

1. 证明：只有一个三阶群。
2. 证明：两个子群的交集为子群。
3. 证明：有两个四阶群，且都是 Abel 群。
4. 对群 $G = \{1, i, -1, -i\}$ ，有没有非平庸的不变子群。如有， G 对它的商群是什么？
5. 生成矩阵群，它的两个元素为 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ，此群的阶是多少？共有多少个共轭类？
6. 说出 D_3 群的子群与不变子群。
7. 证明：不是子群本身的陪集不包含子群的元，且不是群。
8. 一个群可不可以有几个不同的不变子群。
9. 证明：除恒元外其它所有元都是二阶的群是 Abel 群。
10. 试问下列三个矩阵，按矩阵乘法规则，是否形成一个群？

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

至少需要添加几个矩阵才能构成一个群？求出这些要添加的矩阵，以及群的共轭类。

11. 考虑下面六个函数的集合：

$$f_1(x) = x; f_2(x) = 1 - x; f_3(x) = x/(x - 1);$$

$$f_4(x) = 1/x; f_5(x) = 1/(1 - x); f_6(x) = (x - 1)/x。$$

定义两个函数的乘积是以后面函数的输出作为前面函数的输入得到的整体函数依赖关系，如 $(f_1 f_3)(x) = f_1(f_3(x))$ 。证明该集合在此运算法则下形成一个群，且该群与 D_3 群同构。

12. 设 C_i 为群中的一个类, C_i^* 为 C_i 中元素的逆的集合。证明: C_i^* 也是一个类。

13. 写出下列置换的逆:

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 7 & 1 & 2 & 8 & 4 & 6 \end{pmatrix}, p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 6 & 8 & 1 & 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

并验证 $(p_1 p_2)^{-1} = p_2^{-1} p_1^{-1}$ 。

14. 找出三阶对称群 S_3 的所有子群, 并指出哪个子群是不变子群, 哪个子群是含

元素 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ 的循环群?

15. 求六阶循环群的所有不变子群, 以及其对应的商群。

16. 用两个元素A与B生成一个群, 使得它仅仅遵从关系式: $A^2 = B^k = (AB)^2 = E$,

式中k是大于1的有限整数。

17. 求 D_3 群的自同构群, 它是内自同构群吗?

18. 设群只有一个阶为2的元素h, 证明: 对 $\forall g \in G$, 有 $gh = hg$ 。

19. 在 D_4 群中, 取子群 $G_1 = \{e, r, r^2, r^3\}$, $G_2 = \{e, a\}$, 证明: $D_4 = G_1 \otimes_s G_2$ 。

20. 若 $G = H \otimes K$, 证明: 1) 商群 G/H 与 K 同构; 2) G 与 H 和 K 同态。

21. 若 $G = H \otimes_s K$, 证明: 1) 商群 G/H 与 K 同构; 2) G 与 K 同态。

22. 一个群与其子群是否总是同态, 为什么?

23. H 是 G 的子群, 已知它的两个陪集 $fH = gH$ 。问 Hf^{-1} 与 Hg^{-1} 这两个陪集是否相等?