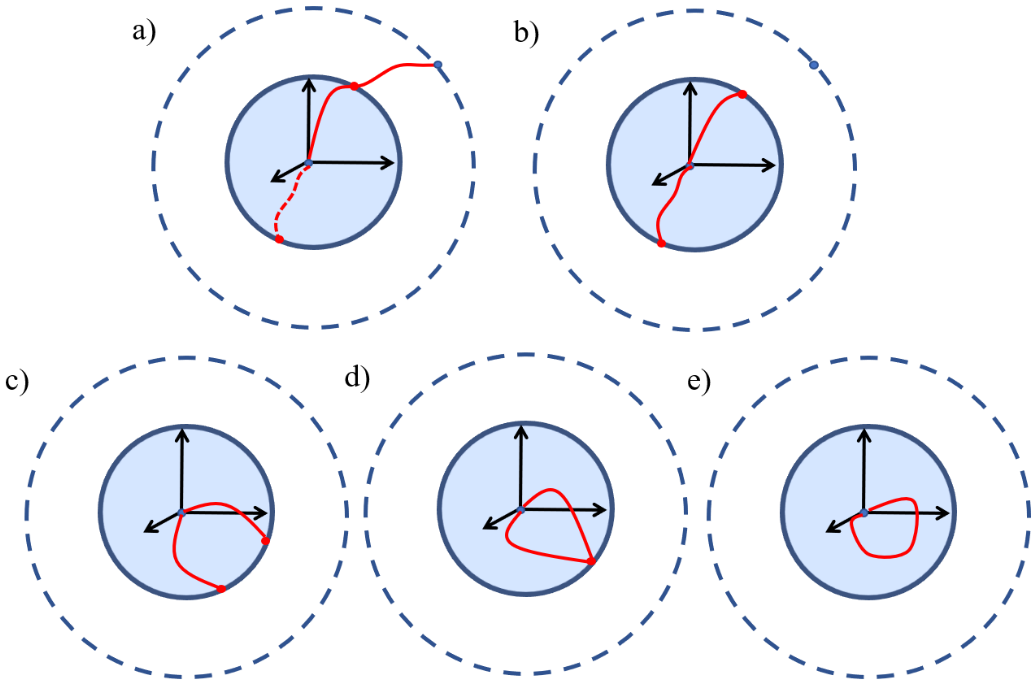

图 7.13 当路径与半径为$\mathbf{2\pi}$的球面相交一次的时候，$\mathbf{SU(2)}$群封闭路径演变示意图。这个半径为$\mathbf{2\pi}$的球面上的点均等价于$\bar{\mathbf{E}}$，路径与其交点用红色实心球表示。路径的起点在原点，终点在半径为$\mathbf{4\pi}$的球面上，如 a)所示。这条路径等价于 b)所示路径。而 b)所示路径又可以向 c)所示路径演化，因为半径为$\mathbf{2\pi}$的球面上的点均等价于$\bar{\mathbf{E}}$，进而到达 d)所示的路径的情况。从 d)到 e)的演化，也可以通过群元参数的连续变化获得。最终，路径演化为原点定义的常值映射。

$\mathbf{SO(3)}$群的连通性与$\mathbf{SU(2)}$不同，其参数空间可以被描述为一个半径为$\boldsymbol{\pi}$的球，球内与球面上任何一点与原点连线的长度对应的是转角，方向对应的是转轴。这个球的表面上只有相对的两个点才是等价的。从原点出发的一条路径，可以与半径为$\boldsymbol{\pi}$的球相交两次，回到原点，具体如图 7.14a 所示。这时，可通过其群元参数的连续变化，将球面上的交点挪近成为一个，对应图 7.14b 所示的情况。之后，再通过群元参数的连续变化，将路径上的所有点均挪至半径为$\boldsymbol{\pi}$的球面以内，进而变为原点对应的常值映射的。与前面关于$\mathbf{SU(2)}$群的讨论类似，其它相交偶数次的情况可看作这种情况的重复操作。

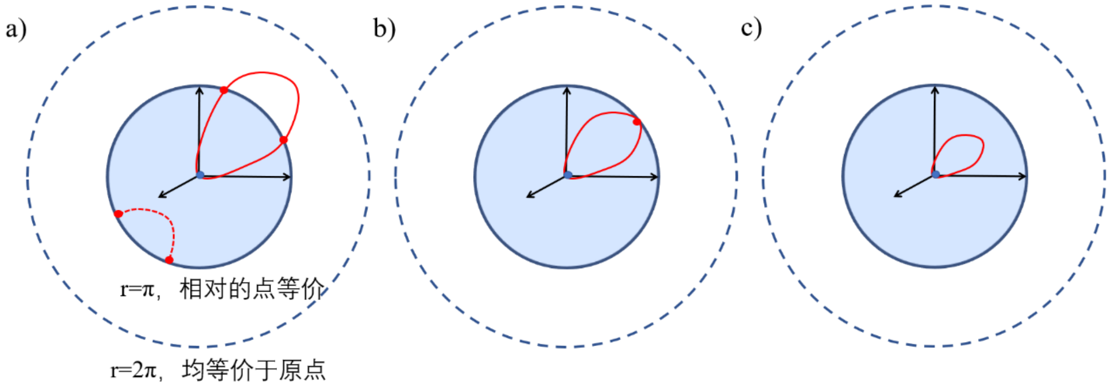

图 7.14 当路径与半径为$\boldsymbol{\pi}$的球面相交两次的时候，$\mathbf{SO(3)}$群封闭路径演变示意图。这个半径为$\boldsymbol{\pi}$的球面上的点只有相对的是等价的，路径与其交点用红色实心球表示。路径的起点与终点都在原点。a)代表的开始的路径，球外的部分可投影到红色虚线所示的球内路径。b)代表我们通过连续变化群元的参数，得到路径上一个点在半径为$\boldsymbol{\pi}$的球面上，其它点均在球内的情况。此情况又可通过群元参数的连续变化，演化为 c)所示路径，进而演化为原点定义的常值映射。

当路径与$\mathbf{SO(3)}$的半径为$\boldsymbol{\pi}$的球面相交一次的时候，可以用理解为图 7-15a 所示，起点为原点，终点为半径为$\boldsymbol{2\pi}$的球面上的一点的情况。这个情况，是等价于图 7-15b 所示的路径的。但是与$\mathbf{SU(2)}$群中利用半径为$\boldsymbol{2\pi}$的球面上的点都相互等价的性质不同，这里$\mathbf{SO(3)}$群的半径为π的球面上只有两个相对的点等价。这两个等价的点无法通过$\mathbf{SO(3)}$群的群元参数的连续变化靠近（图 7-15b 无法变为图 7-15c）。这就彻底阻断了此路径演化为原点所的对应的常值映射的进程。这个有些像图 7-15d 所示复平面上，如果不允许虚部出现，则+1 与-1 无法通过一个连续的变化进行联系。但需要说明的是如图 7-15b 所示的不同路径之间，是可以通过参数的连续变化联系起来的。同时，其它奇数个交点的路径中也可通过图 7-14 所示演化转变为一个交点的情况，它们形成一个道路通论类。这样，$\mathbf{SO(3)}$群就是双连通。

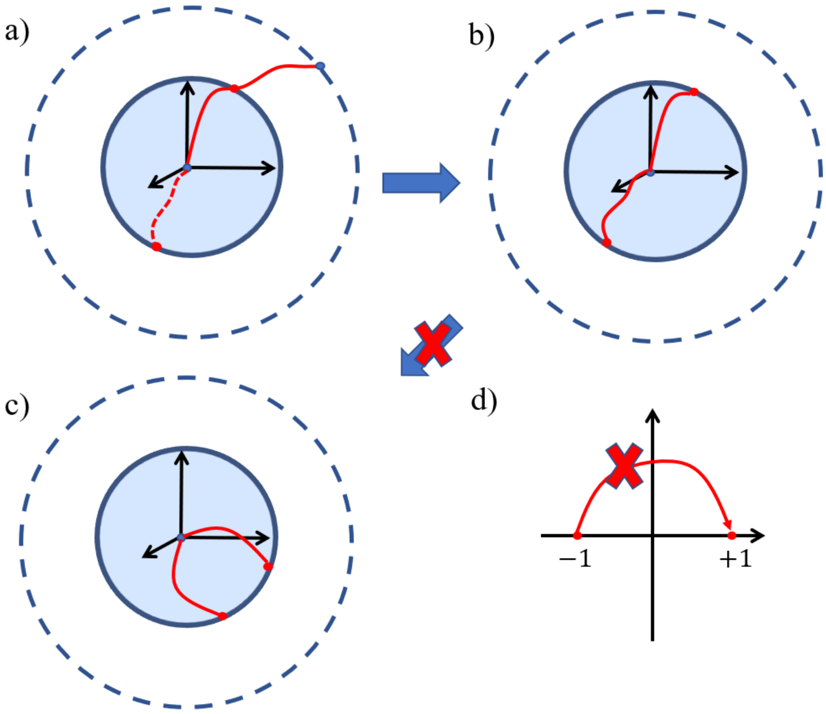

图 7.15 当路径与半径为$\boldsymbol{\pi}$的球面相交一次的时候，$\mathbf{SO(3)}$群封闭路径演变示意图。这个半径为$\boldsymbol{\pi}$的球面上的点只有相对的是等价的，路径与其交点用红色实心球表示。路径的起点在原点，终点在半径为$\mathbf{2\pi}$的球面上，如 a)所示。球外的部分可投影到红色虚线所示的球内路径。因此，a)与 b)是等价路径。b)中，两个相对的交点无法通过群元参数的连续变化靠近成为 c)。这就阻断了原始路径成为原点定义的常值映射的可能。这个有些像 d)所示复平面上，不允许虚部出现，则$\mathbf{+1}$与$\mathbf{-1}$无法通过一个连续的变化进行联系。

至此，我们在描述李群时所需要的数学语言的比较严格的描述基本结束。我们的落脚点是李群元素可以用一个参数空间来描述，这个参数空间往往形成一个高维曲面，具有一定的拓扑结构。描述曲面所需要的参数的个数决定李群的阶。

从实用角度，我们也可以简单地把李群说成用$\boldsymbol{r}$个实数描述的元素的集合，记为$\boldsymbol{g(\alpha^1,\alpha^2,\cdots,\alpha^r)}$。因此，存在一个此连续群到$\boldsymbol{r}$维欧氏空间的一对一连续映射。群元的乘法如果用参数来表达，就是:

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\gamma}^1,\boldsymbol{\gamma}^2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}^r)=\mathbf{g}(\boldsymbol{\alpha}^1,\boldsymbol{\alpha}^2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}^r)\mathbf{g}(\boldsymbol{\beta}^1,\boldsymbol{\beta}^2,\cdots,\boldsymbol{\beta}^r)$$

此关系也可简写为:

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\gamma})=\mathbf{g}(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{g}(\boldsymbol{\beta})$$

很显然，$\boldsymbol{\gamma}^1,\boldsymbol{\gamma}^2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}^r$需要由$\boldsymbol{\alpha}^1,\boldsymbol{\alpha}^2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}^r$、$\boldsymbol{\beta}^1,\boldsymbol{\beta}^2,\cdots,\boldsymbol{\beta}^r$来解析表达。如果我们按照前面的习惯，用$\boldsymbol{\varphi}$来描述欧氏空间与曲面投影时的函数关系的话，上述关系对应的表达应该是：

$$\boldsymbol{\gamma}^i = \boldsymbol{\varphi}^i(\boldsymbol{\alpha}^1,\boldsymbol{\alpha}^2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}^r;\boldsymbol{\beta}^1,\boldsymbol{\beta}^2,\cdots,\boldsymbol{\beta}^r)$$

公式 7.1

它可以被简写为：

$$\boldsymbol{\gamma}^i = \boldsymbol{\varphi}^i(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$$

公式 7.2

或

$$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$$

公式 7.3

这些$\boldsymbol{\varphi}^i$是解析函数。从微分流形本身的数学定义，这些解析函数可以形成具有复杂的几何构型的曲面。但实际上，因为群论关心的都是一个实际系统针对某参数的连续变换不变性，针对此流形结构的分析只需要在单位元$\mathbf{g}(\mathbf{0})$附近做展开即可。其局域性质用李代数来描述。在全局性质中，我们需要注意的就是曲面的拓扑性，可以用连通度来描述。就像前面提到的$\mathbf{SU}(\mathbf{2})$与$\mathbf{SO}(\mathbf{3})$。其局域结构，如果我们用李代数来描述的话，两个李代数$\mathbf{su}(\mathbf{2})$与$\mathbf{so}(\mathbf{3})$是同构的 [23]。但$\mathbf{SU}(\mathbf{2})$与$\mathbf{SO}(\mathbf{3})$作为群的拓扑性完全不同。

基于公式 7.1-7.3，从实用的角度，我们可以针对一个李群在其单位元附近的区域使用下面四个条件来进行定义：

1）$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{0})$，$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{0},\boldsymbol{\gamma})$；

公式 7.4

[23] 按照习惯，李群用大写字母，李代数用小写字母。

2）$\boldsymbol{\varphi}$为连续可微函数；

3）对于$\mathbf{g}(\boldsymbol{\alpha})$的逆$\mathbf{g}(\widetilde{\boldsymbol{\alpha}})$，要满足$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\alpha},\widetilde{\boldsymbol{\alpha}})=\mathbf{0}$；

公式 7.5

4）由结合律$\mathbf{g}(\boldsymbol{\alpha})\big(\mathbf{g}(\boldsymbol{\beta})\mathbf{g}(\boldsymbol{\gamma})\big)=\big(\mathbf{g}(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{g}(\boldsymbol{\beta})\big)\mathbf{g}(\boldsymbol{\gamma})$，可知：

$$\boldsymbol{\varphi}\big(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})\big)=\boldsymbol{\varphi}\big(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}),\boldsymbol{\gamma}\big)$$

公式 7.6

李群就是群元实参数间关系可以用这种形式表达的具有微分流形结构的拓扑群。

就像群有子群、直积群，李群也有子群、直积群，前者称为李子群。相关的定义如下。

定义 7.27 李子群：设$\mathbf{H}$是李群$\mathbf{G}$的一个子群，$\mathbf{H}$也是$\mathbf{G}$的流形的子流形。这个时候，如果$\mathbf{H}$本身也构成一个李群，则称$\mathbf{H}$是$\mathbf{G}$的李子群。

在这个李子群的定义中，并不要求$\mathbf{H}$是$\mathbf{G}$的正则子流形。如果$\mathbf{H}$是李群$\mathbf{G}$的子群，且$\mathbf{H}$是$\mathbf{G}$的流形的正则子流形，则$\mathbf{H}$也是$\mathbf{G}$的李子群（得到这个结论时，不需要有上面定义中$\mathbf{H}$本身也构成一个李群这个要求）。

定义 7.28 李群的直积群：设两个李群$\mathbf{G}_1$、$\mathbf{G}_2$，它们的直积首先构成群，其次构成光滑流形。这个直积群也满足李群的定义，称为这两个李群的直积群，也是李群。

7.5 李代数

我们从单位元素附近一个李群的群元的微分表达出发来开展本节讨论。在单位元附近，根据泰勒展开：

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{A}(\mathbf{0}) + \sum_{k=1}^{\mathrm{r}} \boldsymbol{\alpha}_k \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\alpha}_k} \mathbf{g}(\boldsymbol{\alpha})\right)\Bigg|_{\alpha=0} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\mathrm{r}}\sum_{l=1}^{\mathrm{r}} \boldsymbol{\alpha}_k \boldsymbol{\alpha}_l \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\alpha}_k}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\alpha}_l} \mathbf{g}(\boldsymbol{\alpha})\right)\Bigg|_{\alpha=0} + \mathbf{0}(\boldsymbol{\alpha}^3)$$

公式 7.7

定义此李群的无限小生成元:

$$\mathbf{X}_k = \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\alpha}_k} \mathbf{g}(\boldsymbol{\alpha})\right)\Bigg|_{\alpha=0}$$

公式 7.8

以及一个二次导数:

$$\mathbf{X}_{kl} = \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\alpha}_k}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\alpha}_l} \mathbf{g}(\boldsymbol{\alpha})\right)\Bigg|_{\alpha=0}$$

公式 7.9

则上式可写为:

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{g}(\mathbf{0}) + \sum_{k=1}^{\mathrm{r}} \boldsymbol{\alpha}_k \mathbf{X}_k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\mathrm{r}}\sum_{l=1}^{\mathrm{r}} \boldsymbol{\alpha}_k \boldsymbol{\alpha}_l \mathbf{X}_{kl} + \mathbf{0}(\boldsymbol{\alpha}^3)$$

公式 7.10

这时,可结合$\mathbf{g}(\boldsymbol{\alpha})^{-1}\mathbf{g}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{g}(\mathbf{0}) + \mathbf{0}(\boldsymbol{\alpha}^2)$这个性质,得到:

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\alpha})^{-1} = \mathbf{g}(\mathbf{0}) - \sum_{k=1}^{\mathrm{r}} \boldsymbol{\alpha}_k \mathbf{X}_k + \sum_{k=1}^{\mathrm{r}}\sum_{l=1}^{\mathrm{r}} \boldsymbol{\alpha}_k \boldsymbol{\alpha}_l \mathbf{X}_k \mathbf{X}_l - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\mathrm{r}}\sum_{l=1}^{\mathrm{r}} \boldsymbol{\alpha}_k \boldsymbol{\alpha}_l \mathbf{X}_{kl} + \mathbf{0}(\boldsymbol{\alpha}^3)$$

公式 7.11

这样,对于公式 7.5 提到的$\mathbf{g}(\boldsymbol{\alpha})$的逆$\mathbf{g}(\widetilde{\boldsymbol{\alpha}})$,就有了我们前面提到的$\mathbf{g}(\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}) = \mathbf{g}(-\boldsymbol{\alpha}) + \mathbf{0}(\boldsymbol{\alpha}^2)$了。

上一节最后,我们提到过微分流形根据其定义是可以描述任意曲面的。李群具有微分流形结构。需要指出的是,由于李群描述的是一个实际系统针对某参数的连续变换不变性,其微分流形结构往往比较简单。这使得针对此流形结构的分

析往往最终可以落在单位元附近,针对其无穷小生成元的分析来进行。具体而言,对于李群的参数（比如这里记作$\boldsymbol{\beta}$）是其参数空间中一个有限值的情况，可取单位元附近的小量$\boldsymbol{\beta}/\boldsymbol{n}$（在$\boldsymbol{n}$是一个很大的整数的时候），利用:

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\beta})=\mathbf{e}^{\sum_{k=1}^{\mathrm{r}}\beta_k\mathrm{X}_k}=\left(\mathbf{e}^{\sum_{k=1}^{\mathrm{r}}\frac{\beta_k}{n}\mathrm{X}_k}\right)^{n}=\left(\mathbf{g}(\mathbf{0})-\sum_{k=1}^{\mathrm{r}}\frac{\boldsymbol{\beta}_k}{\boldsymbol{n}}\mathbf{X}_k\right)^{n}=\left(\mathbf{g}(\boldsymbol{\beta}/\boldsymbol{n})\right)^{n}$$

公式 7.12

的关系，将针对其性质的$\mathbf{g}(\boldsymbol{\beta})$性质的分析转化为对$\mathbf{g}(\boldsymbol{\beta}/\boldsymbol{n})$的分析。这时，不光单位元附近的群元的性质，所有李群群元的性质，均落脚在了李群的无限小生成元上。最早，Weyl 在基于对称性可由 e 指数函数表达这样一个性质，将上面的这些$\mathbf{X}_k$理解为力学量。与之相应,$\mathbf{e}^{\sum_{k=1}^{\mathrm{r}}\beta_k\mathrm{X}_k}$就对应一个伸缩因子。规范这个词（gauge）的原意是度规，对应的就是这个意思。后期，人们认识到物理学中的力学量实际上对应$\mathbf{I}_k$，它与上述$\mathbf{X}_k$的关系是:

$$\mathbf{I}_k=-i\mathbf{X}_k$$

或者说:

$$\mathbf{X}_k=i\mathbf{I}_k$$

公式 7.13

也就是说物理学中的无限小生成元是$\mathbf{I}_k$，对应实际的力学量，期待值也为实数。因此，公式 7.12 中 e 指数的指数也变成了虚数，对应相位。基于此，我们也可以在一定程度上理解杨振宁先生回顾 20 世纪物理学的发展时，将相位因子、对称性与量子化一起列为同等重要的关键词了[27]。

由上述讨论,我们可以将关于李群的讨论聚焦在其单位元附近的局域结构上。这对应的就是李代数的内容。不同李群的区别主要体现在其生成元的性质与数目的区别，生成元的数目等于其群参数的数目，也就是其维度。因此，针对李群性

质的分析最终要落到对$\mathbf{X}_k$、$\mathbf{X}_{kl}$这些量的描述上。前面我们由$\mathbf{g}(\boldsymbol{\alpha})^{-1}$与$\mathbf{g}(\boldsymbol{\alpha})$互逆这样一个条件，得到了$\mathbf{g}(\boldsymbol{\alpha})^{-1}$的表达式。如果我们关心的李群为 Abel 群，则由公式 7.12 可知其$\mathbf{r}$个生成元必互易。这时，这个李群就可以写成是$\mathbf{r}$个单参数李群的直积，它是很容易被处理的。李群的复杂往往体现在非 Abel 的情况。这时，不同$\mathbf{X}_k$间不互易。其根源，是不同自由度之间的相互作用。此相互作用是真实的，我们需要利用一个能够显示其非Abel性的等式来针对其无限小生成元进行分析。

我们用到的性质是单位元附近的某个在非 Abel 的情况满足：

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\beta})^{-1}\mathbf{g}(\boldsymbol{\gamma})^{-1}\mathbf{g}(\boldsymbol{\beta})\mathbf{g}(\boldsymbol{\gamma}) \neq \mathbf{g}(\mathbf{0})$$

公式 7.14

这个$\mathbf{g}(\boldsymbol{\beta})^{-1}\mathbf{g}(\boldsymbol{\gamma})^{-1}\mathbf{g}(\boldsymbol{\beta})\mathbf{g}(\boldsymbol{\gamma})$等于某个非单位元$\mathbf{g}(\boldsymbol{\alpha})$。这时候，我们需要根据公式 7.10、7.11，写出：

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{g}(\mathbf{0}) + \sum_{k=1}^{\mathbf{r}} \boldsymbol{\beta}_k \mathbf{X}_k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\mathbf{r}}\sum_{l=1}^{\mathbf{r}} \boldsymbol{\beta}_k \boldsymbol{\beta}_l \mathbf{X}_{kl} + \mathbf{0}(\boldsymbol{\beta}^3)$$

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\beta})^{-1} = \mathbf{g}(\mathbf{0}) - \sum_{k=1}^{\mathbf{r}} \boldsymbol{\beta}_k \mathbf{X}_k + \sum_{k=1}^{\mathbf{r}}\sum_{l=1}^{\mathbf{r}} \boldsymbol{\beta}_k \boldsymbol{\beta}_l \mathbf{X}_k \mathbf{X}_l - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\mathbf{r}}\sum_{l=1}^{\mathbf{r}} \boldsymbol{\beta}_k \boldsymbol{\beta}_l \mathbf{X}_{kl} + \mathbf{0}(\boldsymbol{\beta}^3)$$

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\gamma}) = \mathbf{g}(\mathbf{0}) + \sum_{k=1}^{\mathbf{r}} \boldsymbol{\gamma}_k \mathbf{X}_k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\mathbf{r}}\sum_{l=1}^{\mathbf{r}} \boldsymbol{\gamma}_k \boldsymbol{\gamma}_l \mathbf{X}_{kl} + \mathbf{0}(\boldsymbol{\gamma}^3)$$

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\gamma})^{-1} = \mathbf{g}(\mathbf{0}) - \sum_{k=1}^{\mathbf{r}} \boldsymbol{\gamma}_k \mathbf{X}_k + \sum_{k=1}^{\mathbf{r}}\sum_{l=1}^{\mathbf{r}} \boldsymbol{\gamma}_k \boldsymbol{\gamma}_l \mathbf{X}_k \mathbf{X}_l - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\mathbf{r}}\sum_{l=1}^{\mathbf{r}} \boldsymbol{\gamma}_k \boldsymbol{\gamma}_l \mathbf{X}_{kl} + \mathbf{0}(\boldsymbol{\gamma}^3)$$

公式 7.15

然后，利用$\mathbf{g}(\boldsymbol{\alpha})$的表达式（公式 7.10）与：

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\beta})^{-1}\mathbf{g}(\boldsymbol{\gamma})^{-1}\mathbf{g}(\boldsymbol{\beta})\mathbf{g}(\boldsymbol{\gamma}) = \mathbf{g}(\boldsymbol{\alpha})$$

公式 7.16

我们可以得到关于其无限小生成元$\mathbf{X}_k$的限制条件：

$$[\mathbf{X}_i,\mathbf{X}_j]=\sum_{k=1}^{\mathbf{r}}\mathbf{C}_{ij}^{k}\mathbf{X}_k$$

公式 7.17

与：

$$\sum_{i=1}^{\mathbf{r}}\sum_{j=1}^{\mathbf{r}}\boldsymbol{\beta}_i\boldsymbol{\gamma}_j\mathbf{C}_{ij}^{k}=\boldsymbol{\alpha}_k$$

公式 7.18

这里的$\mathbf{C}_{ij}^{k}$称为李群的结构因子。

这里，生成元的对易关系（公式 7.17）构成了一个反映李群性质的李代数。准确地说，这是一个以生成元为基，以其线性组合为向量，定义了向量加法、线性组合、向量乘法的线性代数。其乘法规则，可以用对易关系（实际上是向量乘法的不互易）体现出来。在第二章有限群表示理论部分，我们用到过群代数的概念。那里，因为是有限群，我们是以群元为基，以其线性组合为向量，再基于群元乘法定义向量乘法，得到了一个代数。我们利用群代数得到了群表示理论中的关键定理（正交性、完备性定理）。这里，李群是无限群，无法以其群元为基定义代数。但其群元可以用 e 指数函数基于无限小生成元表示这个优异的性质，决定了我们可以基于无限小生成元定义一个代数，即李代数。其具体定义（从实用角度出发，我们这里仅讲李群的李代数，它是一个实代数）如下。

定义 7.29 李代数：对一个李群$\mathbf{G}$，基于其无限小生成元的线性组合可构造实数域上的有限维向量空间$\mathfrak{g}$。对其中任意向量$\mathbf{X}$、$\mathbf{Y}$，可定义李积$[\mathbf{X},\mathbf{Y}]$，它也是这个空间中的向量。李积满足如下条件：

1） 双线性。对$\forall\mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbf{R}$，$\forall\mathbf{X},\mathbf{Y},\mathbf{Z}\in\mathfrak{g}$，有：

$$[\mathbf{aX}+\mathbf{bY},\mathbf{Z}]=\mathbf{a}[\mathbf{X},\mathbf{Z}]+\mathbf{b}[\mathbf{Y},\mathbf{Z}]$$
$$[\mathbf{Z},\mathbf{aX}+\mathbf{bY}]=\mathbf{a}[\mathbf{Z},\mathbf{X}]+\mathbf{b}[\mathbf{Z},\mathbf{Y}]$$

2） 幂零性。对$\forall \mathbf{X} \in \mathfrak{g}$，有：

$$[\mathbf{X}, \mathbf{X}] = \mathbf{0}$$

3） 雅可比性。对$\forall \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \in \mathfrak{g}$，有：

$$\big[[\mathbf{X}, \mathbf{Y}], \mathbf{Z}\big] + \big[[\mathbf{Y}, \mathbf{Z}], \mathbf{X}\big] + \big[[\mathbf{Z}, \mathbf{X}], \mathbf{Y}\big] = \mathbf{0}$$

则称$\mathfrak{g}$是李群$\mathbf{G}$的李代数。

由此定义，可得：

$$[\mathbf{X} + \mathbf{Y}, \mathbf{X} + \mathbf{Y}] = \mathbf{0}$$

进而

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = -[\mathbf{Y}, \mathbf{X}]$$

由公式 7.17，我们知道如果取李群无限小生成元$\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}, \cdots, \mathbf{X_r}$为基定义$\mathfrak{g}$的话，有：

$$\mathbf{C}_{ij}^{k} + \mathbf{C}_{ji}^{k} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{C}_{ij}^{k}\mathbf{C}_{kq}^{p} + \mathbf{C}_{jq}^{k}\mathbf{C}_{ki}^{p} + \mathbf{C}_{qi}^{k}\mathbf{C}_{kj}^{p} = \mathbf{0}$$

这是此李群的$\mathbf{r^3}$结构常数需要满足的性质。就像我们用$\mathbf{G}$表示李群，$\mathfrak{g}$表示李代数，实际应用中，我们也会用大写字母表示李群，小写字母表示李代数，比如$\mathbf{SU(2)}$、$\mathbf{SO(3)}$与$\mathbf{su(2)}$与$\mathbf{so(3)}$。至此，本章关于李群李代数中一些基本概念的介绍结束，更多内容，请大家参考这方面的专业书籍。

参考文献

[25] 梁灿彬、周彬，*微分几何入门与广义相对论*，北京：科学出版社，2019

[26] 丘维声，*群表示论*，北京：高等教育出版社，2011

[27] 高崇寿，*群论及其在粒子物理学中的应用*，北京：高等教育出版社，1993

[28] 赵敦华，*西方哲学简史*，北京：北京大学出版社，2001

[29] 杨振宁、翁帆，*晨曦集*，北京：商务印书馆，2018