

自然哲学与物理学

李新征

北京大学物理学院

前言

在同龄科研人员中，笔者算是比较喜欢写书的。这只是笔者自己的习惯，并非由于自己对物理学有特别的认识与理解。

笔者的职业是大学教师。在教学过程中，笔者习惯于把学生当成是曾经的自己。在面对学生讲解某门课程的时候，笔者会针对自己当年在学习一些具体课程以及在学习物理学这个整体学科的时候的有过的困惑，给出一些能力范围内的解答或者读书建议。这些年，笔者主讲或参与建设过一些课程。由于在北京大学上课时面临的由所谓的学霸们组成的听众群体会给授课人带来巨大的压力，笔者会强迫自己在课下进行比较多的阅读。不夸张地讲，自入职以来，笔者花在教学相关工作上的时间是远远大于笔者花在科研上的时间的。这在同龄科研人员中并不多见。这些阅读所形成的内容无从发泄。逐渐地，笔者就养成了过几年接一门新课，然后总结出版一本教材的习惯了。至今，笔者完成了两本类似书籍的出版【李新征，2014】【李新征，2024】，其中的一本还出了第二版。

这两本教材的写作秉承的是“针对自己曾经遇到的困惑进行详细解答”的原则。因此，表述方面的最大特点就是“不追求多么漂亮的表述，而是以大白话为主来展开讨论”。这样写的好处是对于遇到了和笔者当年类似问题的同学，相对好理解一些。但是对于已经入门，或者没有遇到笔者类似问题的同学，就会显得啰嗦，甚至逻辑混乱。对于后一部分读者，笔者表示歉意，并建议这部分同学/老师选择其它教材。笔者退休前，上面提到的几年接一门课并总结出一本讲义的习惯应该会继续。目的只是为了增加我们中文教材的多样性，无意获得太多人的肯定或者什么所谓的荣誉。笔者坚信这样可以为我们的物理学教育的进步尽到一

些绵薄之力。如果身体情况允许，这个习惯还会一直继续。

本书名为《自然哲学与物理学》。它的内容，来自笔者近几年在北京大学讲授的一门叫做《今日物理》的本科生通识核心课。应该说，《今日物理》这门课在我们国家大学的本科教育中，并不是传统的、已成型的课程。但是在北京大学物理学院，它的开设已经有了一段比较长的历史。早在上世纪九十年代，该课程就由我院理论物理研究所的高崇寿先生在全校范围内作为公选课开设¹。这个时间节点，不光远远早于笔者将其课程内容整理成书这个时间节点，还远远早于北京大学提倡通识教育这个时间节点²。高先生退休后，《今日物理》长期由物理学院凝聚态物理与材料物理研究所的张酣老师主讲³。2020-2021 学年的春季学期，笔者接过。

在第一年的课程准备过程中，笔者开始的时候认为可以参考之前两位主讲教师的教程来开展讲解，重点是今天物理学的整体介绍【高崇寿、谢柏青，2004】
【赵凯华，2005】【张礼，2009】【张酣，2021】。但随着备课的进行，以及这些年的积累，笔者越来越清晰地认识到为了理解今天的物理学，我们首先要把物理学的昨天看清。换句话说，我们需要梳理物理学史（如图 0.1 所示）【郭奕玲、沈慧君，2005】。这样的话，才可以让选课的学生在进行完课程的学习后脑子里面

¹当时物理学院还叫物理系。现在，物理学院下属的理论物理研究所对应的是当时的理论物理教研室。高崇寿先生也与谢柏青先生一起写过一本《今日物理》【高崇寿、谢柏青，2004】。感兴趣的读者，在看本书的过程中，可以参考学习。

²北京大学开始大规模提倡通识教育，已经是进入本世纪的第二个十年之后的事情了（林建华先生担任校长期间）。

³基于课程的讲义，张酣老师也出版了一本书，名为《漫步物理世界》【张酣，2021】。感兴趣的读者，在看本书的过程中，也可以参考学习。

有一副“关于物理学的画卷”。这幅花卷对于我们理解物理学是非常重要的！而在梳理物理学史的过程中，笔者每时每刻又都能体会到物理学的哲学属性在物理学的发展过程中扮演的重要角色【廖玮，2021】【朱守华，2024】。比如，如果不了解从弗朗西斯·培根（Francis Bacon，1561－1626 年）开始，经历了笛卡尔（Rene Descartes，1596－1650 年）、斯宾诺莎（Baruch/Benedict Spinoza，1632－1677 年）、洛克（John Locke，1632－1704 年）、莱布尼茨（Gottfried Wilhelm Leibniz，1646－1716 年）、休谟（David Hume，1711－1776 年），到康德（Immanuel Kant，1724－1804 年）、黑格尔（Georg Wilhelm Friedrich Hegel，1770－1831 年）的关于科学的哲学层面的思考，或许我们很难体会二十世纪初以爱因斯坦（Albert Einstein，1879－1955 年）、玻尔（Niels Henrik David Bohr，1885－1962 年）、玻恩（Max Born，1882－1970 年）、德布罗意（Louis Victor de Broglie，1892－1987 年）、海森堡（Werner Heisenberg，1901－1976 年）为代表的那些欧洲特别是德国物理学家们在产生革命性的物理学理论的过程中的纠结与选择⁴。

⁴从物理学的贡献上来说，像狄拉克（Paul Dirac，1902－1984）、薛定谔（Erwin Schrödinger，1887－1961 年）这样的人物肯定也非常重要。但笔者这里强调的是在哲学层面对当时量子理论应该向哪个方向发展的思考。从这个角度，笔者认为这五个人更具代表性。其中，爱因斯坦、玻尔、玻恩年长一些。在上世纪的 20 年代，爱因斯坦和玻尔充当的更多的是导师的角色。玻恩既是导师，也在一线工作。海森堡和德布罗意是年轻的学生，代表着活力。这种活力对于量子理论完成从量子论到量子力学的转变至关重要！

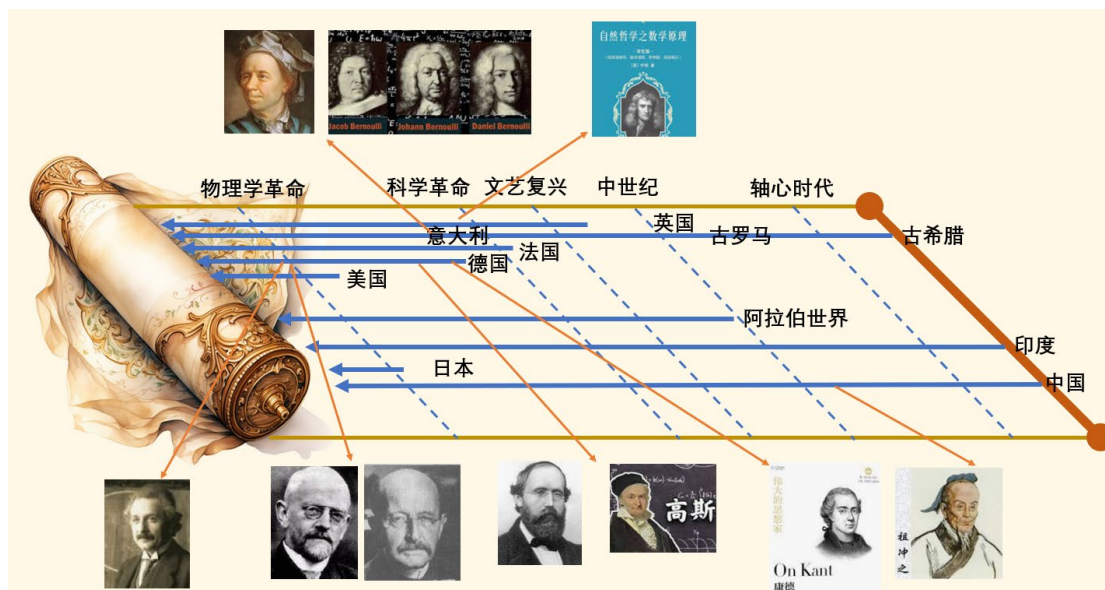


图 0.1 物理学史示意图。在笔者看来，物理学在我们的眼里应该是一副画卷。当我们缓缓展开这副画卷的时候，物理学的历史、历史中人物、人物身上以及人物之间发生的故事，应该在我们的眼前栩栩如生地、缓缓地展现出来。这样，我们才能深刻地理解物理学。物理学在我们的眼里，也才能是鲜活的。当然，这个图里有很多数学家、哲学家。这与物理学的自然哲学属性密切相关，后面我们会详细解释。

基于这个考虑,笔者将课程拟覆盖的内容分三个方面来展开。第一,是对物理学发展史的总结与陈述;第二,是对物理学这门学科的哲学属性的思考;第三,是对已经成熟的物理学知识体系的讲解以及对一些现代物理学前沿领域的讲解。

在这三方面的内容中，考虑到我们物理学专业教育的特点（我们很注重具体的专业知识的传授），笔者认为对学生和多数读者而言前两个方面（物理学史、物理学的哲学属性）而非第三个方面（今天的物理学）反而会更重要一些。在这前两个方面里面，物理学史在我们的现有教材中比较缺乏。幸运的是，最近几年很多大学的物理老师对其重要性也都有了比较清楚的认识。很多学校也在企图开设《物理学史》的本科生课程。但对于第二个方面（物理学的哲学属性），笔者身边的同行关注的就相对少了很多。

应该说,这与科学革命后科学脱离哲学进而专门化,科学内部的分支各自成熟,进而我们的科研人员会不自主地关注非常具体的问题这样一个历史潮流是密切相关的。毕竟,哲学的内容既不那么具体,也不那么科学⁵。在我们的学科分类中,很多时候哲学更是被当作了文科⁶。但是这些年随着笔者年纪的增长以及科研工作的积累,笔者越来越能体会到在进行一些具体的科研工作时,充分了解物理学史与物理学的哲学属性是非常重要的。在学习哲学的过程中,笔者又进一步认识到它确实是万科之母。自然哲学是哲学中的重要组成部分。因此,从根儿上说,哲学有很强的理学属性。基于这个理解,在整理这本书的时候,笔者希望对这两点内容(物理学史、物理学的哲学属性)进行一个强调⁷,既针对物理学专业的学生,也针对其它专业的学生。2021年7月,笔者开始整理书稿。几经周折,笔者在2024年12月将书名定为《自然哲学与物理学》⁸。

⁵人类历史上,特别是从科学革命开始到十九世纪中叶前这段时间,很多哲学家进行过将哲学做成科学的尝试,最终都失败了。这种失败应该说也是哲学的胜利,这也是我们希望在本书强调的一个内容。

⁶高考时,多数哲学系应该是从文科招生的。

⁷这个很重要!举个例子,不少物理系的老师在讲《量子力学》的时候,甚至直接跟学生说你不要跟我讨论那些概念背后的哲学,我告诉你怎么算就可以了。这样培养出来的,是技工,不是学者。当然,笔者承认会算是第一步,但大学课程的追求应该高于这个。同时,笔者也承认要把概念讲清楚很难。这个只能说是讲到讲授者的能力范围的上限。后面的深入理解,是学生的事情。但不讲,肯定不合适。

⁸这里特别感谢刘玉鑫老师!本书的命名过程经历了好几个版本,《自然哲学与物理学》之前的版本是《自然哲学之物理学》。再之前,是《今日物理》、《物理学史》等题目。笔者开始更喜欢《自然哲学之物理学》,但笔者可以想象这个名字会引起很大的歧义。2024年12月16日,在一次北京大学物理学院关于教学的会议讨论中,笔者讲述了自己的各种考虑之后。与会的吴飙老师、曹庆宏老师、李湘庆老师、林熙老师、檀时钠老师、孟策老师都提出了一些很有帮助的意见,一定程度上可以反映出本书出版后可能产生的读者反馈。最后,笔者听取了刘玉鑫老师关于书名的建议。下面,笔者会详细解释自己为什么一定要在书名中体现“自然哲学”。

基于如上介绍，我们的前言将按：1) 从《今日物理》到《自然哲学的物理学》的题目转变，2) 本书的构架，3) 读者应放低对本书期待的一些说明，以及4) 本书内容的目录与致谢，共四部分展开。

从《今日物理》到《自然哲学与物理学》书名的转变

我们先从书名的多次转变说起。前面提到的笔者在授课过程中对课程认识的改变对于笔者而言是作为结果出现的。促成这种改变的原因，笔者认为与自己学习物理的过程中的很多困惑是相关的。对《今日物理》课程的准备，对于笔者消除这些困惑起到了至关重要的作用。而这个过程中，就物理学的哲学属性这一点的认识最为关键！出于这个考虑，我们把本书命名为《自然哲学与物理学》。下面，笔者把这个过程分享出来供读者体会。

从1996年高中毕业进入武汉大学物理系学习算起，笔者从事物理学专业的学习和研究已经有超过二十八年的时间了。2012年的春天，笔者有幸在王恩哥老师、田光善老师等前辈的帮助下来到北京大学物理学院这个梦想中的平台开始预聘考核（tenure track）阶段的工作。因为早期遇到的几个学生都很优秀，大约在2016年，笔者感觉自己的考核从硬件指标上来讲应该不会有太大问题⁹。相应的，在科研上也就产生了一种懈怠，乃至困惑。主要的问题，是笔者对自己在科研过程中所产生的成果的重要性认识地并不充分。

当时，虽然笔者总拿普林斯顿高研院创始人弗莱克斯纳（Abraham Flexner, 1866–1959 年）提倡的对“无用知识”的追求的精神去鼓励自己。但不得不说，

⁹我们的 tenure 是有固定标准的。实际上，所有应试的东西，都有标准。这个对于我们中国人都很难。难的是没有标准的事情。在第六章，讲到康德的时候，读者应该会有体会。

自己对物理学这门学科以及对哲学的认识距离弗莱克斯纳所面对的那些顶尖科学家们相差实在太远了¹⁰。因此，对这句话的理解流于表面。作为一个结果，在笔者感觉自己预聘考核基本可以完成后，对科研的兴趣是有所丧失的。这种状况持续了好几年。在这几年间，笔者将很多精力放在教学与公共服务上，因为当时的笔者觉得这些事情更有意义。

2020-2021 学年的春季学期，笔者开始主讲《今日物理》。同样在这段时间，笔者课题组有几项纯理论工作先后完成或先后起步【Ye, 2021】【Ye, 2023】【Ouyang, 2024】。因为准备课程讲义过程中对物理学史的了解，笔者有了一定的能力把这些工作放到学科发展的历史中去体会其意义¹¹。如果对其价值从学科发展的角度判断给出的答案是肯定的，那么就说服学生以一种不求结果的心态去开展研究¹²。而令笔者惊喜的，是这样做的一个直接的结果就是笔者可以在很大程度上消除了

¹⁰他/她们那代物理学家不光物理学与数学的素养好，哲学素养也往往也很高。他们除了介绍物理学史并出版关于物理学的哲学属性的专著，在介绍物理学的具体内容的时候，往往也会融入很多哲学的思考。大家可以从文献【玻恩, 2015】、【劳厄, 1978】、【马赫, 2014】、【马赫, 2016】、【爱因斯坦, 2015】获得一定的体会。具体到普林斯顿高研院，据说爱因斯坦（Albert Einstein, 1879-1955 年）对于这个工作很感兴趣，除了薪酬，另一个原因就是他觉得可以与哥德尔（Kurt Friedrich Gödel, 1906-1978 年）一起散步回家。再举一个例子，也可以体现哲学在这里的受重视程度。冯·诺伊曼（John von Neumann, 1903-1957 年）与魏格纳（Eugene Paul Wigner, 1902-1995 年）是一对从高中开始就建立了深厚友谊的好友。他们在上世纪 30 年代初一起到普林斯顿工作。在续聘的环节，冯·诺伊曼得到了更快的认可。这肯定不是因为魏格纳不优秀（实际上他已经优秀地不能再优秀了）。唯一笔者能想到的原因是来自对比，毕竟前者的工作更能体现哲学（比如逻辑学）的一些特质。而后者的成就多为“具体的知识”，也就是科学上的成果。关于这句话，读者可随着针对本教材的阅读的进行慢慢有体会。当然，在后者短暂离开后，校方很快意识到了这个错误，并重新将其邀请回普林斯顿。笔者从这些历史，感受到的也是普林斯顿高研中心对科学背后的哲学的重视。

¹¹教和学是分不开的。教学肯定会占用科研时间，从短期来讲会影响论文产出。但是教学过程中对学科内容的体会，是会在长一点的时间周期内反哺科研的。这是笔者进入北京大学工作 12 年后的一个切身体会。

¹²很庆幸笔者的学生基本也都是这样的人，没有给笔者太多现实的压力，衷心感谢他/她们！

之前的困惑了¹³。比如，笔者企图研究一个统计物理方面的问题，或者一个电子结构计算方面的问题。笔者在上这门课之前，对统计物理与固体物理的发展史了解的不多，因此并没有这种判断力。而在上了这门课之后，由于备课过程中会很自然地接触此类内容，进行这个判断就容易了很多。本书中，我们当然不会讲得太细，但还是会对讲义的准备过程中形成的一些对物理学的认识，进行一个相对系统的总结。分享的对象，在笔者的脑海中，既是本书的读者，也是少年时代的那个立志学习物理学之后在某个阶段丧失了一些科研兴趣的自己。

基于这个梳理与总结，笔者在上课过程中还可以进一步体会到物理学背后一些哲学内容。对物理学的哲学属性的理解，毫不夸张地讲，让笔者重新认识了物理学。基于这个体会，让笔者会在安排我们的课程地时候除了物理学史，刻意地包含一些关于科学的哲学属性的讨论。

此外，在阅读这哲学方面的书籍与文献的时候，笔者还发现如果对照科学整体而不只是针对物理学这个一级学科，物理学史与物理学的哲学属性这两点也是有对应的（科学技术史与科学技术哲学）。具体而言，在我国的学科分类目录中，存在科学技术史（简称科技史）与科学技术哲学（简称科学哲学）两个学科。科技史在我国属于一个独立的理学一级学科。科学哲学，则是哲学这个一级学科下属的二级学科，以前叫自然辩证法。它们在严格意义上是属于不同的学科领域的。

¹³这里可以稍微展开讲一下。具体而言，标准就两个。第一，是基于自己对学科发展的历史的了解，针对学科现状的现状，去判断这个工作是否为这个学科增加新的人们感兴趣的知识？这个知识当然要是科学的、确定性的知识，要可以被证实的。第二，就是看这个工作是否存在可能的实用价值？当然，在两个标准的内部，也有级别的判断。比如，第一个里面的知识，也有深度与适用范围的问题；第二个判据里面实用价值的大小与实用性的大小，也有层级。笔者从事基础研究，主要依赖第一个判据。当我们比较好的理解物理学发展史后，再基于这两点（尤其是第一点）进行判断，就比较容易了。

但就像二十世纪颇具影响的一名数学家与科学哲学家拉卡托斯（Lakatos Imre, 1922–1974 年）所讲的“没有科学史的科学哲学是空洞的，没有科学哲学的科学史是盲目的”，这两个学科实际上也是无法分隔的。

把这种关系对应到《今日物理》这门课程的教学上，笔者会发现我们也需要总体对“物理学的哲学属性”以及“物理学史”进行把握，并且将它们的关系讲出来，才能让学生更好地理解我们物理学。最后，考虑到我们的《今日物理》这个课程名字里面毕竟有“今日”这个关键词，我们还要详细地介绍对今天的大学生而言需要知道的那些物理学常识（包含目前成熟的物理学知识以及前沿研究的一些关键领域的新内容）。换句话说，我们需要在物理学的哲学属性、物理学史、以及今天的物理学之间寻求一种相对平衡，并且对前面两部分内容（物理学的哲学属性、物理学史）进行一定程度上的强调。

基于这个出发点，笔者把《今日物理》课程的讲义命名为《自然哲学与物理学》，并希望其出版进而为对物理学感兴趣的学生与年轻教师提供一些帮助的方式来开展写作。题目看起来很不谦虚，但却是来自上面所讲的那个朴素的考虑¹⁴。

另外，我们还需要说明的是这里的“学生与年轻教师群体”既包括物理学专业的学生与年轻教师，也包含对物理学感兴趣的非物理学专业的学生与年轻教师。其中，包含前者是因为上面提到的笔者经历的挣扎，笔者认为课程内容对物理专业的学生与年轻教师应该是有用的¹⁵。包含后者则是因为《今日物理》课是一门

¹⁴重复一下，这个考虑就是：自己当年学习物理和从事物理学研究的过程中的困惑，以及上课时对课程需要涵盖的内容的理解。

¹⁵笔者通过自身的教育经历，整体上对我们物理学教育的弊端的总结就是：1) 我们的基础课程过于强调一些难的题以及解题方法，而忽略了这些基础知识产生的历史过程与它们在哲学层面的涵义（这使得我们并不能很好的理解物理学的学科属性）；2) 我们的高级课程不能将课程与前沿研究建立联系，学生学完后往往会觉得没用马上忘掉（这使得我们学完还不会做科研）。笔者

“通识课程”。课程的一个目的，是为不从事物理学研究的老师和同学介绍物理学。当然，在课程进行过程中，需要基于物理学史与物理学的哲学属性来介绍今天的物理学。笔者假定的读者的基础，是完成了高中阶段物理的学习，希望了解大学的物理，特别是它与高中物理的区别。应该说，本书所面向的读着群体，是具备这样的基础的。由于笔者并不来自后者这个群体（不从事物理学研究的老师和同学），没有个人经历来体会进而融入写作，只能通过选课过程中学生的反馈来对内容的合理性进行判断。经过几年的尝试与学生的反馈，虽然并不是特别令人满意，但整体感觉是目前这个设计是合理的¹⁶。

本书的构架

书名与大致内容确定之后，下一步就很简单了：要有一个思路，把笔者希望通过本书表达的内容尽量准确地表达。这就需要强调换位思考了！笔者写文章和写书的时候，一般也有这个习惯。这里特别强调一下。前面说过，我们面对的读者有两类（物理专业与非物理专业）。我们需要通过换位思考来体会这两类读者希望从这本书中获取什么样的知识？进而基于这个理解，进行内容构架。

这两类读者需求的共同点是他/她们都希望对物理学有个新的认识。针对这个问题，笔者要做的就是抓住前面提到的关键点：要想理解《今日物理》，最重

的这本书实际上是企图在第一个方面做点事情。几年前，笔者出版过一本《群论及其在凝聚态物理中的应用》，则是希望在第二点上进行一些改善。当然，这两点要想彻底改变很难，需要越来越多的具有一定科研能力的大学教师通过承担不同的课程并完成讲义来一步一步改善。

¹⁶早期选课同学中非物理学专业的比例很高，有不少同学反馈收获很大。但后来因为课程必须考试，非物理学专业的同学在考试中总是比较吃亏，渐渐地就变成了物理学专业学生为主的情况了。因此，这里我们说效果并不是太好。但从选课学生数目来看，内容设计也算合理。

要的是把物理学的哲学属性以及物理学在历史上是怎么发展起来的搞清楚。同时，也要把今日的物理学面临什么样的问题和机遇进行一个尽量全面的梳理。然后，用最简单易懂的方式把这些理解表达出来！我们采取的手段是兼顾历史性与逻辑性，沿着历史的脉络来回顾这门学科的发展¹⁷，进而做展望。中间很多关键的人物之间的关系我们会做一个梳理。这样做的好处是能够帮助读者把一些之前（比如高中、大学阶段）积累的关于物理学或者是科学整体的知识串起来。这实际上也是通识教育的一个目的。

就不同点而言，非物理专业的读者会抱着相对轻松的心态进行阅读，或许本身并不期待对物理学有那么深刻的认识¹⁸。为了满足这部分读者，我们会尽量写得“泛”一些。比如，我们把讨论尽量地向哲学、自然哲学、科学（甚至其发展过程中的宗教因素、政治因素）这些内容上去扩展，强调知识性、趣味性。而对于物理学专业的读者，类比自己的经历，笔者希望把物理学用一种不同于传统的强调知识点讲解的方式进行简单的呈现出。实际上，把前一点做好（针对非物理专业读者的考虑，把历史脉络、哲学属性讲清楚），后一个目标（把物理学用一

¹⁷这里，笔者不自觉地受到了喜马拉雅（一个音频分享平台）上一个由武汉大学哲学系赵林老师主讲的系列讲座《古希腊文明的兴衰》的影响。赵老师在里面经常提到一个词，叫**历史与逻辑相统一**。上世纪末，笔者在武汉大学读本科的时候，就听过赵老师的报告。那些报告对于笔者打开眼界去认识世界，起到过非常重要的帮助。按赵老师的说法，历史与逻辑相统一这个研究方法来自黑格尔（Georg Wilhelm Friedrich Hegel, 1770-1831 年）。在黑格尔的眼里，哲学就是哲学史。通过对哲学史的梳理，他能把哲学用一种简单、系统的逻辑框架串起来。因此，黑格尔在谈哲学问题时（不论时哲学的那个分支），除了深刻、新颖，一个最大的特定就是“系统”。他的论述多会基于简单的逻辑展开，然后使其逐渐深入并系统化。当然，在历史学家看来，这种方式具有一定的形而上的特质。但不得不说，这种方式对于人们系统的理解各种知识，并很好地掌握继续发展它的技能，是很有效的。这里，我们会借助这种方式来展开课程的讲解。看似复杂的物理学，在其发展的过程中，实际上是尊重最简单的逻辑的。

¹⁸深刻的认识还是需要对数学工具的掌握、以及学习与工作经验的长期积累作为基础的。

种不一样的方式呈现出来)自然就达到了。针对后一部分读者,笔者还会在写作过程中加入一些相对专业的内容的重新解读,并引导读者往专业方向进行一些思考。如果前一部分读者(非物理专业)在学习最后这点时遇到问题,不用担心,这些内容仅作参考即可。下面的讨论就是这里说的两部分内容的典型例子(针对非物理专业读者、针对物理专业读者),大家可以先体会一下。

为了便于多数读者的阅读(包括非物理专业读者),我们会从冯友兰先生的名句“哲学是思想人生之思想”出发【冯友兰,2013】,来解释为什么会有哲学¹⁹?进而为什么会有自然哲学²⁰?在此基础上,我们需要解释为什么说物理学是自然哲学中最基础的分支?自然哲学在古希腊是如何系统性的发展的?之后,它在

¹⁹哲学是所有学科的根,当然包括物理学。它也是一切文明上升到一定高度后才能够产生的【赵敦华,2012】。课程开始的时候,我们会按照赵敦华老师《西方哲学简史》中的观点,先认为上升到这个高度的文明主要是希腊文明、华夏文明、印度文明,并在本书地讨论中主要围绕希腊文明与我们华夏文明产生出的哲学展开。在希腊文明的传统观念中,哲学是爱智慧(philosophy, philon 是爱, sophia 是智慧)。这个智慧最好是一种放之四海而皆准的真理。但后来,人们认识到主观的东西很难放之四海而皆准(比如美的感觉,具有很大的主观性),于是哲学除了研究普适的真理,还研究更为广泛的智慧。同时,哲学本身研究的东西具体化后,也会逐步脱离哲学而成为独立学科。从根上来说,理解西方哲学,从爱智慧出发来理解会比较顺。但不同哲学家对哲学有不同定义。比如,冯友兰先生说哲学是思想人生之思想【冯友兰,2013】;黑格尔说哲学就是哲学史。这些都对。在我们东方,早期我们肯定不会有意识地按 philosophy 这个词来看待我们的文明。但我们的传统文化所包含的东西毫无疑问形成了一个完整的哲学体系。上个世纪上半叶,像冯友兰先生这样的学者在系统地学习了西方哲学后,用类似于“思想人生之思想”这种简短的句子对哲学进行了重新表述【冯友兰,2013】。按照此表述,不光传统的西方哲学的东西很自然地会被包括在他们的体系中,我们东方的传统文化也会很自然地进入哲学体系。

²⁰按照冯先生的观点“思想人生之思想”,人生活在自然界,自然就会有自然哲学。自然哲学发展到19世纪,在经历了科学革命后,全面地演化为自然科学。但自然哲学与自然科学本身还是有一点区别的。自然哲学不会像自然科学那样将着眼点放在自然界的局部现象,以知识地累计为目的。相反,自然哲学更倾向于把自然看作一个整体,着眼于自然内在的动力结构与普遍原理。因此,按谢林(Friedrich Wilhelm Joseph Schelling, 1775-1854,他与康德、费希特、黑格尔一样都是德国哲学的代表人物,具体生活的年代比费希特晚,和黑格尔差不多)的说法,自然哲学是思辨的物理学,他为自然科学提供前提和准则。也是因为这个特性,物理学毫无疑问地成为自然科学的所有分支中最能体现自然哲学本质特性的那一个。在很多语境下,人们甚至也会直接说物理学即自然哲学。这里,我们还是希望先澄清一下两者之间的差别。

世纪是经历了什么样的停滞与蛰伏，又通过文艺复兴与科学革命走向现代物理学的辉煌的？这是从历史发展的角度企图进行的趣味性的导读。其中，已经有了很多物理学的哲学属性的思考。

同时，我们也知道数学的发展与哲学的发展、科学的发展存在着密切的联系。笔者会把一些听起来吓人的数学知识用一个简单的逻辑呈现。比如，我们在义务教育阶段会接触算术、几何（欧氏），在高中阶段会接触代数方程、解析几何，在大学阶段要学习的微积分、概率论、常微分方程、偏微分方程。之后，是更为抽象的线性代数与有限群理论²¹，以及再往后的非欧几何、李群李代数、拓扑学。这些内容，特别是后面的高等数学的内容，看起来都很抽象。但它们产生顺序与相互关系，却有一个非常简单的逻辑²²。笔者当年在上学的过程中就没有意识到这一点。结果就是即便是很基础的内容，因为没有对脉络的认识，考试结束后基本都忘记了。而看起来比较难的内容，直接就被吓得不敢学了。后来，随着年龄的增长，笔者逐渐这些内容背后的逻辑关系可以非常简单。了解一下这个逻辑关系，对笔者理解物理学、理解数学是非常有帮助的²³。

²¹这里笔者想强调一下虽然《线性代数》大家上了大一就学，但从历史发展以及抽象性的角度，笔者倾向于把它放到与有限群理论平级，作为近世代数这个层面的内容来讲。换句话说，线性代数和微积分实际上是完全不同层级上的数学！微积分要简单不少。相信经历了大一上学期的同学应该有体会。造成这个现象的原因，我们应该点出来！后面第五章我们会详细解释。

²²在第五章我们会展开讲这个逻辑。

²³数学与物理学的关系后面我们会细讲。这里，仅说一句，就是数学是描述自然的语言，当然也是描述物理学的语言。数学，特别是近代的数学，讲的是结构。在物理学研究中，我们会对这些结构赋予一定的物理意义，进而讨论这些结构的存在所带来的物理上的后果。在书中，这个关系非常重要，但我们在前面不会进行太多专业、价值层面的讨论。我们把相对来说最专业的讨论留在最后一章的展望中。前面的讨论，我们都按“引入式”来处理。这样做，是参考笔者看到的高晓松谈写歌的时候的一个技巧。按照高晓松的说法，他一般不会上来就“兴”，因为这会把人推远，没法打动听众。他上来一般都是写一些小事儿，把听众拉进。这样到“兴”的时候，一拳出去，才能打动你。笔者写物理学专业的东西，也习惯这种方式，把事情说的尽量通俗、尽量简单，

本书写作过程中，笔者虽然会以物理学的进展为主线来进行讲解，但是会把这个讲解基于对哲学、数学的讲解来进行。针对大家平时看起来很吓人的内容，我们会着重讲其背后简单的逻辑。这样，当哲学、数学层面的基础讲清楚后，当这些看似抽象的内容背后的简单逻辑讲清楚后，物理学的发展就顺利成章。

在针对物理学专业的读者的内容中，除了前面提到的把哲学和历史融入物理学的学习中，笔者还会结合自己在日常的科研工作中遇到的例子，开展一点关于这些具体研究背后的科学背景的介绍。现代物理学就研究方向而言虽然种类繁多，有一些工具看起来很具体、很技术，我们在使用的时候往往会关注它的这些偏技术的方面，但实际上它们是很强的基础科学属性的，我们经常会忽略。比如，笔者的科研中经常会用到一个方法，叫分子动力学方法。笔者以前只是觉得它是一个在科研中要用到的方法，把怎么用搞清楚就可以了，丝毫没有意识到其背后的物理思想。《今日物理》备课过程中养成的一些习惯，会引导笔者针对其物理思想进行思考。这在很大程度上会帮助笔者理解自己从事的具体的科学研究的意义，唤醒自己对科学研究的热情，并将研究进行得更加深入一些。

具体而言，就是我们要明确分子动力学的核心思想起源于十九世纪中期开始的沃特斯顿(John James Waterston, 1811–1883 年)、克罗尼格(August Karl Krönig, 1822–1879 年)、麦克斯韦(James Clerk Maxwell, 1831–1879 年)、玻尔兹曼(Ludwig Eduard Boltzmann, 1844–1906 年)等在研究热学现象的微观机理时提出的 kinetic

最后再讲价值层面的东西。这样做的一个弊端，是会把物理学写得不是那么严谨（实际上从逻辑层面笔者往往已经会非常注意了，但是从阅读体验上读着一般会有这种感觉）。笔者之前出版过一本《群论及其在凝聚态物理中的应用》，受到的批评基本也来自这个方面。但整体而言，笔者对这种风格还是很坚持。因为物理学教材的读者也是普通的人（只是对物理学感兴趣），作为作者需要把读者进行引导，使得读着对这门课程有了感觉，才能讲价值层面的东西。不然，在开始就讲很多深奥的内容，读着往往会被吓得离开。在本书中，我们也会采用这个方式，

theory of gases (气体动力学理论)。此理论在当时的作用,是给热力学(一定程度上是一个基于实验可观测量对一个系统的热学性质进行描述的唯一理论)一个力学(一定程度上是物理学理论期待的终极形式,有微观基础、落到本体上、体现因果关系)的基础,具有深刻的物理内涵。比这些工作再晚一些,吉布斯(Josiah Willard Gibbs, 1839–1903 年)提出了基于系综的统计平均的概念。这些内容合在一起,构成了分子动力学的核心思想。但由于人们当时解决问题的数学手段局限于解析,这些理论仅在理想气体、简谐晶格系统这些理想模型中被讨论。后来,经过多年的蛰伏,当计算作为手段在上世纪五十年代进入物理学研究后,此方法开始对力学、物理学中的统计物理、物理学中的凝聚态物理、化学中的物理化学、以及材料科学等学科产生巨大影响。

笔者在讲授这门课程前,虽然一直使用此方法开展研究【李新征, 2014】,但对这些内容是没有充分体会的。作为一个结果,就像前面提到的,笔者在很长时间内也会因为做的科研过于程式化,进而失去一些做研究的兴趣。在理解到这些内容之后,笔者后面做任何具体的科研工作(比如与分子动力学相关的工作)【Ye, 2021】【Ye, 2023】,都会像前面说的那样把它放到这个历史的长河中去品味这个工作是否值得花费时间了?

同时,在认识这些历史后,笔者对自己所做的科研工作的期待也是有很大变化的。比如,笔者这时看到的更多的,是我们现在面临的机会。如果没有对物理学史与物理学的哲学属性的认识,我们在判断力上是会受限的,进而在实际科研中也会错过很多东西²⁴。这些错过的东西中,往往蕴藏着很多大有可为的课题。

²⁴在笔者看来,判断力是一个科研工作者最为核心的一个能力!也是大学教育应该着重强调的!

有了这些知识储备，我们在面对物理学这门学科时就不会盲目地要么怀着恐惧（物理学太难了）、要么抱着遗憾（像媒体上总是宣传的物理学的世纪已经过去）进行学习。取而代之的，应该是把现有知识的充分应用的渴望、对现有认知前沿的深度探索的好奇、以及对学科未来发展的高度期待²⁵。这里，笔者把科研中的这些经历作为例子写出，目的是解释本书针对物理学专业读者设置的思路与架构。与前面提到的针对所有读者（包括非物理专业的读者）进行的设置综合起来，笔者希望本书可以在最大程度上让不同读者受益。

读者需放低对本书期待的一些说明

至此，我们聊的都是本书写作的动机以及笔者对自己写作的要求。我们讲了很多。从篇幅上，这个前言是远远超过多数同类图书的。这样做的一个问题，是可能会把读者的期待调得比较高²⁶。这也使得笔者在这里不得不写一些说明，来放低读者对本书的期待。

降低期待的考虑与笔者这些年上课的经历也是有关的。我们的多数学生习惯于学习具体的知识，忽略对学科的思考。而笔者对大学课程的认识，就是“大

²⁵笔者上个世纪末在国内学习基础课的时候，讲课的老师经常灌输两个观点。一个是物理学是天才做的，另一个是重要的东西已经被做完了。本世纪初，笔者开始从事科研，包括到德国读博士、英国做博士。在这个过程中，笔者反而很少听到类似观点。笔者印象最深的一次讨论发生在博后期间，与导师（Angelos Michaelides 教授，当时在伦敦大学学院工作，后转到剑桥大学，方向是理论化学）。他问我对这个学科有什么期待？我说我们这个学科重要的东西已经都被前人发现了，我们无非是在他们发现的领地上种种菜，把花园打理好。他很惊讶地问我为什么这么想？我说我从上高中开始老师都是这么说的。他说他非常不认同这种说法！作为一个结果，我可以感受到他对我们从事的学科一直是保有饱满的热情的。同时，我在他身上看到的一些探索的精神对我后期学术生涯是产生了非常积极的影响的。当时，他劝说我放弃类似想法，但很遗憾我当时并不能完全接受他的观点。

²⁶类似长篇幅的前言在历史上好像对应的都是一些历史上的哲学的专著。

学课程需要跳出这个思维模式”。从这些年授课的效果来看，笔者认为自己做得非常非常地不成功！不少学生会认为笔者在课堂讲的内容过于杂、过于散，不利于考试。而笔者则认为这种杂、这种散、以及观点的分享（有些观点也不一定要正确）正是我们的大学课程缺乏的。我们不能硬性的要求每个学生都与笔者持同样看法，毕竟人与人的经历不同，看很多事情的角度也会不同。但笔者对这一点是非常坚持的！

为了解释清楚笔者为什么坚持这种风格，笔者会先说一下自己对德国科学史的总结与看法。然后，感慨一下具体知识点的讲解与应试教育是无法覆盖这些内容的。而了解这些内容，对于大家理解物理学还是有益的。只有讲的散、讲的杂，才能引导学生进行更多的主动阅读，进而帮助其在以后的科研实践中基于自己对学科发展史的了解以及对学科的认识形成判断力。如果学生抱着考高分或者觉得自己学完就系统掌握一系列知识点的态度来进行选课或阅读的话，一定会失望。从这些年的课程评估上来看，很多同学确实也是很失望的。不过笔者的角度来讲，虽然自己对学生一直比较鼓励和尊重，但是在这个事情上，我需要坚持我自己！

这个解释还可以再展开一些。冯友兰先生说过中国哲学向内追求，以达人性的完满为目的；而西方哲学则向外探寻，以认识自然、征服外在世界为最终目的²⁷。因为这个区别，就自然哲学的发展而言，我们的民族缺席了一些关键的阶段。最近几十年，随着我们打开国门与外面的世界进行深入的交流以及经济的发展，我们也有了大量的拥有在欧美国家主流研究组的长期研究经历的科研人员回国入职各高校与研究所从事科学研究。笔者亲身经历了这个过程，深度认同这对于

²⁷这句话肯定不可能完全正确，因为人是复杂的。但大家可以暂且接受这点。

全面提高我们高校与科研机构的研究水平至关重要！同时，在认真观察同龄或更年轻一些的学者时，也能感觉到我们在对科学中已知的、具体的科学前沿的把握上，和西方发达国家的同行应该差的不是太多。但在如何从看似“小的时代的小问题”中发掘“大的东西”进而开创一个领域这个方面，我们需要努力的地方还有很多。我们社会上当然有很多类似“何时产生诺奖”的讨论，但笔者认为在考虑这些问题之前，让我们的学生尽量深刻地认识科学或许是更为实际的准备。

就教育经历而言，笔者是阴差阳错但又极其幸运地在德国完成了博士阶段的学习。因此，在后面的教学、科研以及各种工作中，如果看到一些问题，也会不由自主地与德国进行对比，来分析一些，以期至少在自己身上和身边进行一些改进。在前一段我们提到了我们在小的科研技能上能掌握地更好，但新方向的发现方面我们有较大改进空间。这一点上，我们或许可以参考德国的科学的发展史以及他们教育中强调的东西来进行一些思考。

德国的科学发展，应该说是经历了一个从哲学、数学（这两个刚好也是最基础的学科），到实验物理学，到理论物理学，再到各个学科的系统循序渐进，最后在二十世纪初全面绽放的过程。

这个过程可以从十七世纪末、十八世纪初的莱布尼茨（Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646–1716 年）说起。他是惠更斯（Christiaan Huygens, 1629–1695 年）的学生，而惠更斯是笛卡尔（Rene Descartes, 1596–1650 年，近代西方哲学的起点，理性主义的奠基人）的学生。因此，莱布尼茨除了在微积分方面的贡献，另一个很重要的身份是理性主义的哲学大师。在他生活的年代，普鲁士还远未统一，

他的服务对象仅仅是其中的某个政权而非我们现在说的德意志民族²⁸。但笔者可以想象他对同样来自于他生活的那片土地的晚辈的影响，就像杨振宁、李政道、陈省身先生对我们这片土地上立志于从事物理学、数学研究的年轻人产生的影响应该是一样的。他们给了我们信心，让我们相信我们可以在基础学科做到最好。

到了十八世纪中后期至十九世纪的四十年代，德国的哲学开始系统性地绽放²⁹。出生相差 50 年的四位哲学大师，康德（Immanuel Kant，1724–1804 年）、费希特（Johann Gottlieb Fichte，1762–1814 年）、谢林（Friedrich Wilhelm Joseph Schelling，1775–1854 年，因为他成名比黑格尔早，一般会把他放在前面）、黑格尔（Georg Wilhelm Friedrich Hegel，1770–1831 年），将结合了理性工具与经验工具的古典主义哲学推向了高峰。他们每个人的哲学，都包含科学的方法的哲学基础（形而上学的基础）。其中康德最为典型。现在，人们在介绍康德的时候，经常说的话就是：他继承了莱布尼茨的理性主义，并且经由休谟的提醒放弃了独断论，为科学建立了坚实的形而上学的基础进而影响了后世的大批科学家、哲学家的哲学大师。这样，经过这一百多年的努力，应该说到了十八世纪末、十九世纪初的时候，他们已经完成了对科学建立坚实的逻辑学与形而上学基础这样一个任务。这一点，或许是我们多数讲解科学知识的教材中忽略的内容。但笔者认为，它极其重要！

这拨哲学家中最晚的两个（谢林与黑格尔），与数学王子高斯（Carl Friedrich Gauss, 1777–1855 年）生活的年代就很近了。他们的活跃期整体是在十九世纪初。

²⁸ 莱布尼茨本人也是用拉丁文写作的哲学家与数学家。德国作为一个民族国家的形成，是晚于英国和法国的。

²⁹ 这个在德意志民族崛起的过程中，是发挥了决定性作用的。

在这个时间点，数学通过莱布尼茨的传人们（比如伯努利家族、欧拉、拉格朗日等一批法国数学家）的努力已发展到了一个相当高级的阶段了。高斯在这个时候，基于的德国哲学传统、数学传统，把德国的数学推到了一个可以与法国数学比拟的高度。之后，德国经过洪堡兄弟的高教改革，诞生了诸如柏林大学、哥廷根大学、柯尼斯堡大学这样的世界级的研究中心。高斯留下的底子经过他的弟子（比如哥廷根大学的黎曼，Bernhard Riemann, 1826–1866 年）或者弟子的弟子（比如柏林大学的维尔斯特拉斯，Karl Theodor Wilhelm Weierstraß, 1815–1897 年），以及再晚一辈或者几辈的学者（比如克莱因，Felix Klein, 1849–1925 年，以及希尔伯特，David Hilbert, 1862–1943 年）得到进一步的发扬。结果就是让德国在十九世纪与二十世纪之交彻底成为了国际数学的中心。

这些哲学与数学的发展应该说是所有学科的基础。比数学的发展稍微晚一些，一定程度上也受数学发展的影响，系统的物理学研究从十九世纪初开始在德国渐渐起步。最早涌现出来的，是优秀的光学仪器制造者夫琅和费（Joseph von Fraunhofer, 1787–1826 年）。他通过自己发展的棱镜技术，系统研究了太阳光中的暗线（后被人们称为夫琅和费线）。这是实验物理学研究中的重要成果。之后，韦伯（Wilhelm Eduard Weber, 1804–1891 年）、迈尔（Julius Robert von Mayer, 1814–1879 年）、亥姆霍兹（Hermann von Helmholtz, 1821–1894 年）、基尔霍夫（Gustav Kirchhoff, 1824–1887 年）将德国的基础物理研究带入了当时欧洲的主流。他们这几个的特点是除了本身可以产生一流成果，在物理学的系统把握以及对物理学人才的培养上也都成效显著。

以基尔霍夫、亥姆霍兹为例，他们都撰写了在当时非常前沿的系统的物理学的讲义。特别是基尔霍夫，我们经常讲到的黑体辐射的研究实际上是从他开始的。

他们的学术水平与学术判断，很多程度上会影响到他们的学生们。事实也证明，他们的学生们，以门捷列夫（Dmitri Ivanovich Mendeleev, 1834–1907 年）、昂纳斯（Heike Kamerlingh Onnes, 1853–1926 年）、赫兹（Heinrich Rudolf Hertz, 1857–1894 年）、普朗克（Max Planck, 1858–1947 年）、维恩（Wilhelm Wien, 1864–1928 年）为代表，在现代科学的发展中也对发挥了极其关键的作用。到了二十世纪初，这些人的学生辈的学者们又以哥廷根大学、柏林大学、柯尼斯堡大学、慕尼黑大学为中心，使德国成为了国际科学研究的真正引领者。这是一个经历了两百多年，以哲学、数学带动物理学、化学的交叉互融式发展的宏大的历史画卷。

但遗憾的是，在《今日物理》课程讲义的准备过程与讲授过程中，笔者一个深切的感触就是我们的学生对这些历史普遍来讲是非常不了解的！同时，对这些历史后的学科发展规律的思考，也是完全缺失的！这是一个可悲的事实！

在关于具体的科学、技术、工程、数学的知识点的掌握上³⁰，我们的学生在大学阶段或许会优于同龄的德国同学，但是我们的教育对科学史和哲学层面针对科学的思考的缺失会让我们的学生在成为科研人员后发展受限。笔者当年在德国读博士的时候对这点的体会是深刻的。当然，这或许与物理学史中很多重要的事件和他们的国家相关而我们并没有参与这一点，是有关的。但不管怎样，我们的学生还是应该相对全面地了解这些学科发展史以及它的哲学属性，进而去安排我们的学习，以期在未来尽可能地改变这种状况！

基于这样一个考虑去总结讲义，会让本教材的内容与传统的物理学课程比起来显得很不同。因为关注点不再是知识点本身了，也不是漂亮的理论体系，而是到了知识点产生的历史背景、过程、以及背后的规律性的东西的探讨（比如数

³⁰ 媒体上会经常用到一个词，STEM，即 Science、Technology、Engineering、Mathematics。

学、哲学层面的内容的探讨)。笔者坚持此原则,企图在书本上把“冰冷的知识点”转化为“鲜活的历史”及其背后的“学科规律”。进而,期待我们的学生可以吸收并且相对于我们这一代对学科产生更好的理解。

因为这个特点,笔者也必须承认本书的内容涉猎会比较广。其中,超出笔者平常科学研究范围的内容笔者会通过不同的渠道进行搜集。比如,除了文献中引用的参考文献,有些句子也会摘自包括维基百科、百度百科、知乎、喜马拉雅在内的网上资源。笔者可以保证的是这些内容在笔者的认知范围内进行整合,花了几年时间,在其形成一个合理逻辑后分享给读者的。但同时,笔者也需要强调这些认识绝非具有很强的原创性的研究成果,仅仅是个人观点。

在进行完所有这些解释后,笔者希望选课的学生以及本书的读者能理解笔者的选择,调整预期,在最大程度上享受选课与阅读。

内容目录与致谢

最后,在读者开始正式阅读之前,我们还是要说一下大致安排。这个是基于这些年的教学实践确定的。我们的课程一般春季学期开,每次 48 学时(16 周,每周 3 学时)。这些内容在本书中总结为九章,具体如下:

1. 物理学简介
2. 文艺复兴与科学革命之前的自然哲学
3. 文艺复兴与科学革命
4. 经典物理学(力、热、光、声、电与磁的经典理论)
5. 一些关键的数学进展
6. 物理学革命前与物理学相关的哲学思想

7. 十九世纪的欧洲大学
8. 经典物理学的危机与物理学革命
9. 物理学革命之后的现代物理学

这九个主题的设定,基本是按历史发展顺序从古希腊逐步推进到现代的方式来进行的。课程最后的落脚点,是对目前物理学各个方向的介绍和对物理学的一些展望。读者在学习过程中,可遵循此思路进行阅读。笔者希望这些努力能为我们的本科生(包含物理学专业与非物理学专业)在了解物理学的过程中提供一个简单的入门。

在致谢部分,笔者首先要感谢学习过程中遇到的多位优秀的老师!包括,但不限于:丁万群老师(高中班主任、物理老师,洛阳一高)、石兢教授(本科班主任,武汉大学物理系)、夏建白院士(硕士导师,中国科学院半导体研究所)、Matthias Scheffler 教授与 Ricardo Gomez-Abal 博士(博士导师,德国马普学会 Fritz-Haber 研究所)、Angelos Michaelides 教授(博士后合作导师,英国伦敦大学学院)。他们的帮助,使得笔者可以顺利地各个阶段的学习。2011 年下半年,笔者从英国完成博士后阶段的工作,发表的文章仅有 5 篇,找教职极其困难。笔者衷心感谢王恩哥院士(时任副校长,后任校长)的认可与田光善教授(时任凝聚态所理论组组长)的帮助!这是笔者可以入职北大的最关键的因素。同时,笔者也要感谢以欧阳颀院士(时任凝聚态所所长)、谢心澄院士(时任物理学院院长)为代表的当时的物理学院学术委员会、教学委员会、进入委员会的各位老师的支持!

在已完成的四个学期的教学实践中,邓妙怡博士连续两年担任课程助教,为课程建设做出了重要的贡献。本书内容中与热力学第三定律相关的部分来自和她共同完成的一篇文章【邓妙怡, 2024】。同样担任助教的还有李明来同学、姚贵中

同学。王佳男、吴狄轩是笔者担任班主任的本科生班里的学生，本书内容中与黑体辐射相关的内容也来自与他们共同整理的一篇文章。在笔者准备这本讲义的这几年，对统计物理的重新认识起到了关键的作用。其中，全海涛教授、徐莉梅教授给予了诸多帮助。在关于德国古典主义哲学以及量子力学的内容的撰写过程中，许陌涵同学和我也在一起完成了一篇论文。这也对本书的完成提供了强有力的支持。书稿完成后，林熙教授、蒋鸿教授、任新国教授等多位老友也提出了关键的修改意见。在本书和笔者完成的几本图书的出版过程中，北京大学出版社刘啸老师、陈小红老师、尹照原老师都提供了各种帮助。这里一并感谢！

最后，也是在心灵的最深处，笔者要感谢家人一直以来的支持与鼓励，尤其是笔者的父母在物资匮乏年代对笔者的兴趣的培养与保护！

李新征

2025 年 1 月 30 日

目录

前言	1
目录	25
第一章 物理学简介	32
1.1 物理学的基本特征与主要研究内容	33
1.2 物理学与哲学、自然哲学、科学、自然科学在学科属性上的关系	41
1.3 物理学与数学的关系以及它们在发展过程中的密切联系	45
1.4 物理学与其它自然科学的学科分支之间的关系	53
1.5 现代物理学研究的典型领域与现代物理学理论的基本特点	58
第二章 文艺复兴与科学革命之前的自然哲学	61
2.1 前苏格拉底时期的自然哲学	63
2.2 智者运动以及苏格拉底、柏拉图对其的否定	71
2.3 亚里士多德的物理学	73
2.4 欧几里得与《几何原本》	77
2.5 阿基米德、埃拉托色尼、阿波罗尼奥斯	82
2.6 古希腊与古罗马的天文学	86
2.7 中世纪欧洲、阿拉伯世界与古代印度	92
2.8 中国早期的自然科学与数学	95
第三章 文艺复兴与科学革命	101

3.1 文艺复兴的历史背景	101
3.2 文艺复兴	104
3.3 科学革命	107
3.3.1 哥白尼.....	108
3.3.2 第谷·布拉赫、开普勒、布鲁诺.....	110
3.3.3 伽利略.....	113
3.3.4 笛卡尔.....	115
3.3.5 惠更斯、胡克、莱布尼茨.....	118
3.3.6 牛顿.....	121
3.3.7 波义耳、拉瓦锡.....	127
3.3.8 达尔文.....	129
3.4 科学革命的影响	132
第四章 经典物理学	134
4.1 经典的力学理论	135
4.1.1 牛顿力学的时空观.....	136
4.1.2 牛顿三大定律及其各种推论	140
4.1.3 万有引力定律.....	141
4.1.4 牛顿之后经典力学的进一步发展及其对自然哲学的影响.....	147
4.2 经典的热学、热力学与统计力学理论.....	152

4.2.1 从伽利略到克拉帕隆.....	153
4.2.2 热力学第一定律.....	157
4.2.3 热力学第二定律.....	162
4.2.4 热力学第三定律.....	170
4.2.5 热力学第零定律.....	185
4.2.6 统计力学的发展以及热学相关课程的设置.....	186
4.3 经典的光学理论	187
4.3.1 几何光学.....	188
4.3.2 波动光学.....	192
4.4 经典的声学理论	197
4.5 经典的电磁学理论、电动力学	202
4.5.1 电与磁的各种现象与学说.....	203
4.5.2 电磁转换.....	206
4.5.3 电动力学.....	207
第五章 一些关键的数学进展.....	212
5.1 算术、几何、三角、代数的发展以及解析几何的建立.....	215
5.1.1 算术、几何、三角.....	215
5.1.2 代数的发展、解析结合的建立.....	217

5.2 微积分、常微分方程、偏微分方程、泛函（变分）方法、复变函数理论的发展及其在物理学研究中的应用	221
5.2.1 微积分.....	221
5.2.2 常微分方程、偏微分方程.....	222
5.2.3 变分法.....	225
5.2.4 复变函数.....	232
5.3 线性代数、有限群理论的发展及其对后期物理学发展的影响.....	234
5.3.1 线性代数.....	234
5.3.2 有限群理论.....	236
5.4 非欧几何、微分几何、李群李代数、拓扑学理论的发展及其对后期物理学的影响	241
5.5 传承在数学发展中的作用	245
第六章 与物理学相关的哲学思想的发展	249
6.1 经验论与唯理论	253
6.1.1 弗朗西斯·培根与笛卡尔.....	254
6.1.2 霍布斯、斯宾诺莎、莱布尼茨与休谟.....	259
6.2 德国古典主义哲学	265
6.2.1 康德.....	266
6.2.2 费希特与谢林.....	272
6.2.3 黑格尔.....	273

6.3 这些哲学思想对科学发展以及对物理学革命的影响.....	275
第七章 十九世纪的欧洲大学	279
7.1 科学革命对欧洲大学的影响与普鲁士的教育改革.....	280
7.2 以哥廷根大学、柏林大学为代表的德国大学.....	282
7.3 其它欧洲国家的大学	286
第八章 经典物理学的危机与物理学革命.....	288
8.1 基尔霍夫与黑体辐射	290
8.1.1 基尔霍夫及其整体学术贡献简介.....	290
8.1.2 基尔霍夫的热辐射定律与黑体辐射.....	295
8.1.3 黑体辐射的研究及困境.....	298
8.2 经典物理学的危机	304
8.2.1 迈克尔逊-莫雷实验	306
8.2.2 光电效应.....	310
8.2.3 原子光谱及其规律.....	315
8.2.4 固体系统在低温下的比热问题.....	319
8.3 破局 1: 量子概念的提出.....	322
8.3.1 普朗克的量子.....	323
8.3.2 爱因斯坦的光电效应与固体比热.....	329
8.3.3 卢瑟福与玻尔的原子模型.....	331

8.4 从量子论到量子力学	338
8.4.1 德布罗意的电子波.....	340
8.4.2 海森堡、玻恩、约当的矩阵力学.....	347
8.4.3 薛定谔的波动力学.....	370
8.4.4 玻恩对波函数的物理意义的统计性几率诠释.....	382
8.4.5 测不准关系、互补原理.....	384
8.4.6 电子自旋.....	389
8.4.7 力学理论的传承与革命.....	404
8.5 破局 2: 相对论.....	407
8.5.1 相对性原理、绝对时空、以太.....	408
8.5.2 斐茨杰拉德、洛伦兹、庞加莱.....	414
8.5.3 狭义相对论.....	417
8.5.4 广义相对论.....	427
8.6 物理学革命的影响	438
第九章 物理学革命之后的现代物理学	440
9.1 凝聚态物理与统计物理	442
9.1.1 凝聚态物理.....	443
9.1.2 统计物理.....	458
9.1.3 凝聚态物理与统计物理之间内在联系	458

9.2 原子与分子物理、光学	459
9.2.1 原子与分子物理.....	459
9.2.2 激光.....	459
9.2.3 冷原子体系.....	459
9.3 核物理、粒子物理	459
9.3.1 原子核的内部结构.....	459
9.3.2 核嬗变与核反应.....	460
9.3.3 粒子物理.....	460
9.4 生物物理、软物质	460
9.5 物理学与天文	460
9.6 总结与展望	461

第一章 物理学简介

本章的目的，是要对“物理学是什么”这个问题做一个引入式的讨论。为了让读者针对本书进行阅读时有个抓手³¹，我们先把其总结为一段话。这段话中会出现物理学、自然哲学这两个关键词，这也是本书的题目中的两个关键词。本书的整体讨论，会围绕这两个关键词展开。之后，基于这段话，我们会展开一些关于比较基础的概念的讨论，以期将读者带入关于物理学的思考。之后，随着各个章节的进行，笔者期待这个关于物理学与自然哲学的图景会逐步展开。

这段话比较浓缩，内容为：**物理学是自然科学的一个分支，它起源于自然哲学，并可以在一定程度上代表自然哲学。物理学研究的是物质的本质³²，包含物质的存在形式与运动规律；有时，人们也说物理学研究的是宇宙的运动原理。**

围绕这段话，我们的讨论将从五个方面进行。首先，是物理学的这个学科的基本特征与它主要研究的内容；其次，是物理学与哲学、自然哲学、科学、自然

³¹笔者在第一次上《今日物理》课的时候，一直找不到思路来讲第一讲。一个偶然的机，笔者看到吴从军老师写的一篇关于物理学简介的文章。吴老师现任西湖大学讲席教授，之前是美国加州大学圣地亚哥大学分校物理系教授。他曾获斯隆奖（Sloan Research Fellowship，美国斯隆基金设立的一个针对职业生涯早期杰出青年学者的基金）、新基石研究员（我国腾讯公司出资设立的一个公益性的针对基础研究的项目）等重要奖项。在笔者看来，他是一位非常出色的理论物理学家。吴老师的这篇文章给了笔者一个抓手，也为笔者准备《今日物理》课程的一系列讲座起到了很重要的启发作用。本书整理过程中，在征得本人同意后，笔者将他的这篇文章的作为我们展开讨论的起点。这里，也特别感谢吴老师！

³²物质可以有物理学上的定义，也可以有哲学上的定义（相对于精神）。这里，我们采用的是其在物理学上的定义。在传统物理学的定义中，它指的是一个具有一定质量、占据一定体积的实体。在现代物理学中，它的定义获得了扩展，与能量可相互转换，两者总和不变。这里，我们说的物质可以按现代的方式理解，对应传统的实体物质加能量。

科学在学科属性上的相互关系³³；第三，由于数学的发展与物理学的发展总是紧密相关的，我们需要花些笔墨来介绍物理学与数学的密切联系；第四，由于科学革命带来的一个结果是自然哲学演化为自然科学（物理学是其中一个分支）³⁴，理解物理学与其它自然科学的分支之间的关系对于我们理解物理学也是有一定帮助的；最后，我们需要简单说明一下现代物理学研究中的典型领域划分、相互联系、及其它对其它学科可能起到的支撑作用。

本章也会按这个思路，分五节来展开。

1.1 物理学的基本特征与主要研究内容

我们先从物理学这个学科的基本特征上说起。我们可以用两个关键词来进行

³³这里，我们会企图把物理学这门学科在历史上的演化过程讲清楚。这个展开过程，要包含一些关于哲学、科学、神学之间的相互关系的讨论。

³⁴实际上在十九世纪上半叶之前，人们都很少用科学（Science）这个词。当时常用的词是自然哲学（Natural Philosophy）。Science的词根是拉丁语的scientia，本意就是知识。在中世纪之前，人们追求scientia的领域包含了语法、逻辑、修辞、算术、几何等几乎所有传统哲学的领域。1833年，英国哲学家威惠尔（William Whewell，1794-1866年）用Scientist来描述科学革命（这是一个时期，对人类历史非常重要，后面会讲）后涌现出来的专职从事由自然哲学演化出的各个可以用科学的手段研究的学科的研究的人【Ross, 1962】，科学与科学家才有了现代意义上的定义。现在，人们说到科学，既可以指这种研究方法（伽利略提出的针对用实验来对理论假说进行证实或证伪的研究方法），也可以指人们利用这种方法所获取的知识。这些研究根据其关系的问题，可分为自然科学、形式科学、社会科学。这里的自然科学，与我们传统意义上说的自然哲学基本对应。从这个角度来看，科学与自然有个完全不同的侧重点。科学的词根来自拉丁语scientia，它偏重于可以用科学方法验证的知识的集合。自然，词根则是拉丁语natura（或希腊语phusis），它有两个意思，一个是客观存在（比如物质世界），一个是这种客观存在背后的驱动力。而物理，早期的思路就是还原论，关注的就是客观存在中最基础的东西，以及这些东西的运动规律。后来，人们意识到客观存在有很多，比如化学、生物、地学、天气等，这些也都被当作自然来研究。综合这些，我们可以说自然更强调客观存在及其本质规律，而科学更强调可以被实验证实或证伪的知识。我们现在常提到的期刊Science和Nature虽说覆盖范围基本一致，从办刊思想上，应该还是有一点能反映其词根的区别的。这里笔者这些年基于投稿经验，总结出一些体会放在这里仅作参考。我们本书的核心physics，在希腊语（phusis）的意思就是我们现在说的nature。牛顿之后，物理学才有了现代意义上的定义。我们后面会提到，这也是人们为什么总说物理学即自然哲学的一个原因。更多类似讨论请见1.2节。

简单概括：一个是“大”，另一个是“基础”。“大”这个特点，可以从它的研究对象和研究内容上看出。物理学的研究对象包含时空中的宇宙万物。而研究内容，则是这些时空中的物质（从空间上大到宇宙本身、小到最基本的粒子，从时间上大到宇宙寿命、小到其中任何一个粒子产生或者湮灭的那个瞬间）的存在形式与运动规律。这里，时空是我们在描述物质的存在形式与运动规律是必须引入的一个数学上的空间概念。按照康德（Immanuel Kant, 1724–1804）的观点，它是先验的。物理学的规律，来自于经验，但需要被放在先验的时空概念中进行表达。关于这一点，读者可以不用着急，先留个印象，我们将在第七章进行系统的讲解。在物理学的研究中，人们使用时空这个概念是为了对物质的存在形式与运动规律进行数学表达。

而“基础”，则可以通过它与自然科学中其它学科分支的比较来理解。相较于其它兄弟学科，物理学关注的是物质的最基本的存在形式与运动规律。在物理学研究的物质的存在形式与运动规律的基础上，可以有化学、生物学等兄弟学科所关注的对象各种行为。这些内容，并不是物理学的研究范畴。但是在微观层面，这些化学的、生物学对象的行为是可以通过量子力学、统计力学这些物理学的基础理论与物理学建立联系的。

上述特征在一定程度上决定了物理学起源于自然哲学，并可以在一定程度上可以代表自然哲学，进而支撑起源于自然哲学的其它自然科学的学科分支这样一个特质。我们可以说物理学与数学一起，支撑起了现代的自然科学研究。但与数学不同，物理学的根在关于“物”的理上。这个基础性，或许也是我们经常看到

“物理学及自然哲学”这种不太严格的表述经常出现的一个重要原因³⁵。

有了这样一个基本的印象，我们可以从历史发展的角度来初步地、近距离地体会一下物理学了。我们可以先从它的原始形态，自然哲学说起【赵敦华, 2012】
【阿里奥托, 2011】【邓晓芒、赵林, 2014】【Lloyd, 2021】。早在古希腊时代，泰勒斯（Thales of Miletus，约公元前 620 年代到 540 年代）就提出了具有鲜明的物理学特质的水本原说³⁶。其蕴藏的哲学思想，代表了人们当时脱离神话对世间万物的本质的初步思考。比泰勒斯晚 100 多年，留基波（Leucippus，约公元前 5 世纪前期）与德谟克里特（Democritus，约公元前 460 年代到 370 年代）了原子论。在他们的世界观中，世界是由原子组成的，原子与原子之间是真空。这更是在一定程度上成为了 2200 年后由道尔顿（John Dalton, 1766–1844，其代表作《A New System of Chemical Philosophy》译作《化学哲学新体系》，于 1808 年第一次出版）所提倡的原子论的哲学基础。

比德谟克里特再晚一点，亚里士多德（Aristotle，公元前 384–332 年）在建立其哲学体系时以《Physics》为起点³⁷，建立了包括《Metaphysics（形而上学）》、

³⁵当然还会有其它原因，比如我们下面要提到的对亚里士多德的著作《phusis》的翻译。科学革命后，因为科学脱离哲学独立存在，科学中各个分支在成熟后又开始关注非常专业与细节的问题，导致了从事科学研究的人开始越来越少地关注科学与哲学的关系。作为一个结果，类似“物理学及自然哲学”这种不太严谨的表述也开始越来越多的出现。笔者在《今日物理》这门课程的讲义的整理过程中，比较看重类似概念的澄清。

³⁶人们一般认为哲学起源于泰勒斯。这个时间，大概在公元前 500 多年。泰勒斯就是那个仰望星空，结果掉到坑里的人。现在我们说的“仰望星空”，也来自于此典故。

³⁷Physics 的原词是 Phusis。它是希腊语，意思与现在的 nature 比较像，强调本质、本源，并不是现代意义上的物理学的意思。《Phusis》所采取的形式是基于观察进行描述，进而思辨。其中，是没有实验的。同时，其关注内容除了牛顿、伽利略的物理学关注的内容，也包含一些生命现象。因此，不管是从研究方法还是关注内容上来讲，亚里士多德的《Physics》都与现代我们说的物理学存在很大差别。后面我们会讲到，把这本书叫做“亚里士多德的《Physics》”或许更合适。

《Logics (逻辑学)》、《Ethics (伦理学)》、《Aesthetics (美学)》、《Rhetoric (修辞学)》在内的一套哲学体系³⁸。在《Physics》中，他建立的 Celestial Realm (月上世界) 与 Terrestrial Realm (月下世界) 的概念以及其组成与运动规律的学说在很大程度上决定了科学革命前整个西方对物质世界的认识³⁹。即使在科学革命之后、物理学革命之前⁴⁰，其中的类似于以太的概念依然在影响着物理学⁴¹。比亚里士多德再晚一些，阿基米德所总结的静力学定律让人们对力有了最初的认识。这些研究传承的，是整个自然哲学中最核心的思考。其核心关注点，就是物质世界的组成与运动规律⁴²。

之后，经历了漫长的中世纪，在文艺复兴结束后、科学革命的初期，伽利略

³⁸为什么亚里士多德的哲学体系会包含这些内容，我们会在本章第二节解释。

³⁹其中，月上世界充满以太。月下世界是水、火、土、气这四种元素。

⁴⁰科学革命、物理学革命具体的定义，我们后面再解释。

⁴¹在亚里士多德这里，月上世界充满了以太。在留基波和德谟克里特那里，原子之间是真空。因此，读者也可以感受到像以太、真空这样在近代与现代物理学中依然扮演者重要角色的概念，其根源可追溯至古希腊的哲学。

⁴²为防止误解，这里也说明一下，运动规律在这个时期体现为当时的物理学所描述的运动规律，更像运动学 (kinematics)，而不是我们现在说的由牛顿确立的力学的形式 (mechanics)。虽说把数学当作是描述自然的语言这种习惯人们在古希腊时期就已经养成了，但是在当时，人们描述运动的时候使用的更多的是亚里士多德所提出的定性的运动规律，是不需要力的，因此不是 mechanics。Mechanics，多应用于与机械应用相关的领域（实际上 mechanics 这个词的词根就和 mechine 相关）。举个例子，到开普勒那个时候，虽说描述行星运动规律用的是数学的语言，但其轨道的产生并不追求严格的力学的解释。这也是我们把牛顿的《自然哲学的数学原理》的出版当作科学革命的高潮的一个重要原因，它奠定了经典物理学的思维范式，将力与运动进行了数学上的结合。后面，在第八章，我们也会反复强调像“运动学 (kinematics)”这样的概念在即使是量子力学这样的现代物理学理论中发挥的重要作用。这种结合，从根儿上讲，这都是“物理学关注物质的存在形式与运动规律”这样一个学科特质的体现。

(Galileo Galilei, 1564–1642 年) 总结出用实验来验证理论假说的研究方法⁴³。之后, 比他晚三十多年出生的笛卡尔 (Rene Descartes, 1596–1650 年) 将解析几何引入力学问题的研究中⁴⁴, 此方法又被其学生惠更斯 (Christiaan Huygens, 1629–1695 年) 进一步发展。再往后, 以牛顿 (Isaac Newton, 1642–1727 年) 在 1687 年出版的《自然哲学的数学原理》为标志, 人们在历史上首次掌握了一个严格量化的科学理论体系。这是力学理论, 用以描述物质运动与力之间的关系。自然哲学也完成了最为关键的一次蜕变⁴⁵。蜕变后的理论就是我们现在说的物理学了, 这种物理学的影响力也很快覆盖了自然哲学的其它领域⁴⁶。我们可以说这是一次认知革命, 它揭示了像太阳、月亮这样的天体与我们身边的日常事物遵循统一的力学规律, 使得人们不再一味相信神力, 进而对客观世界有了更为接近真理的认知。在物理学内部, 牛顿力学的特质使得“力学”成为物理学研究中最核心的部

⁴³这个方法后来被人们称为是科学的方法, 由其得到的确定性的知识也被称为科学知识。在伽利略这个时间点往前与往后, 有一系列与科学相关的哲学思想的发展, 我们会在第六章介绍。

⁴⁴笛卡尔有两个身份, 一个是哲学大师, 一个是数学大师。哲学上, 他所创立的唯理论被很多人认为是近代西方哲学的开端。数学上, 解析几何实现了代数与几何的第一次结合, 为牛顿、莱布尼茨 (Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646–1716 年) 的微积分方法的提出进行了重要的铺垫。

⁴⁵这里大家可以体会一下《自然哲学之数学原理》这个书名。用自然哲学是因为这个时候人们关注的还是哲学中的自然哲学, 科学这个名词被人们广泛使用是 19 世纪初的事情。物理学在其数学原理被发现后, 成为了“全新的自然哲学”进而演化为“自然科学”。

⁴⁶比如在这个时代, 比牛顿甚至稍微早一些, 波义耳 (Robert Boyle, 1627–1691) 做的事情就是努力将化学从炼金术 (Alchemy) 中分离, 像物理学那样使之纳入自然哲学的范畴。这个在其代表作《怀疑的化学家》(<The Skeptical Chymist>) 中就有体现。牛顿去世后几十年, 拉瓦锡 (Antoine-Laurent de Lavoisier, 1743–1794) 出生。他更是采用物理学的研究方式, 提出了氧化说与质量守恒定律, 通过 1789 年的《化学基础论》(<Elementary Treatise on Chemistry>) 彻底建立的现代化学。做个略显随意的比喻, 化学领域的波义耳与拉瓦锡, 就有点像物理领域的伽利略与牛顿。

分⁴⁷。

牛顿力学后来也深刻影响到了法国的启蒙运动。伏尔泰（Voltaire，François-Marie Arouet 的笔名，1694–1778 年）就是牛顿的一个忠实粉丝，我们现在总说的苹果落地促使牛顿思考万有引力这个故事，就来自于牛顿去世几十年后伏尔泰在英国生活时对牛顿侄女的采访。当时，很多人认为是可以基于牛顿力学去理解世间万物的。与之相应的哲学思想是机械论，来自于比牛顿更早一些的一个哲学家，叫霍布斯（Thomas Hobbes，1588–1679 年）⁴⁸【邓晓芒、赵林，2014】。当然，再后来人们对热现象的研究使得人们认识到严格的机械论的应用范围是有边界的⁴⁹。但基于力学去描述物质的运动与变化这个基本思想，在物理学研究中依然被深度认可。

遵循此思想，麦克斯韦（James Clerk Maxwell，1831–1879 年）将电与磁现象进行了统一；爱因斯坦揭示了时空、运动、物质之间不可分割的关系。这些都是物理学发展过程中最伟大成就的体现。后来，在人们研究热现象与微观世界的过程中，发现了几率性描述的重要性，统计力学与量子力学也相应建立。这些基础知识，构成了我们现在认识世间万物的最为基础的理论，也为自然哲学（在科学革命后，其主体已演化为自然科学）的其它分支提供了关键的理论支撑。

以我们的兄弟学科化学为例，统计力学与量子力学的发展是典型的物理学成就。上世纪二十年代之后，以朗缪尔（Irving Langmuir，1881–1957 年）、路易斯

⁴⁷这里我们说的力学，包含 kinematics、mechanics、kinetics、statics 等一系列内容。在前言部分，我们讲到分子动力学是热学现象与力学规律之间的桥梁时，也强调过“力学”在物理学研究中的核心地位。这些内容，在第四章我们讲力学的时候，会进行更深入一些的说明。

⁴⁸他就生活年代与影响力而言，对牛顿应该是有影响的。我们在第六章，会有一些对他的哲学思想在科学史上的作用的介绍。

⁴⁹这个应该是进入十九世纪之后的事情了。

(Gilbert Newton Lewis, 1875–1946 年)、鲍林 (Linus Pauling, 1901–1994 年) 为代表的化学家将其成功地应用到化学分子的存在形式与反应机制的描述中。基于此, 化学这门早期的完全基于实验尝试的学科被推向了一个拥有微观 (原子、分子) 层面严格的定量描述的科学【Laidler, 1993】。在化学内部, 物理化学也作为一个重要的学科分支诞生⁵⁰。现在, 人们更是努力地将这种成功 (比如前面提到的分子动力学模拟手段) 推广至生物体系, 以期推动人们在分子水平认识生命科学。这些, 应该说是物理学成就对相关兄弟学科影响的典型的例子。

除了为兄弟学科的发展提供一些理论工具, 在物理学内部, 探索物质的存在形式与运动规律的认知边界依然是我们重点关心的问题。由于学科发展已经成熟到一定阶段, 它必然会产生很多分支。当前, 物理学的研究分支大致可分为六部分: 高能物理学、核物理学、天体物理学 (宇宙学)、原子/分子物理学与光学 (Atomic/Molecular Physics and Optics, 简称 AMO)、凝聚态物理、生物物理学⁵¹。

⁵⁰当然, 这里我们也不能忘记物理化学这个学科早期的一些奠基人, 像范德霍夫 (又译作范托夫, Jacobus Henricus van 't Hoff, 1852-1911 年)、理查兹 (Theodore William Richards, 1868-1928 年)、能斯特 (Walther Hermann Nernst, 1864-1941 年)、哈伯 (Fritz Haber, 1868-1934 年), 的贡献。在他们那个时候, 人们依然是基于原子论在对化学反应的微观机理进行探索, 量子力学还没有成熟。但他们对于物理化学学科的贡献, 不容笔者在这里不提他们。

⁵¹这里的划分依据是对国际上主流大学的物理系师资配备的分析。北京大学物理学院 2020-2021 年进行学科规划时, 笔者曾参与调研过国际上主流高校物理系的师资配置。这里的分析也是基于当时的一些数据。在我国目前的学科分类中, 声学、无线电物理、等离子体物理也是物理学下属二级学科。但整体而言, 从事类似研究的研究人员在国内外高校中的人员占比, 比起前面提到的几个, 还是要少一些。同时, 理论物理也是物理学下属二级学科, 但这个更像是一种研究方法而非方向或领域。前面提到的几个领域中 (比如高能物理、凝聚态物理、AMO), 人们都会用到理论物理的手段。统计物理这里没有提到, 有两个原因。一是它在我们国内物理学的学科划分中并不是独立的二级学科; 二是国际与国内物理学专业的师资配置中, 相关老师都会被放在凝聚态物理或者生物物理这些方向, 多数情况下并不独立组队。其中的第二点, 与统计物理和凝聚态物理、生物物理天然的紧密联系是密不可分的。我们这里需要强调一下统计物理非常的重要! 在第九章, 我们也会单独介绍。只是在这里, 我们并不花过度的笔墨。天文学, 严格意义上是独立于物理学的一级学科。但天文研究中的很多领域与物理也是很难分割的, 中间有一些内容确实也是物理的。

在这些分支中，高能物理学研究的是最小尺度下的时空结构，包括夸克、轻子、规范玻色子和希格斯玻色子等标准模型中基本粒子之间的相互作用，以及超弦这种探索统一的相互作用的理论方面的内容。核物理学研究的是核的内部结构，它的能量尺度比高能物理学低，而空间尺度比高能物理学略大。与之有一定关系的核技术是一门独立于物理学的隶属于工学的一级应用学科。天体物理学（宇宙学）的研究内容与高能物理学相比是另一个极端，也就是最大的时空结构。具体包括宇宙的诞生与演化以及最终的命运。AMO 目前研究的主题是激光、原子钟、量子信息、冷原子等，其目标是在单个光子层面实现最准确的调控。而凝聚态物理则是现代物理学中最大的、最多样化的领域，研究的对象是固体、液体等体系，它们都是大量粒子的集合。与之相应，这些粒子在一起也会产生一种“社会学行为”，也就是人们常说的衍生现象（Emergent Phenomena）【吴从军，2022】。

在人们关注凝聚态物理问题之前，在物理学研究中往往使用还原论的方法，习惯于将物质或现象归结为最基本的组成单元来研究⁵²。而凝聚态物理学科，从上世纪中叶，就开始关注“多带来不同 (more is different)”的衍生现象【Anderson, 1972】。这个改变是我们需要重视的。在物理学作为基础支撑其它兄弟学科（比如化学、生物学）的发展过程中，类似现象同样值得注意。最后是生物物理，在多数国际高校的师资配备中，它是和软凝聚态物理（比如液晶、膜、生物体系等）放在一起的。实际上，在物理学研究关注生物现象之前，人们关心的也是软凝聚

从科普的角度，我们不像基金管理那样要求严格的可操作性，更多的是导入性的介绍。因此，我们把天文也放在这里。在第九章，我们展开的讨论也会覆盖这部分内容。

⁵²实际上，凝聚态物理学科本身的发展也经历了气体理论、液体理论、More is Different 三种思维范式的两次变革。其中前两个也是以还原论作为指导思想的。气体理论直接将粒子间的相互作用按静态的平均场来处理；液体理论多以微扰展开的方式考虑动态的相互作用；只有在 More is Different 这个阶段，人们才开始意识到衍生现象必须用与还原论完全不同的思维方式来理解。

态物质。近年来,生命科学在整个自然科学的研究中开始占据越来越重要的地位。与之相应,生物物理也成为物理学研究中的一个重要领域。

这些分支之间存在着密切的联系,它们之间的概念与研究方法相互借鉴,也在很大程度上推动着现代物理学的发展。这些发展,我们希望能够在不久的将来可以作为基础,去支撑或促进其它现代科学的兄弟学科的进步。

1.2 物理学与哲学、自然哲学、科学、自然科学在学科属性上的关系

在很多读物中,我们会读到这样的句子“物理学即自然哲学”。这句话就物理学核心性质的表述来说,没有问题。但同时,我们也需要指出这种表述并不严格的。这种不严格,笔者猜测,或许来源于人们对亚里士多德的著作《Physics》(来自希腊语《Phusis》)这个词的误读。前面提到,在亚里士多德在建立其哲学体系时,是从 Physics 开始,进而按形而上学(Metaphysics)、逻辑学(Logics)、伦理学(Ethics)、美学(Aesthetics)等不同领域来进行展开。这里的 Physics 虽然和我们现在的物理学(Physics)是一个词,但意思却发生了很大的变化。比如,当时就有关于生命现象的讨论【赵敦华, 2012】,超出了书中物理学内容的范畴⁵³。亚里士多德的哲学体系中的 physics 更为准确的翻译应该是“亚里士多德的物理学”。

同时,除了 Physics,亚里士多德关于自然的研究还覆盖了 Astronomy、Geology、Biology、Psychology 等个领域。它们合在一起,共同构成了他的自然哲学体系⁵⁴。

⁵³这和我们现在说的物理学中的生物物理,还是有很大区别的。在我们现在说的生物物理中,物理学扮演的角色是很明确的。

⁵⁴关于这些领域,我们可以按冯友兰先生“哲学是思想人生之思想”这句话来理解。所谓自然哲学,就是研究我们身边的自然的哲学。当然,哲学这个词意味着这些研究必须关注的是最本质的东西,不能是实用性的技能。但自然这些词确实意味着自然哲学在这个时候关注的问题,比物理学要广,要包含 biology、geology 等内容。

这个体系中的确定性的知识(后来人们认识到可以被伽利略的方法证实或证伪),被人们称为科学知识⁵⁵。而科学本身,除了这些从两千多年前不同文明都已经拥有的“知识”本身,还有一个“知识体系”的涵义。这个并不是所有的文明都具备的。在文艺复兴与科学革命之后,在欧洲,自然哲学大体上被现代意义上的自然科学取代。而在自然科学的诸多学科分支中,对早期自然哲学核心思想体现的最深刻的,就是物理学。因此,人们现在提到自然哲学的时候,往往根据亚里士多德的那个著作名称(《Physics》)以及物理学最能代表自然哲学这个特质,直接将自然哲学和物理学对应。

基于上述讨论,我们可以说现代意义上的物理学是以“亚里士多德的物理学”为基础,加入科学革命中伽利略倡导的科学实验方法,通过牛顿力学向系统化、定量化的理论方向改进后正式建立的⁵⁶。它研究的,是事物最基本的运动规律及存在形式。亚里士多德的物理学是古希腊时期以他为代表的哲学家对这些问题的思考。内容上,当时亚里士多德进行的思考所针对的问题超过了现在物理学思考的问题。形式上,它与现在意义上的物理学存在很大差别(这一点我们会在 2.3 节详细介绍)。由于在古希腊语中 *phusis* 的意思就是自然的东西,强调本质、本

⁵⁵ 这里借用的是罗素在《西方哲学史》中的观点,他是基于科学、神学的来定义哲学的。在他的理论体系中,科学代表的是我们能够知道的确定性的知识,神学代表某种武断的信念,而哲学介于其中。如果以这种观点来看科学的话,那么人们在讲古希腊的时候会用到科学这个字眼。但是在本书中,我们强调科学脱胎于哲学这样一个事实,是科学革命的产物,这个词被广泛应用是 19 世纪上半叶之后的事情,它整体代表的是一种认识世界的方法(可以被实验证实或证伪)。在此之前,影响人们的世界观与人生观的还主要是哲学与神学。进入上个世纪之后,科学与哲学、神学的竞争中是如此的强势以至于很多时候人们把科学当作是真理的代名词。

⁵⁶ 《原理》在一定程度上参考了《几何原本》,从几个基本的假设出发,得到一个系统的理论。这在当时是一个潮流。因此,我们这里在描述亚里士多德的物理学向现代物理学转变的时候,也强调了系统化。

源、出处，有时人们会产生物理学即自然哲学这样的错觉。实际上，在亚里士多德的哲学体系中，物理学是与生物、地理、天文等领域合在一起构成了自然哲学的理论体系的。这些都说明了亚里士多德的物理学既不是自然哲学，也不是现代意义上的物理学。

同时，作者也必须承认“上述归类”纯粹是笔者在面对一个高中毕业进入大学的学生的时候为了让其尽快有个相对清晰的概念体系去进行各个专业的学习所进行的一些略显幼稚的努力。以数学为例，其学科属性没有统一的答案。罗素（Bertrand Arthur William Russell，1872–1970 年，也可以被成为 3rd Earl Russell，第三代罗素伯爵的意思，他是著名哲学家）认为数学属于哲学中的逻辑学。但多数数学家不热衷于这个，他们认为数学就是数学。笔者作为物理学的科研工作者工作了 20 多年，认识的很多同行也会认为物理学就是物理学。当然，相对于数学，物理学属于自然哲学这一点我们还是要明确很多。在完成本课程所对应的通识教育内容后，学生在后期专业课的学习过程中，会针对这些理解进行修正进而产生自己的理解。这里，为了让学生对上面提到的一些事件在时间上的顺序更加清晰进而更容易抓住上述讨论，我们简单地沿着时间轴画了关键历史事件的前后关系图（图 1.1），希望对读者理解这些概念的演化有一定帮助。

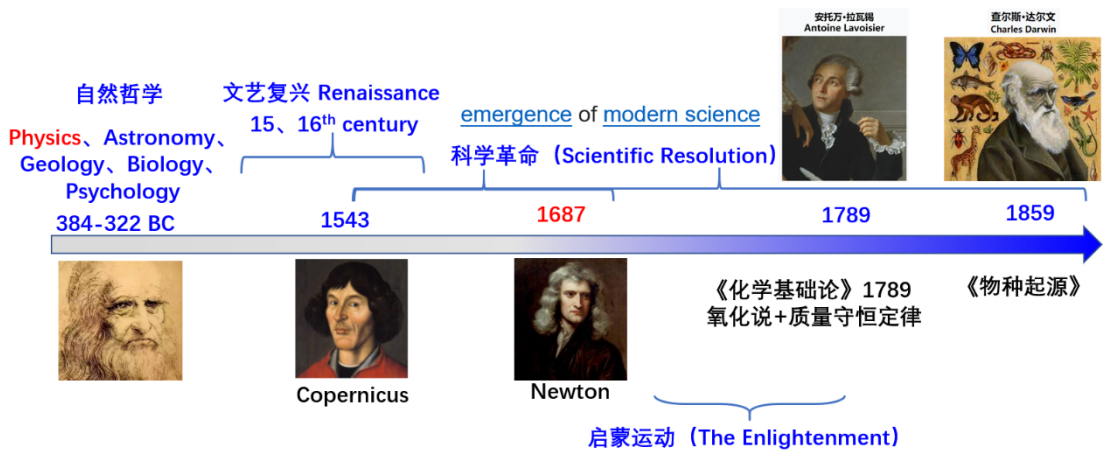


图 1.1 古希腊的自然哲学、文艺复兴、科学革命（狭义的说法是从《天体运行论》的出版

到《原理》的出版，也就是1543到1687；广义的说法是从1543年到1859年《物种起源》的出版，笔者认同这个观点）、启蒙运动这些事件在时间轴上的关系。科学革命的产物包含两方面，一是自然科学，包括现代意义上的物理学、化学、生命科学等；二是科学这种研究方法。

最后，我们还可以将上述讨论进行一个推广，借用罗素在《西方哲学史》(<A History of Western Philosophy>) 中的观点，把哲学放在科学与神学中间这个位置来进一步解释上述概念之间的关系【罗素，2022】。略有不同的是我们强调由于现代科学是科学革命的产物，在其产生前自然哲学就是哲学的一个分支。因此，就像图 1.2 所示，我们倾向于认为在哲学诞生之初，支撑人类世界观的是哲学与神学，科学知识并不占主体。但当时并不是没有科学知识，比如人们当时对力学、光学原理的认识，只是科学还没有成为一种被人们广为接受的世界观。而哲学，作为了一种“脱胎于神话与宗教的世界观”（摘自赵敦华老师《西方哲学简史》开篇），与神学共同支撑起了人类对世界、对人生的认识。自然哲学，作为哲学中的一个重要的组成部分，在西方哲学体系中系统地产生并发挥着重要的作用。

之后，经历了科学革命，自然科学从自然哲学中演化出来。而科学的方法，因为其可验证性，成为了人类在了解世界过程中最推崇的手段。通过科学的研究方法得到的科学知识也逐渐占据越来越多的传统哲学的研究领域，形成了我们现在所说的科学。很多时候，人们甚至将科学与真理之间划上等号，虽然从哲学上讲这是不严格的。当然，后来人们也认识到科学并不能取代哲学，于是便形成了科学、哲学、神学共同支撑人们的世界观与人生观的现状。在这个过程中，我们的物理学既是科学的先锋，也是科学的诸多分支中与哲学依然存在最密切的联系的那个分支，保持着最多的传统的自然哲学的色彩。这也就使得物理学可以在科学、哲学、神学所构建的这个人类认识世界的知识体系中扮演着或许是最为关键

的那个角色。这种不同的意识形态之间的由人所驱动的动态的演变，也是我们经常说物理学同时具有人文的、历史的特质的一个根本原因。在本书的写作过程中，相对于传统教材的专注于知识点的讲解的写法，笔者会不停地强调这类特质，让读者从另一个角度理解物理学。

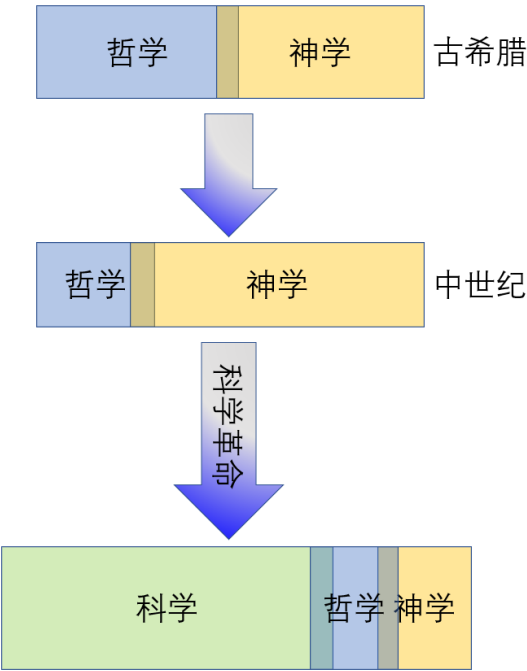


图 1.2 笔者以西方哲学发展为脉络总结的人类认识世界时科学、哲学、神学起到的作用的示意图。各部分的大小代表这种世界观当时在人们认识世界的过程中起到的作用。近代，无疑科学占据了主导。需要说明的是如果按照罗素在《西方哲学简史》中说的“科学告诉我们的我们所能知道的事物”、“神学带来的是一种武断的信念”、“哲学是某种介乎神学与科学之间的东西”，那科学在古希腊也是存在的（当然在我们华夏文明中也存在），比如力学原理。这里我们强调一下当时的科学更多的是一种具体的知识，并不是一个独立的世界观。这种知识可以被哲学中的自然哲学所涵盖。

1.3 物理学与数学的关系以及它们在发展过程中的密切联系

数学与自然哲学有着密切的关系，它是人们用来描述自然的语言。前面提到，在人类对自然进行最初的思考的时候，物理学就已经处在一个非常核心的地位。

物理学关注的是物质的存在形式及运动规律。这里，对物质存在形式和运动规律的刻画既需要几何这样的工具，也需要像算术与代数这样的工具。科学革命的时候，牛顿力学建立的数学基础是牛顿（Isaac Newton，1642–1727 年）与莱布尼茨（Gottfried Wilhelm Leibniz，1646–1716 年）所创立的微积分。但微积分的基础，则是笛卡尔（Rene Descartes，1596–1650 年）将代数与几何结合所建立的解析几何。这是数学史上的一次巨大的飞跃，它也促成了近代物理学的建立。因此，不管是从学科特质之间的联系，还是从历史事实来看，物理学离不开数学，它的发展也与数学的发展密切相关⁵⁷。

同时，我们在前面也提到过，把这种联系上升到形而上学的层面，按照康德（Immanuel Kant，1724–1804 年）的观点，人们在获取知识的时候需要先验形式，而时间、空间就是直观感性的先验形式⁵⁸。近期笔者读孙昌璞老师与葛墨林老师合著的《经典杨-米尔斯场理论》，发现前言中的一句话也可以很好地体现这个观点【孙昌璞、葛墨林，2022】。为了方便读者，我们将孙老师与葛老师的这段话写在这里进行分享：（前面谈到物理与数学的关系）…这是因为所有的物理现象都是在特定的时间内和特定空间中发生的，并且需要对它们进行定量的描述，而数学正式描述时空的几何形式和数量关系的精确手段[9]。

⁵⁷这句话我们可以参考罗素在《西方哲学史》中的一个观点来理解。他在第十六章，介绍柏拉图的时候，说到一个哲学家首先要掌握的是数学与逻辑。但数学与逻辑又都只是假设的，它们并不能证实有关现实世界的任何有绝对意义的论断。接受这一点，我们就可以去想象关于现实世界的有绝对意义的论断实际上是自然哲学以及后来的自然科学的内容，比如物理学、化学、生物学、地学。在这些内容中，物理学与数学与逻辑的联系无疑是最密切的。

⁵⁸这个是康德的时空观，时间与空间都是先验的。他生活的年代是伽利略、牛顿之后，爱因斯坦（Albert Einstein，1879–1955 年）之前。在相对论的时空中，它们相互联系，又与人的感官经验相关。

如果将哲学简单的分为自然哲学（研究自然的哲学，比如物理学、化学、生物、地理等在进化为现代科学的分支前研究的内容）、思辨哲学（形而上学、逻辑学等）、实践哲学（政治学、经济学、伦理学等），那么数学无疑在形式上与思辨哲学的关系是最近的。前面提到过，罗素也有一个观点是将数学纳入逻辑学。人们在回顾西方哲学史的时候，像毕德格拉斯、欧几里得这样的人物是一定要被提到的⁵⁹，而他们就是典型的数学家。在近代，当伽利略建立科学的实验方法、笛卡尔（Rene Descartes，1596-1650 年）强调理性的获取知识的方法之后，很长时间内，人们都是梦想着把哲学做成科学⁶⁰。到后来，人们认识到并不是所有哲学研究的内容都可以用科学的方法来做，比如美学。因此，还是把哲学、科学、神学并列为认识世界的最基础的工具。科学内部，人们一般也会进行自然科学、形式科学、社会科学的划分。在这个体系中，数学在形式上更像形式科学。因此，说数学是哲学与科学的分支都比较容易让人接受，但说数学属于自然哲学、自然科学则显然就不合适了。

既然物理学与数学相互之间没有从属关系，也不能说两者像物理学与化学那样都属于自然哲学，那么这里我们就把数学当作一个基础性比物理学更高一个层级的学科（按习惯这里也叫做兄弟学科），从历史发展的角度，来讨论两者的密切联系。

早期的很多物理学家也是数学家。同时，物理学的每一步重要进展也都与数学密切相关。从古希腊开始，欧几里得（Euclid）基于前人成就，总结出《几何

⁵⁹前者一定程度上代表了算术的成就，后者代表了几何的成就。这也是当时所有的数学。代数的产生，要等到公元后八世纪末、九世纪初。

⁶⁰在他们的那个时期，在哲学上，人们的研究重点从本体论向认识论的转化也是一个大潮流。和他们大致同时期，略早一些的来自我们国家的王阳明的学说，也具备这个特点。

原本》(<The Elements>)。它的出现,对于那个时候人们研究机械、静力学、光学、天文学问题是不可或缺的。十七世纪上半叶,笛卡尔建立解析几何。这大大丰富了力学问题研究的数学手段。十七世纪末,在牛顿力学的诞生过程中,牛顿与莱布尼茨(Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646–1716 年)分别发展出的微积分方法也起到了关键作用。相对于牛顿在英国较独立的工作,莱布尼茨所发展的微积分表述手段在欧洲大陆得到了更加方法的应用与推广。这里,除了莱布尼茨的表述方式比较好懂也方便使用外,其通过学生雅可比 I·伯努利(Jacob Bernoulli, 1655–1705 年)与伯努利家族(Bernoulli Family)建立的联系⁶¹,进而使得更多的数学家关注并进一步发展此方法,或许也是一个不可忽视的因素。

启蒙运动之后,偏微分方程与变分手段在欧洲也得到了广泛的发展,从欧拉(Leonhard Euler, 1707–1783 年)、达朗贝尔(Jean-Baptiste le Rond d'Alembert, 1717–1783 年)、拉格朗日(Joseph-Louis Lagrange, 1736–1813 年),到蒙日(Gaspard Monge, 1746–1818 年)、拉普拉斯(Pierre-Simon Laplace, 1749–1827 年)、勒让德(Adrien-Marie Legendre, 1752–1833 年),再到傅立叶(Joseph Fourier, 1768–1830 年)、安培(André-Marie Ampère, 1775–1836 年)、泊松(Siméon Denis Poisson, 1781–1840 年)、格林(George Green, 1793–1841 年)、柯西(Augustin-Louis Cauchy, 1789–1857 年),这些物理学家或数学家对这些数学工具进一步发展也为后期麦克斯韦方程的建立奠定了基础。

之后,电动力学的发展引起了人们对绝对时空(伽利略时空)的怀疑。在将时间与空间自由度联系起来的过程中,洛伦兹变换(Lorentz Transformation)起到了关键的作用。同样,斐茨杰拉德(George Francis FitzGerald, 1851–1901 年)、

⁶¹ 这个关系并不是严格的博士生导师与学生的关系,而是广义一些的“跟着学习过”的关系。

庞加莱（Henri Poincaré, 1854–1912 年）的贡献也不可忽视。作为这些数学成就促成的物理学的成果，狭义相对论在 1905 年的诞生。1908 年，闵可夫斯基（Hermann Minkowski, 1864–1909 年）提出了闵可夫斯基时空的概念。开始，爱因斯坦（Albert Einstein, 1879–1955 年）并没有对其充分认可。但在其发展广义相对论的过程中，爱因斯坦意识到了这个手段的重要性。同时，比这个早几十年（十九世纪六十年代），由黎曼（Bernhard Riemann, 1826–1866 年）发展出来的黎曼几何也为其提供了最基本的数学工具⁶²。或许也是因为这个原因，在爱因斯坦广义相对论完成的 1915 年下半年，希尔伯特也成为了那个唯一可以对其产生威胁的人（图 1.3）。在这个事实的背后，哥廷根大学这所大学在数学上的传承或许起到了最为重要的作用⁶³。



图 1.3 一个漫画，描述的是在广义相对论的产生过程中，希尔伯特可能对爱因斯坦形成的

⁶²黎曼是高斯（Carl Friedrich Gauss, 1777-1855 年）的学生。在高斯的建议下，他将自己教授资格考试（Habilitation，德国的学者在或者博士学位后，正式成为教授之前，要完成的另一部论文）的题目定为《On the hypotheses which underlie geometry》。这也就是我们常说的黎曼几何。

⁶³二十世纪初希尔伯特（David Hilbert, 1862-1943 年）在哥廷根大学数学系执教，他的前辈包括十九世纪前期和中期的 Gauss、高斯的学生黎曼，十九世纪末的克莱因（Felix Klein, 1849-1925 年）等人。

威胁。1915 年夏天，爱因斯坦到哥廷根大学进行一个讲座之后，就变得非常紧张，因为希尔伯特是那个很清楚地懂得他在做什么的人。据称爱因斯坦曾经向一位朋友透漏过自己的担心。但结果是爱因斯坦在那年完成了这项工作，并于 1916 年发表。

然后就是量子力学，其数学基础是我们现在所熟悉的线性代数（综合这些发展，我们再去想物理系的学生为什么要在大一学习微积分、偏微分方程、线性代数这些数学基础课程，就很自然了）。这里，我们需要指出在二十世纪初，能够掌握线性代数的物理学家其实屈指可数⁶⁴。在哥廷根，除了十九世纪黎曼对超越欧氏几何的几何概念的发展，在二十世纪初希尔伯特（David Hilbert, 1862–1943 年）本人也在线性代数的发展过程中起到了至关重要的作用⁶⁵。玻恩（Max Born, 1882–1970 年）作为希尔伯特的学生⁶⁶，更是在 1924 年到 1926 年量子论到量子力学的发展过程中，带领海森堡（Werner Heisenberg, 1901–1976 年）、泡利（Wolfgang Pauli, 1900–1958 年）、约当（Pascual Jordan, 1902–1980 年）等人在

⁶⁴后面我们会提到，这与线性代数与微积分相比是成熟于不同的年代的完全不同的数学相关。微积分的核心思想，也就是微分与积分的互逆，诞生于 17 世纪末。而线性代数的核心思想，矩阵，则产生于 19 世纪中叶。后者比前者晚 180 年左右，应该说在就抽象度而言，是完全不同层级的数学理论。现在，我们在大一就学习线性代数是因大学中的很多后面的课程会用到线性代数的内容。但我们在学习的时候一定要知道这个历史的顺序，进而，才能体会其中的一些内容的涵义。

⁶⁵早期的线性代数对应的问题是线性方程组的求解。十九世纪中叶，格拉斯曼（Hermann Grassmann, 1809-1877）对其进行了系统的总结。后来，希尔伯特提出的希尔伯特空间的概念（这个不是他自己命名的，他自己只是提出了一些概念，在他还在世的时候，人们已经把那些概念对应的空间叫希尔伯特空间了）。在这个空间概念体系中，本来线性方程组里面的一次齐次函数可以被扩展至定义了内积的线性空间中的任意向量。这样线性代数的应用范围就得到了极大的推广。后来，它也成为量子力学的数学基础。也正是因为这个原因，我们就不难理解为什么玻恩是参与建立量子力学的矩阵表述，但同时很快对量子力学的波函数方法表示认同的人？他应该是最早地能够认识到这两种表述方式完全等价的那一个或几个人。

⁶⁶此师生关系并不是我们常说的导师（supervisor）与学生（student）之间的关系。而是说玻恩在受教育阶段希尔伯特曾经扮演了 mentor 的角色，即 mentor 所对应的 student。类似角色在教育中其实非常重要。如果我们在维基百科上查一位学者的话，往往与 supervisor 并列，右边有个 mentor 的栏目。说的就是在这个人受教育过程中，对他/她提供了最关键的指导的那个人。

哥廷根做出了多项开创性的工作。在这个关键期，来自剑桥的狄拉克(Paul Dirac, 1902–1984 年)的工作是与来自哥廷根诸人、来自维也纳的薛定谔(Erwin Schrödinger, 1887–1961 年)的工作独立开展的，他对线性代数方法的掌握也很重要⁶⁷。在薛定谔方程建立后，狄拉克在发展相对论量子力学的时候，在把克莱因-戈尔登方程(Klein-Gordon Equation)改进为狄拉克方程的过程中，对泡利矩阵的应用也起到了关键的重要。作为希尔伯特的学生与助手，魏格纳(Eugene Paul Wigner, 1902–1995 年)与冯·诺伊曼(John von Neumann, 1903–1957 年)等人更是直接基于线性代数讨论了量子力学的数学基础。这些工作体现的，都是矩阵与线性代数这个数学工具对量子力学的重要性。

最后，我们提一下描述对称性的数学语言(群论)在近代物理学发展过程中的作用【李新征, 2024】。对称性是我们描述物理系统时经常用到的一个性质。而群论，作为近世代数的一门分支，是从十八世纪末出现，并在十九世纪至二十世纪初发展成熟的。它整体包含有限群、李群李代数两个部分的内容。有限群课程的主体是群结构与群表示，李群课程的主体是代数。我们可以先从有限群说起。应该说这已经是一个非常抽象、非常理性、非常高级的数学方法。它最早的发展起源于人们对寻求一元 n 次方程根式解这个问题是数学上的基本问题的探索。

在十六世纪，当卡丹(Girolamo Cardano, 1501–1576 年)、冯塔纳(Niccolo Fontana, 1499–1557 年)、费拉里(Lodovico Ferrari, 1522–1565 年)这些人通过配方、换元的方法找到了一元三次与一元四次方程的根式解之后，欧洲的数学界花了两百多年的时间来通过同样的数学技巧寻求一元五次方程的根式解，但一直

⁶⁷特别是狄拉克，我们现在很多在量子力学中使用的语言都是他基于自己线性代数的掌握，在十九世纪二十年代末创立的。

没有成功。十八世纪末，拉格朗日开创性地将一个一元 n 次方程的 n 个根式解作为变换对象引入了对称操作与群的概念。从他开始，到鲁菲尼，到迦罗瓦与阿贝尔，他们做的事情是从群论的角度去考虑代数方程的可解性与其根式解所对应的置换群之间的关系。最终，他们发现一个 n 阶置换群是可解群的条件，是它的不变子群形成的不变子群列具有一个特殊的性质：前一个不变子群对后一个不变子群的商群都是阿贝尔群。对于置换群而言，前四个都有这个性质。第五个及其以上，没有。因此，一元五次及其以上方程没有根式解。基于这些开创性的工作，人们开始研究群这个集合的结构特征并且建立的有限群理论。量子力学诞生后，人们在量子力学的本征态与这个量子体系对称群的不可约表示之间建立联系，进而可以通过群论的语言去描述量子力学的本征态及与之相关的各种跃迁。

除了有限群，群论中另外一个主体部分（李群李代数）的研究，可追溯至从十九世纪下半叶开始的非欧几何以及与之发展直接相关的拓扑学。基于当时的非欧几何与拓扑学初步概念，人们开始研究不同的非欧几何空间之间的联系，进而发展出李群李代数的理论。1870 年，克莱因（Felix Klein, 1849–1925 年）在爱尔兰根纲领中提出将类似几何学统一的愿景⁶⁸。这些理论后期在物理学的研究中也找到了重要的应用，尤其是在外尔（Hermann Klaus Hugo Weyl, 1885–1955）等人开创性地引入规范的概念之后。这些应用更是为物理学的进一步发展打开了一扇新的大门。作为结果，群论这门数学的课程也不可避免的成为了物理学专业学生在研究生学习阶段的必修课程。这里体现的，也是物理学研究与数学之间的密切联系。

⁶⁸这个爱尔兰根纲领实际上就是克莱因在爱尔兰根大学数学系的就职演说内容，对数学产生了重要影响。在爱尔兰根纲领中，克莱因多次提到李（Sophus Lie, 1842–1899 年）的工作。后来，克莱因转到了哥廷根大学，并在那里产生了更大的学科影响。

综合这些，我们可以把讨论放到一个落脚点。数学是人类描述自然的语言，在所有描述自然的科学分支中，毫无疑问物理学对数学的依赖程度是最大的。也正是因为这种紧密的关系，在物理学每个发展的关键阶段，数学上的进步要么与之伴随，要么是其取得关键进步的重要基石。对物理学而言，数学的重要性，或许无论如何都不可能高估！

1.4 物理学与其它自然科学的学科分支之间的关系

前面提到，物理学描述的是这个世界的物质的存在形式与最本质的运动规律。基于这些最基本的物质及其运动规律，自然界会发生很多现象，比如化学现象、生命科学现象、天文现象、地学现象。因此，就像数学是物理学的理论工具，在其它自然科学学科的发展过程中，物理学也往往会提供类似的基础理论支持。除此之外，我们还必须注意到：随着学科交叉的深入，这些其它科学学科的发展也会反馈到物理学研究中。比如，生物物理学就是基于物理学与生命科学的交叉来研究生命现象与物理现象。近年来，生物物理也在物理学研究中占据了重要的地位。下面，我们将以化学、生命科学、天文学与地学为例，详细介绍这种联系。

首先是化学，它研究的是分子的性质及其如何发生反应进而形成新的分子。在这个过程中，人们对构成分子的原子认识就起了关键的作用。历史上，道尔顿 (John Dalton, 1766–1844 年) 的原子论比拉瓦锡 (Antoine-Laurent de Lavoisier, 1743–1794 年) 的氧化还原学说晚一些。原子论的提出对氧化还原学说提供了理论层面关键的支撑。之后，尽力了一百多年，人们才在认识原子内部结构的时候建立起了量子力学。量子力学在建立后，更是与统计力学一起，成为了现代化学最基本的理论工具。从朗缪尔 (Irving Langmuir, 1881–1957 年)、路易斯 (Gilbert

Newton Lewis, 1875–1946 年), 到鲍林 (Linus Pauling, 1901–1994 年), 都是与物理学家交流密切的化学家。他们也是把量子力学用到化学研究的先驱。基于这些人的工作, 我们现在基本认识到化学键其实就是原子核在相互靠近时, 由于电子在量子力学基本原理的作用下产生的重新分布, 进而带来的原子核之间的有效绑定。这一切, 可以用玻恩-奥本海默势能面来理解 (图 1.4, 具体的涵义我们会在 9.1.1 小节进行介绍)。现在, 人们在理解很多化学反应过程的时候, 玻恩-奥本海默势能面也是其最为依赖的理论概念。

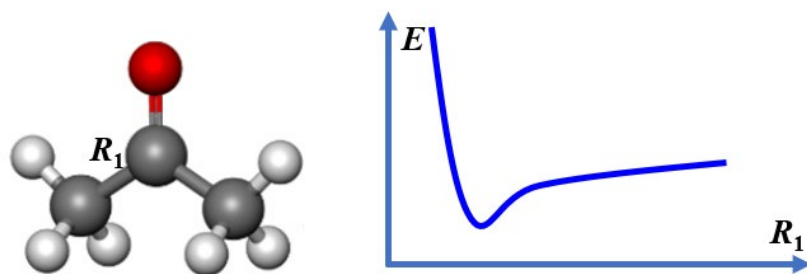


图 1.4 左边是丙酮分子的结构示意图, 原子核被描述为一个球, 化学键被描述为一个棒子。这就是我们常说的描述物质结构 (包括分子、团簇、液体、晶体等) 的球-棒模型。右图代表的是我取两个碳原子之间的距离作为 x 轴, 变化这个距离, 那么电子作为量子胶就会反馈给原子核不同的作用力, 进而构造出如图中兰线所示的玻恩-奥本海默势能面。当我对多个键长、键角都做这个处理, 那么玻恩-奥本海默势能最小的地方对应的就是我们说的将原子核看作经典粒子、电子当作量子胶来处理时的最稳结构。当然, 在这个球-棒模型的图像下, 原子核是经典的点电荷。原子核的运动也不会带来电子在不同的玻恩-奥本海默势能面之间的跃迁。现在已经有很多的物理和化学现象揭示出真实的世界比这个图像要复杂很多【李新征, 2014】。但在使用量子力学理解多原子体系的微观结构与动力学的时候, 我们还是可以从这个图像出发, 之后再加入各种修正来进行的。

在历史上, 数学、物理学、化学这些学科的发展一直是这样相互扶植, 共同进步的。像卢瑟福 (Ernest Rutherford, 1871–1937 年, 原子行星模型的提出者) 这样的物理学家, 得的也是诺贝尔化学奖。现在德国有个很重要的研究机构, 叫

马克斯·普朗克学会 (Max Planck Society, 简称马普学会)。他相当于我们的中国科学院。它是二战之后成立的。马普学会的一些比较有历史的研究所实际上成立于二十世纪初, 在一战结束前属于凯撒威廉学会⁶⁹。这个凯撒威廉学会 (Kaiser Wilhelm Society) 早期有两个很重要的研究所, 一个叫数学物理所 (所长是爱因斯坦), 一个叫物理化学所 (所长是哈伯, 全名 Fritz Haber, 1868–1934 年)。这两个研究所的设置, 一定程度上反映的也是数学、物理、化学这三个学科之间的交叉⁷⁰。同时, 那个时候很多优秀的物理学家, 比如魏格纳 (Eugene Paul Wigner, 1902–1995 年), 在本科到博士阶段学的也是一直是化学。他们之所以能够在数学、物理、化学这些基础学科领域之间转换, 所处研究组或者朋友圈中不同学科之间深入广泛的交流是一个重要的软环境。近年来, 化学中量子化学领域一些关键的计算方法的发展, 包括 AI 技术的发展, 也为人们理解凝聚态体系中复杂的电子结构提供了新的思路⁷¹。物理学中任何一个新的进展, 在化学研究中也都会有所体现。这些, 无不反映着现代科学研究中数学、物理、化学密不可分这样一个事实。

除了化学, 物理学与生命科学之间也存在着密不可分的联系。早期, 孟德尔

⁶⁹当时的德国还是从普鲁士王朝发展起来的德意志帝国, 不是现在的德国。

⁷⁰换句话说, 没有成立数学所、物理所、化学所三个研究所, 而是数学物理所、物理化学所, 这两个。

⁷¹比如德国马普学会斯图加特固体物理所理论部的负责人 Ali Alavi 教授就是一位理论化学家。近年来在量子多体领域非常活跃的加州理工大学的 Garnet Kin-Lic Chan 教授, 他也隶属于加州理工的化学系而非物理系。牵扯到关联电子结构体系的第一性原理计算, 理论化学与凝聚态物理的很多会议的报告人也经常会高度重合。而这里提到的 AI 基础, 我们学物理的人可能关注的是 2024 年的诺贝尔物理奖。但当年的诺贝尔化学奖同样奖励的是这个领域。应该说, AI 技术的发展是物理、化学、生物等领域合力促成的, 我们不能狭隘地把这个归于物理。

(Mendel) 在进行豌豆实验时, 生物学界流行两种学说。一个是融合遗传观, 一个是颗粒遗传观【张天蓉、葛惟昆, 2021】。融合遗传观认为遗传物质像液体一样, 是以融合的形式进行遗传的, 无法分开。而颗粒遗传观认为遗传物质类似于原子, 是可以独立存在的。请大家注意孟德尔 (Gregor Mendel, 1822–1884 年) 进行豌豆实验的时间, 是 1856 年。这是远远晚于道尔顿提出原子论的时间的。换句话说, 孟德尔在进行豌豆实验, 并发现分离定律与自由组合定律, 进而提出遗传因子的概念的时候, 物理学中的原子论在思路上是具有一定的指导意义的⁷²。

近年来, 随着物理学与生命科学的进一步发展, 人们更是认识到将生物学研究拓展至定量的层面, 物理学的支撑更是必不可少。一方面, 现在物理学的发展可以为生命科学提供现代化的实验手段 (比如冷冻电镜技术); 另一方面, 物理学为生命科学提供了理论和研究方法 (热力学与统计方法); 除此之外, 物理学在向生命科学渗透的过程中拓宽了自己的研究领域。以生物物理这个交叉学科为例, 它的核心, 就是应用物理学的概念和方法, 研究生物各层次结构与功能的关系、生命活动的物理、物理化学过程和物质在生命活动过程中表现的物理特性。其目的, 是阐明生物内有关物质、能量与信息的时间和空间的变化规律。因为这个原因, 生物物理学与研究大分子的软物质凝聚态、细胞内外物理化学过程的分子生物学、多组元相互作用高度非均匀非线性的复杂系统理论有密切的联系, 在医学的临床上也有重要应用。

最后, 我们再来看一下天文学与地学, 其中很多关键的研究与物理学研究领

⁷²当然, 这是一个推测。这个例子我们取自张天蓉、葛惟昆两位老师合著的《科学传奇》【张天蓉、葛惟昆, 2021】。

域的进展同样密切相关。比如,1802 年的英国化学家、物理学家渥拉斯顿(William Hyde Wollaston, 1766–1828 年)发现太阳光的谱线中有一些黑线。但他将这些黑线当成是光谱中不同成分的边界,这个错误认识在 1914 年由德国物理学家夫琅和费(Joseph von Fraunhofer, 1787–1826 年)进行了更正⁷³。大约 45 年之后,基尔霍夫(Gustav Kirchhoff, 1824–1887 年)与本生(Robert Bunsen, 1811–1899 年)进一步发现这些暗线的位置可以与化学元素发射谱的频率一致。这些谱线的量子本质是在二十世纪二十年代末伴随着量子力学的诞生才被人们真正理解的。但在此之前,在天文学研究中,人们已经开始利用这种谱线技术来分析各种星体的物质构成了。此外,我们还可以很容易地想象类似光学、电磁学的发展对于天文观测同样重要。往更基础的层面来说,广义相对论的发展,为人们理解天文观测与宇宙的结构提供了最基本的理论框架。

地学方面,除了人们在理解大气层时应用物理学知识形成了空间物理学科,人们在理解地球内部结构的时候,物理学同样是关键的工具。以地心物质的构成为例,人们是无法真正取到其样品的。但基于对其温度、压强条件估计,人们可以对含有一定杂质的铁进行此热力学条件下的模拟(模拟中用到的基本工具是量子力学与统计物理),进而得到其力学、磁学性质,为人们真正理解地球的结构与性质提供帮助。与这个应用类似的还有地幔中水的形成。当人们利用量子力学与统计物理进行模拟时,也可以分析出含氢氧根的矿物质在特定温度、压强条件

⁷³夫琅和费的特长是做光学仪器。一束白光打过来,因为不同波长的光的介电常数不一样,利用棱镜,就可进行谱线分析了。夫琅和费发现太阳光中有一些暗线,并更正了渥拉斯顿的解释。德国的科研机构中,没有德国科学院、工程院。与之对应,有马普学会、夫琅和费学会,前者关注基础研究,后者关注应用研究。这种设置或许也与普朗克、夫琅和费这些人本身的研究特质相关。当然,他们之外还有,莱布尼茨学会。依据类似标准进行严格的划分,或许也是不实际的。但这些学会之间整体的区别,还是有的。

下产生水的微观机制，为建立地球中水循环的图像提供最基本的元素。

1.5 现代物理学研究的典型领域与现代物理学理论的基本特点

最后我们来简单讲一下现代物理学研究的典型领域，具体包括：它们是如何划分的，以及它们之间存在什么样的相互联系？前面提到过，物理学研究目前大致可分为六部分：高能物理学、核物理学、天体物理学（宇宙学）、原子/分子物理学与光学（AMO）、凝聚态物理、生物物理学。

我们首先要说明的是这种划分与我们在高中课本上学的物理学是非常不一样的。高中物理中，我们对物理学的介绍应该是按力、热、光、声、电这些现象来展开的。但现在对物理学的分类，会按研究对象（比如原子/分子、凝聚态、等离子、核、粒子等）展开。造成这种区别的一个原因，应该说是发生在上世纪初的物理学革命深刻地改变了物理学的研究模式。这场物理学革命催生出量子力学与相对论，对经典的物理学图像进行了革命性的变革。在此之前，人们对很多现象的认识是可以基于欧氏空间、经典粒子这些比较直观的图像来进行的。在此之后，量子性与相对论性，加上之前发展起来的统计物理，成为了人们描述物理现象时最基本的语言，沿用至今。力、热、光、声、电这些不同的现象，可以在这些语言的框架下被统一地描述。换句话说，以工具或现象为判据无法准确描述物理学面临的问题了。

于是，人们换了一个思路，把物理学研究面临的挑战大致分为两个部分。第一部分主要在高能区域，当然也包含核物理。这些研究的特点是不满足于已有理论工具，沿着还原论的思路去寻求描述微观世界的更为基本的图像。第二部分是主要集中在凝聚态物理、原子分子物理、等离子等领域。特点是满足于现有基本

理论，基于其研究客观世界。这里，由于关注的体系越来越复杂，更多新奇的现象也会不断涌现。

高能物理学和凝聚态物理是人们沿着这两个思路拓展物理学研究的最为典型的代表。在高能物理的研究中，人们需要借助于高能加速器撞击粒子，发现不能被现有物理学语言描述的现象，进而完善物理学的语言。而在凝聚态物理的研究中，人们是以量子力学、相对论、统计物理作为基本工具，去研究复杂的实际体系的。由于人们感兴趣的往往不是一个或几个粒子，而是阿伏伽德罗常数个粒子的集合，这些粒子间由于相互作用，会带来很多新奇的衍生现象【Anderson, 1972】。对这些衍生现象的研究，既扩展了物理学的边界，也为人们利用物理学的研究成果来改变世界提供了可能。

物理学的这些分支所关注的问题，尽管在空间和能量尺度上非常不同，但都是相互紧密联系的。就像前面提到的高能物理和凝聚态物理，虽然代表了现在物理学研究的两种非常不同的价值观，但它们通过交流诸如量子场论和对称性自发破缺的思想和概念，是彼此受益的。比如，在凝聚态物理与统计物理的研究中发展起来的对称性破缺与重正化的思想就影响过粒子物理的发展【Weinberg, 2008】。再比如，现在很热的一个领域，叫冷原子物理学，它最初是AMO物理学的一个方向。但在过去二十年中，它又成为了AMO和凝聚态物理学之间交叉科学的新领域【Anderson, 1995】【Davis, 1995】，研究诸如玻色-爱因斯坦凝聚、超冷费米子超流在内的新量子物态各种衍生现象。

同时，我们还需要强调物理学由于其学科性质是探索客观世界的基本规律，是一门前沿性的基础学科。其“基础”特质，我们一定要有充分的认识。同时，物理学研究的内容，也是随着时代的发展不停更新的，它人类的发展相伴随。

现在物理学的研究内容及其分类，与五十年前肯定是不同的。即使有些领域的名字没变，其具体研究内容也都发生了很大程度的变化。也正是因为这个原因，笔者在写本书的时候，更多的是把关注点放在昨日的物理。用一些经过了时间沉淀的规律性的东西，来讲解物理学的学科规律。对于目前很热的一些领域，我们不会介绍太多，因为这些内容的意义还是需要时间来检验。当然，课程最后肯定会适度讲解一些今日的物理学研究的内容。

最后，让我们用杨振宁先生与张守晟老师经常使用的一句诗来结束本章对物理学的整体介绍：一沙一世界，一花一天堂。这句诗，是英国诗人布莱克（William Blake, 1757-1827 年）在<Auguries of Innocence>这首诗中的开头四句，原话是：To see a world in a grain of sand, and a heaven in a wild flower, hold infinity in the palm of your hand, and eternity in an hour。作为一个从事了多年物理学研究与物理学教学的大学老师，现在的笔者认为这句话确实能非常准确地抓住了物理学的特点，以及物理学内在的美⁷⁴。物理学的“大”，决定了我们会关注我们可能面临的任何关于自然的问题。而物理学的“基础”，又决定了我们关注的是这些问题的本质。它们之间，可以按某种形式进行连接。如果自然科学有那么一个分支可能抓到这个连接的话，那一定是物理学⁷⁵！笔者把这句话放在这里，供读者在针对本书展开阅读的时候进行体会。

⁷⁴当学生的时候不太能体会到。

⁷⁵笔者绝对不是一个“大物理学”的提倡者。相对于多数笔者在物理系或者物理学院的同行，笔者肯定是与化学的同行交流的最多的那几个之一。笔者也充分尊重生命科学、地学等兄弟学科的研究。笔者只是从自然科学发展的历史，进行这样一个感慨，供读者参考。

第二章 文艺复兴与科学革命之前的自然哲学

上一章，我们提到了物理学源于自然哲学。在科学革命之前，自然哲学在描述客观世界的物理问题时，整体遵循的是亚里士多德在《Physics》中建立的哲学方法。科学革命之后，由伽利略建立的通过实验证实与证伪来确定具有预测性的理论的正确性的科学的研究方法成为了正式的科学研究的方法，并被广泛地应用到自然哲学的各个领域。牛顿之后，由类似研究所产生的理论的预言性更是达到了定量的程度。科学革命的一个结果，是原本自然哲学研究的内容，除了残留的比较偏哲学层面思考的部分（转变为形式科学），大体上被自然科学取代。而物理学（此时已是现代意义上的物理学）又是自然科学的一个重要的分支。由于其与化学、生物学这些分支相比，更能代表自然科学的前身（自然哲学）的基本属性（研究物质世界最基本的性质与运动规律），人们往往将物理学与自然哲学这两个概念混淆。这个，我们在上一章已经解释过，这里再次澄清一下。

上面，我们在解释物理学、自然哲学这些概念的时候，科学革命是被当作一个关键的历史时期来处理。而科学革命，在一定程度上又是由文艺复兴、大航海（特别是文艺复兴）这些历史上的事件诱发的。既然我们提到过本讲义将按历史时间顺序来讲解物理学的发展，那么在本章，我们也将本书讨论的起点定为：文艺复兴与科学革命前的自然哲学。

此题目意味着课程中我们一定要讲一些古希腊哲学的内容。在哲学方面的教材中，介绍西方哲学特别是古希腊哲学时经常将苏格拉底作为一个分割点。其之前的部分定义为前苏格拉底时期的哲学⁷⁶。这种划分，往往是基于在古希腊苏格

⁷⁶在第六章，我们会提到康德也经常被作为一个分水岭。因此，在哲学方面的读物中，大家经常会看到 pre-Socratic、post-Socratic、pre-Kantian、post-Kantian。

拉底 (Socrates, 公元前 470–399 年) 是一个“将哲学从天上拉回人间”的人物的考虑。同时, 在他的带领下, 他的学生柏拉图、以及柏拉图的学生亚里士多德更是在雅典把古希腊哲学推到了最高峰。但在本书的讨论中, 由于我们关注的重点是自然哲学中的物理学, 而亚里士多德在自然哲学方面对后世的影响更大。因此, 在组织章节的时候, 我们是以亚里士多德作为最关键的分割点来展开讨论的。

同时, 我们还需要说明: 我们在按历史顺序讲述亚里士多德之前的自然哲学的时候, 发现跟随赵敦化老师的《西方哲学简史》前几章的顺序, 用智者运动来将自然哲学的发展进行分割针对学生讲这部分内容是比较顺的【赵敦华, 2012】。因此, 在最终讲义中, 前三节就按前苏格拉底时期的自然哲学、智者运动以及苏格拉底&柏拉图 (Plato, 公元前 420s 到 340s) 对其的否定、亚里士多德的自然哲学展开。

亚里士多德之后, 包括欧几里得 (Euclid, 生活在公元前 300 年左右)、阿基米德 (Archimedes, 约公元前 287–212 年)、托勒密 (Ptolemy, 公元后 100–170 年) 等人在内的一系列人物在自然哲学与数学的发展又扮演了极其重要的角色【朝永振一郎, 2017】【Lloyd, 2021】。因此, 第四、五、六节又分别按欧几里得与《几何原本》、阿基米德&埃拉托色尼 (Eratosthenes, 公元前 276–194 年) &阿波罗尼奥斯 (Apollonius of Perga, 公元前 262–190 年)、古希腊与古罗马的天文学展开。这些总结都是罗列式的。罗马帝国衰亡之后, 阿拉伯世界兴起。另外, 在人类文明史中, 印度文明与我们华夏文明也对自然哲学与数学做出了重要的贡献【冯友兰, 2013】【张红, 2007】。因此, 最后两节分别以罗马帝国之后的欧洲&阿拉伯世界与印度、中国早期的科学与数学为题目来展开。

除了这些, 从尊重出处的角度考虑, 我们还需要说明本书的前三节 (亚里士

多德及之前)大量参考了赵敦化老师的《西方哲学简史》中的内容【赵敦华,2012】,第八节(中国早期的科学与数学)借用了很多冯友兰先生在《中国哲学简史》中的观点【冯友兰,2013】。由于笔者的专业并不是历史与哲学,笔者仅希望通过这一章让刚刚进入大学的同学们体会一下我们物理学这个学科的“根儿”。更为深入的理解,请大家一定通过扩展阅读来获得!

2.1 前苏格拉底时期的自然哲学

我们从赵敦华老师在其经典教材《西方哲学简史》中的一段话出发来开始这部分的讨论:“人类最初的文化形态是宗教和神话,哲学脱胎于宗教和神话的世界观。世界各民族都有宗教和神话,但不是每一个民族都有哲学。在诸多古代文明中,只有中国、印度和希腊产生出一般意义上的哲学,并且,这三个民族的哲学是在大致相同的历史时期诞生的”【赵敦华,2012】。

在这里,赵老师引用了二十世纪德国著名哲学家卡尔·雅士培(Karl Jaspers, 1883-1969 年)提出的轴心时代(axial age)的概念,将人类早期文明的精华聚焦在三个地方。其中,古印度哲学因为其关心的内容又多为人与神的关系,我们暂且放到一边不说。中国与古希腊的哲学,按赵老师的说法都具有如下特征:“世界观萃取的过程中,一定有个思辨的过程,有个实践的过程。思辨的目的是实践。这个在希腊哲学和中国哲学中体现地都比较全面”。两者的区别,体现在价值判断上。相比之下,古希腊自然哲学的成果也比较多⁷⁷。而中国哲学将实践看得比

⁷⁷这里在将哲学不同分支分类时,将自然哲学、思辨哲学、实践哲学三者并列。自然哲学含 Physics(当时的 Physics 严格意义上是 Aritotelian Physics,亚里士多德的物理学)、天文学(Astronomy)、地学(Geology)、生物学(Biology)、心理学与灵魂说(Psychology)等;思辨哲学含逻辑学(logics)、形而上学(metaphysics)、认识论(Epistemology);实践哲学含伦理学(Ethics)、政治学(Politics)、经济学(Economics)、修辞学(Rhetoric)等。此习惯最早可追溯至亚里士多德。当然,不同哲学家对哲学的分类是很不相同的。这里采用的只是一种说法。

较重，实践哲学的成果比较多⁷⁸。这也为自然哲学在希腊以学派的方式爆发奠定了基础。

就地理环境而言，古希腊毗邻地中海。地中海气候整体上来讲是比较温暖的，加上地中海的风浪不大、海洋面积也比较辽阔。这就非常利于航行，也使得在很早的时候地中海附近的国家就有了航海的传统。比如希腊、迦太基⁷⁹，都是这样的古国。就版图就面积而言，古希腊要比现在的希腊共和国大很多，包括了希腊半岛、爱琴海诸岛、爱奥尼亚群岛和小亚细亚半岛西部沿海地带（图 2.1）。古希腊文明与我们的华夏文明相比具有鲜明的海洋文明的特征，这与其地理环境是密切相关的⁸⁰。与我们华夏文明的先民对世界采取天圆地方的描述不同，由于航海中远处的船首先呈现出来的是帆⁸¹，很早的时候他们就有了大地是球形的猜想⁸²。也是航海，为其带来了古巴比伦文明、古埃及文明、克里特文明的输入⁸³，加上

⁷⁸这仅仅是一种说法，我们的传统哲学中也有很多思辨的东西。在“罢黜百家、独尊儒术”之后，实践彻底占据了主体。

⁷⁹现在北非的突尼斯一带的城邦国家。

⁸⁰除了上面提到的气候与海洋，希腊半岛的陆地部分也多山地。山地对于农业来讲肯定不是有利因素，这促成了他们对航海与商业的重视。

⁸¹这是一个说法。另外还有两种说法，分别是通过地球在月亮上的投影来判断，以及古希腊人在旅行的时候，发现在南方地区观测到的北极星的位置比起在北方地区观测到的位置要低一些。不管是那种说法，均反映出几何学（尤其是球形）在古希腊哲学研究中的重要地位。

⁸²在古希腊的自然哲学中，圆与几何占据了重要的位置。以柏拉图为例，他对于几何学的崇尚可以说到了有点极端的程度。他在古希腊的文化摇篮（柏拉图学院）的门前篆刻一条戒律：不懂几何者不许入内。而在古希腊的几何中，圆形与球形又占据了核心的位置。

⁸³按赵林老师网上课程《古希腊文明的兴衰》中的观点，巴比伦、埃及、爱琴海三个古文明之间的大循环以及爱琴海内部克里特岛、希腊本土、小亚细亚之间的小循环对于由此滋生的古希腊文明达到最后的高度都是至关重要的。此地理因素也意味着其文明一直具有开放的特质。

其本土的迈锡尼文明的传承，古希腊文明从公元前七世纪开始在小亚细亚半岛迎来绽放，进而影响到希腊本土。这段历史在时间节点上，与我们的春秋战国是很接近的。

这个过程中，一个很重要的地区是小亚细亚的伊奥尼亚（Ionia），它处在东西方文明的交汇地（图 2.1）。在公元前七世纪，这个地区的米利都（Miletus）与爱菲斯（Ephesus）都已经发展成重要的商业与政治中心。与之相应，这里的人的思想也是非常活跃的。按时间顺序，在哲学上，伊奥尼亚地区先后涌现来自米利都的泰勒斯（Thales of Miletus，约公元前 620 年代到 540 年代）、阿那克西曼德（Anaximander of Miletus，约公元前 610–546 年）、阿那克西美尼（Anaximenes of Miletus，约公元前 586–526 年），和来自爱菲斯的赫拉克利特（Heraclitus of Ephesus，生活在公元前 500 年左右）。他们统称伊奥尼亚派。

其中，泰勒斯是公认的西方哲学第一人。我们所知道的“仰望星空”的典故就来自与他⁸⁴。泰勒斯针对世界是由什么组成的这个基本问题，提出了水本原说，并开始借助经验观测与理性思维，摆脱神话，来解释世界⁸⁵。其大致思想，就是基于他对万物都是以湿的东西为养料这样一个观测，以及热本身由湿气产生并由湿气维持这样一个思考，提出了万物的种子都具有潮湿的本性，而水是潮湿本性的来源这样一个学说。在他之后，作为一定程度上的传承，阿那克西曼德与阿那

⁸⁴相传泰勒斯晚上走路时总是通过头望星空来判断第二天是否有雨。但不小心一脚踏空，掉进泥坑，后被人救起。人们借此讥笑哲学家知道天上的事情，却看不见脚下的东西。

⁸⁵以地震现象的解释为例。在希腊神话中，地震是由海王波塞冬（Poseidon）造成的。而泰勒斯认为大地是由水托浮的，当水波的颤动使大地摇晃时，地震就发生了。这个理论虽然简单，但它是一个自然主义的解释，没有借助于神话。此部分内容采自清华大学张卜天教授翻译的由剑桥大学劳埃德（Lloyd）写的《希腊科学》（<Greek Science>）第一章。在我们的传统中，自然现象也会被归结为具有人格特征的神。

可西美尼又分别提出了无定形说与气本原说来解释世界的构成。无定形的初衷是水本原不能解释类似于磁性等明显与水无关的现象,于是阿那克西曼德与阿那可西美尼将其进行抽象化以期描述更多的事情。而气本原则是給这个抽象话的东西一个具体的名称。

比他们再晚一些,来自爱菲斯的赫拉克利特提出了火本原说。他认为世界的归宿是火,而火与万物之间的循环是火的运动。通过火,赫拉克利特强调了运动。同时,同一、相对、和谐与转化这些特性都在他的学说中得到了很好的体现,这也为后来亚里士多德的自然哲学的提出奠定了基础。

除了运动与变化,赫拉克利特对哲学的另一个重要的贡献是他提出了逻各斯(logos)这样一个概念。它的本意是话语,隐含意义是说出的道理,有点像我们的《道德经》中所说的道⁸⁶。基于这些道理,有用的知识就构成了不同的学科,比如 biology (生物学)、geology (地质学),它们的词根 logy 都和 logos 有关。正确的道理描述的是真实的原则,反映我们透过表象看到的事物的本质。赫拉克利特有一句名言,“自然喜欢隐藏自己(Nature loves to hide)”,说的就是事物运动的 logos 是看不见的,只有思想才能发现它。这个逻各斯的方法后来经过苏格拉底(Socrates, 公元前 470 年-公元前 399 年)、柏拉图(Plato, 公元前 428 或 423 年-公元前 348 年)、亚里士多德(Aristotle, 公元前 384 年-公元前 332 年)的发展,成为系统化的辩证论证(dialectical argument)的方法。而目前提到的这些来自伊奥尼亚的学说,反映的都是自然哲学的本质。其核心,就是:利用思想、基于辩证、发现智慧、说出真理,之后按自然行事。这也是物理学最核心的精神,到现在也没有变。

⁸⁶这个观点来自于喜马拉雅平台上张宁、言亮两位老师的《人文通识-哲学》课程。



图 2.1 古希腊地图，小亚细亚的伊奥尼亚地区在右边被圈出。

比伊奥尼亚学派稍微晚一些的是毕得格拉斯学派，他们来自于亚平宁半岛，而非小亚细亚。毕得格拉斯学派是研究数学与宗教的群体。与伊奥尼亚学派认为世界的本原是单一的、可变的不同，他们认为数是万物的本原。一切事物的形状都有几何结构，而几何结构则与数对应。数是众多的、不可变的。因此，他们否认变化，认为世界的本原是众多的、不变的。由于当时人们知道的数仅限于有理数（Rational Number），这也就意味着构成几何图形的线段是有公度的（commensurate）。但不得不说，毕得格拉斯定理本身就蕴含着无理数（Irrational Number）的存在。这个矛盾也困扰着毕得格拉斯学派。

在目前提到的两个学派中，伊奥尼亚学派认为世界的本原是单一且运动与变化的某种物质，毕得格拉斯学派认为世界的本原是众多且不变的数。与这两种思维方式对应，还有个爱利亚学派，强调世界的本原是不变的一，并借此否认运动。爱利亚学派的代表人物是巴门尼德以及他的学生芝诺（Zenon）。其学说中流传最广的段子就是芝诺悖论（Zenon Paradox）⁸⁷。这里，芝诺针对伊奥尼亚学派的变化本原观，提出否认运动可能性的四个论证。我们以最常被用到的两个为例，来

⁸⁷Paradox，这个词也有佯谬的意思；佯谬是看起来不合理但逻辑上是对的，而悖论就是逻辑上就不对、有矛盾。这里，这个词对应的是悖论。

说明物理学常用的一些研究方法对于我们驳斥这些悖论有什么帮助？这也可以在一定程度上说明学习物理学对于我们理解这个世界是由很大的帮助的。这两个例子具体如下：

1. 二分法：运动的物体在达到其目的地之前，总是要先完成全程的 $1/2$ ，再完成后半程的 $1/2$ ，再完成余下部分的 $1/2$ ，以此循环下去，因此永远达不到终点；
2. 奥林匹克冠军阿基里与乌龟赛跑：先让乌龟跑一段。那么，赛跑开始后，阿基里先跑完这段。在这个过程中，乌龟已经向前挪了一段。之后，阿基里又必须跑完这一段。在这个过程中，乌龟又向前挪了一段。以此类推，阿基里永远赶不上乌龟；

这里，芝诺以思辨的方式，首次采用悖论的方法来研究一个自然哲学的问题。相应的思想实验，后来在物理学研究中也成为了一个基本的手段。

我们先利用芝诺的悖论来强调三点。第一点，悖论是一个重要的研究物理问题的方法；第二点，芝诺确实具有很强的思辨的能力（亚里士多德认为他是辩证论的创始者）；第三点，也是最重要的，理解其错误的根源也恰恰能反映出在物理学研究另外两个手段（基于数学的理论与基于实践经验的实验）的重要性。

针对第三点，我们略作说明。这两个手段中，第一个手段是实验。以阿基里与乌龟的赛跑为例，让阿基里与乌龟跑一次，或者让另一个类似的跑着与乌龟跑一次，结果自然清楚。当然，类似通过实验来判断一个理论正确性的研究方法的确立要等到将近两千年之后的伽利略。第二个手段，是数学。如果我们画一个物体运动距离与时间的依赖关系的图（图 2.2），我们很容易知道芝诺关注的只不过是图中标记出的事件点（左图中的终点、右图中的相遇点）之前的事情。他把时

间进行了无限分割，且否认了时间的均匀性。对时间流动均匀性的否定（也就是说他不允许时间流过事件点），是这个悖论最根本的错误。套用孔子的一句名言，“逝者如斯夫 不舍昼夜”。而在阿基里与乌龟的例子中，芝诺不舍得让时间流走。因此，爱利亚学派实际上可以作为一个很好的反例，让我们体会物理学研究中这些手段的重要性。

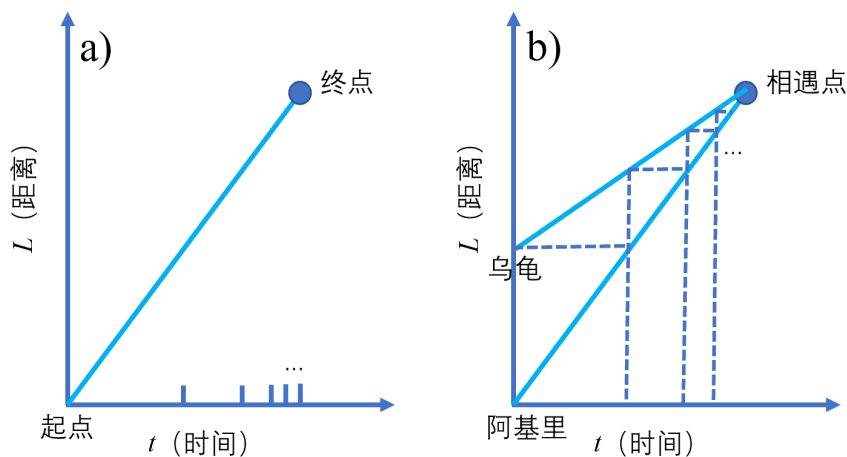


图 2.2 二分法 (a)、阿基里与乌龟赛跑 (b) 的数学表述。从图中，我们很容易看到悖论产生的根源是对时间均匀性的否定。

从否认运动的爱利亚学派回来，我们要提到的下一个学派是在伊奥尼亚学派的基础上进化出来的一个与我们现在物理学、化学研究经常用到的名词相关的学派：元素派。这个名词元素的原意是字母。在自然哲学的体系中，元素代表着某种不可分性。这一派的哲学家将世界本原归结为组成事物的不可分割的物理单元。以恩培多克勒 (Empedocles，约生活在公元前 490 年到 440 年左右) 为例，他认为火、土、气、水按微粒，以运动的状态存在。它们之间可合可分，但运动中四根不生不灭。与他同期的阿那克萨戈拉 (Anaxagoras，约公元前 500 到 428 年) 则认为构成万物的细小微粒是种子，一个事物有多少种可感性质，构成它的种子就有多少个类。

在元素说的基础上，古希腊更是诞生了最早期的原子论。此学说代表人物是留基波（Leucippus，生活在公元前 5 世纪）和德谟克里特（Democritus，约公元前 460—370 年，他分别跟随留基波与阿那克萨戈拉学习）。原子论者认为世界是不可分割的代表充实的微小颗粒(也就是原子)组成的。与代表充实的原子对应，有个概念叫“真空”，世界的本原就是原子与真空。如果没有真空，则充实的东西之间没有间隙。如果没有间隙，则充实的东西就不会被彼此分开而成为多样的东西。同时，如果没有间隙，则充实的东西也不会移动。因此，可以说虚空是为了分割代表充实的原子并解释其运动而存在的，在描述物质的存在形式及运动性质时都有现实的意义。后面，我们会讲到在亚里士多德的哲学体系中真空是被否定的，这与德谟克里特的原子论是不一致的。现在，我们当然知道亚里士多德的观点是错误的。他的这个错误，更加反衬出比他的学说早一些的原子论的先进性。

最后，我们按照世界的本原是单一还是多样、是运动还是不变这两个标准将前面提到的学派的学术观点进行一个总结的话（图 2.3）。从这个总结图，我们更是能够直观地体会到原子论是非常接近我们现代物理学对世界的认识的。

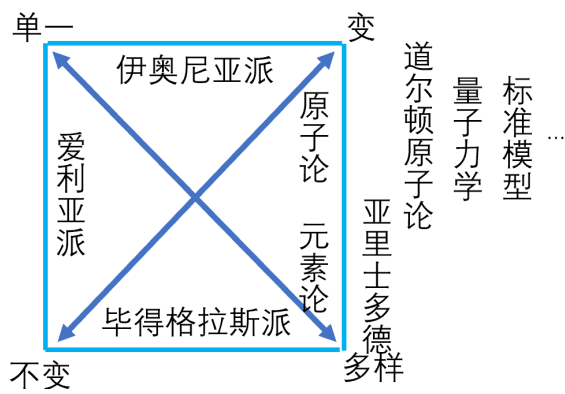


图 2.3 古希腊各自然哲学学派对世界本原的认识。对角的两个特质是相互对立的某特质的两个值，我们用深兰的双箭头代表其对立。每个特质有两个取值，因此其取值的组合可以形成四个边。在正方形的每个边，我们列了学派。本图在赵敦华老师《西方哲学简史》中插图 x.x 的基础上加入了一些近代物理学的内容【1】，目的是在对古希腊各自然哲学学派的

学说进行总结的同时也展示原子论的前瞻性。

2.2 智者运动以及苏格拉底、柏拉图对其的否定

前面强调过，笔者不是哲学专业。因此，在哲学上会尽量避免牵扯到过于专业的内容。本章与第六章是本书中比较偏哲学的内容。本节在本章，又比较偏哲学的。在最初的几稿中，本节并不存在。后来，经过反复思考，笔者觉得既然是目标是一本通识教材，内容还是要更多地跳出纯粹物理学的思维习惯，讲一些哲学层面的东西，把 2.1 节与 2.3 节的故事衔接起来。

前面提到，早期自然哲学的成就覆盖的时间阶段大概是从公元前 580 年到公元前 430 年。这个时期结束的时候，希波战争（公元前 499 到公元前 449 年）也已结束。经过像伯里克利（Pericles，公元前 495–429 年，雅典著名的执政官）这样的人物的治理，希腊的城邦文明进入繁荣时期。这个环境下，人们开始推崇逻各斯（Logos）的艺术。与之对应，智者作为传授智慧的职业出现。智者主要传授内容是修辞学与论辩学，但绝非思考智慧的行为。

一定程度上，我们可以说早期的哲学家是爱智慧的人，而智者则是自我标榜的“有智慧的人”，智慧只是他们用以达到实用目的的手段。他们传播的，与其说是学，不如说是术。更关键的是他们推崇怀疑主义、相对主义，这些思想虽然从批判的角度是有意义的，但与哲学本身爱智慧、求真理的传统却格格不入⁸⁸，这也在很大程度上阻碍了哲学的发展。因此，我们现在常说的雅典三贤（苏格拉底、柏拉图、亚里士多德，他们互为师徒、传承三代）与智者的怀疑主义和相对

⁸⁸Truth，在哲学与我们物理学中，地位都是崇高的！真心喜欢物理学的人，对一些事情不太能接受，显得迂腐，或许也与此有关。

主义进行了不懈的斗争，使得希腊哲学达到了新的高度。从他们开始，古希腊哲学的中心也转移到了雅典。在亚里士多德之后，怀疑主义与相对主义又有复苏。但他们将希腊哲学推到的这个高度，对于我们本书重点关注的自然哲学、物理学的发展，是至关重要的。

苏格拉底的名言是“认识你自己”。这也是德尔斐神庙的铭句⁸⁹。基于此，他认为人要首先研究自身，强调美德，通过审视人自身的心灵的途径进而研究自然⁹⁰。苏格拉底的研究相对较多地集中在思辨哲学与实践哲学（而非自然哲学）的范畴，人们也常说在古希腊苏格拉底是把哲学从天上拉回到人间的人。柏拉图作为苏格拉底的学生与信徒，研究范围要更广，并留下了很多著作。他热爱几何，对思辨哲学与实践哲学的关注也是比较多的。他在三贤中起到了承上启下的作用。在柏拉图的哲学体系中，世界被分为理念世界和现象世界，两者通过投影联系。理念的世界是真实的存在，永恒不变。而人类感官所接触到的这个现实世界，只不过是理念世界的影子。

相比于后面要讲到的亚里士多德，柏拉图这种表述更加数学，具有很强的形而上的特征。中世纪的经院哲学，特别是关于自然的思考，充满了对亚里士多德肯定。因此，可以说在中世纪的中后期亚里士多德在很大程度上统治着西方哲学。而文艺复兴与科学革命之后，西方哲学整体上又较为广泛地存在往柏拉图的回归。在第六章，我们在讨论笛卡尔、康德（特别是康德）的时候，读者应该会有比较

⁸⁹德尔斐是一个信奉阿波罗（太阳神）的神庙。阿波罗在古希腊的主神中，是个很正面的神（他们的神非常人格化，有很多其实不太正面，但像阿波罗、雅典娜，一般都是正面的）。人们也经常来这里求神谕。

⁹⁰比如，他提出德行就是知识，强调知行合一、真善一体。这个和我们明朝时期王阳明所倡导的哲学观看起来就很像。

深的体会。

在很多哲学专业的著作中，人们已经对这两位古希腊哲学家学术观点都会进行重点讲解。本教材中，我们仅点到智者运动对古希腊哲学发展的伤害以及从苏格拉底开始雅典三贤与之的斗争。自然哲学方面，在科学革命这样一个关键的阶段，提到的最多的古希腊的人物是亚里士多德。因此，我们还是把他作为重点来进行讲解。

2.3 亚里士多德的物理学

亚里士多德 17 岁进入雅典学院⁹¹，师从柏拉图二十年，直至其逝世⁹²。他的名言是“吾爱吾师，我更爱真理”。从这句话，我们应该可以看出两个意思。一是他对其恩师的感激之情；二是他在学术上并不是认为老师的都是对的，他有他自己的坚持。应该说，他对柏拉图的理念论进行了明确地批评。

与爱利亚学派否认运动不同，强调感觉经验、注重运动，是亚里士多德哲学的显著特征。基于此认识，他对运动进行了详细的刻画。比如，他指出事物运动的本原既不是一个，也不是无限多，而是三个：形式、缺乏、质料。其中，质料是运动的载体，它在运动中保持不变；形式是运动的事物所处的状态；缺乏，是运动所朝向的状态。比如，气的形式是热，缺乏是冷。当它的性质变为冷时，气就变成了水。在气与水的变化过程中，质料不变。这或许是我们物理学现在说的相变的最早的表述。当然，表述方式很初级。基于此，亚里士多德把运动定义为“潜在的现实化”。潜在性相当于缺乏，是应该有但目前还没有实现的形式。潜

⁹¹有时也翻译为学园。这个不重要，对应的英文就一个词：Academy。雅典学院是 Academy of Athens。

⁹²亚里士多德来自马其顿，对希腊城邦（尤其是雅典）而言，属于来自偏远北部的外乡人。这一点对于读者详细了解其生平是比较重要的。但对于本书中涉及的内容，没有什么影响。这里只是提一下。

在与现实是运动的两重本质。换句话说，运动具有“两本质”、“三本原”的属性。

静止与运动、潜在与现实之间的关系，是推动者与被推动者之间的关系。

上述关于运动的性质的描述，相对于他的前人，是一个质的进步。基于这些力与运动的初步概念，人们往往可以在一个逻辑上自洽的范围内描述当时遇到的现象。当然，后面伽利略会告诉我们这种“力是物质运动的原因”的表述是错误的，力是改变物质运动状态的原因。而伽利略得到这些结论，是需要很强的通过表面看实质的能力的。套用前面提到的赫拉克利特的名言“自然喜欢隐藏自己”，我们也能够体会这种投过表象看本质的抽象思维能力在物理学发展中的作用。

在宇宙的结构方面，亚里士多德使用了一个同心球模型，并把地球放在中心，其它星体在同心的更大的球面上（2.6 节我们讲到托勒密的宇宙模型时，大家可以对这一点再进行体会）。他认为在地界，也就是地球上到月亮下的球体内，充斥着水、火、土、气四种元素。而天界，则充满了以太。物质的运动，上升或者下降，是由其中各种元素的比例决定的。当气、火的比例大的时候，物质倾向于上升。而水和土，由于比较重，倾向于使物体下降。因此，空气在上面，而海洋与陆地在地面形成。这也是它们的自然位置。当一个物质处在其自然位置的时候，它不会运动，因为这个时候没有驱动力的。当它偏离其自然位置的时候，它就有了回到其自然位置的动力。

天界中，以太以及由它构成的天体，进行着匀速圆周运动。由于这里几何限制是基于同心圆的，圆周运动在无限的时间里广泛存在，相应的匀速圆周运动也是完美的。而直线运动，如果连续的话，则在永恒的时间中无限延展。这就带来了宇宙的体积势必无限增大这样一个不合理结果。因此，连续的直线运动是要避免的。天界的圆周运动需要有一个第一推动者。第一推动者本身不需要运动。否

则，又需要设立其他的推动者对其进行推动，进而陷入一个无限循环。这个不动的推动者与“神”对应。这也是我们在科普方面的读物中经常看到“第一推动”的一个原因。

同时，在亚里士多德的物质构成概念下，没有真空；以太在描述月上世界的物质组成及其运动规律的时候，也起到了关键的作用。这里，真空的概念在1643年伽利略（Galileo Galilei，1564–1642年）的学生托里切利（Evangelista Torricelli，1608–1647）利用水银测量大气压的实验以及1654年冯·格里克（Otto von Guericke，1602–1686）进行的马德堡半球实验中得到了充分的体现。这些实验在当时的重要作用，就是对亚里士多德的世界观的冲击⁹³。除此之外，从惠更斯（Christiaan Huygens，1629–1695年）的光波动说，到19世纪末、20世纪初的迈克尔逊-莫雷实验（迈克尔逊，Albert Abraham Michelson，1852–1931年；莫雷，Edward Williams Morley，1838–1923年），以太都还扮演着重要的角色。这些历史上真实发生的事情与现代我们的一些表述习惯，与西方自然哲学的传统都是密切相关的。

至于亚里士多德的物理学的局限，我们也要提一下。首先，这套物理学还是一定的神学的特征的。像地心、第一推动这些概念，都为后来宗教统治西方世界提供了哲学层面的基础。当然，直到现在，像第一推动也无法被证实或证伪。人们针对其是否为真理的讨论，也是模糊的。但现代理论中无疑神学的元素是会被尽量避免的。其次，在这套理论体系，观察与思辨占据了很重要的位置，但验证

⁹³科学革命是由文艺复兴诱发的。两者整体批判的都是中世纪推崇的东西。亚里士多德的哲学在中世纪是收到极力推崇的。因此，亚里士多德的很多理论在这里会被作为反面教材来批判。这也是我们在学习过程中提到亚里士多德多提到其错误理论的原因。但辩证地看，亚里士多德在他所处的时期无疑是非常进步的。

没有出现过。与之相对的，是伽利略提出的实验验证的研究方法后来就在科学革命中起到至关重要的作用，也促成了近代物理学的诞生。第三点，就是亚里士多德的物理学用到的数学并不多（除了天体的圆周运动），它本身更像是一种针对世界观的哲学体系。这个甚至跟他的老师柏拉图相比，都是一种后退。

最后，考虑到后面提到的人物的专注点并不像亚里士多德这样是宏观的哲学本身，而是具体的自然哲学或数学中的某个具体领域，我们用关于希腊哲学中的思辨精神的一点讨论来结束本小节，作为对亚里士多德的致敬。

根据赵敦华老师《西方哲学简史》第一章的第二节结尾时提到的观点，希腊哲学的思辨精神可以用五点来概括：静观、辩证、演绎、理智和实践。静观为后面的所有的东西提供了依据，实践为辩证、演绎、理智的成果提供了出口。辩证这个词，最早的意思是对话，后来演化为针对两种相反的意见所做的分析与综合，进而产生结论。这是一套非常系统、明确的认知程序。同时，演绎推理后期更是在科学革命中发挥了极其重要的作用⁹⁴。如果说缺点的话，或许辩证与实践对静观的反馈，通俗的说就是基于已有知识设计实验，在针对实验开展静观或许是这个时候的哲学家在认识世界时缺失的一种手段。这也是我们说伽利略建立了科学的方法的一个原因。

综合一下，希腊的哲学（特别是物理学）发展到亚里士多德的时候毫无疑问是一个高峰，不管是从研究方法、还是从研究成果上来讲都是。这些成果和后来

⁹⁴所谓演绎推理，指的是“结论可从前提必然地推出，前提可靠，则结论可靠”这种哲学中的基本的方法论的东西。也就是我们常说的大前提、小前提、结论，这种三段论式的方法。这是由亚里士多德确立的，在后面的科学革命中也是起到了非常积极的作用。科学革命中，人们添加的东西是对前提的怀疑（也就是笛卡尔所提倡的理性主义以及后期康德提倡的批判），以及通过实验的方法来验证结论的可靠性（伽利略）这样一个科学的研究方式，从而引起了科学的革命。

物理学发展过程中的诸多成果一样，都不可避免地具有局限性。在当时生产力并不是很发达的情况下，亚里士多德的物理学对人们认识世界确实起到了至关重要的、积极的推动作用的。

2.4 欧几里得与《几何原本》

欧几里得是希腊化时期的数学家，他最大的贡献是总结了当时的数学成就，在公元前 300 年左右写出了《几何原本》这部著作⁹⁵。自 1482 年第一个印刷版出现后，《几何原本》在西方已发行过一千多个版本，发行量仅次于《圣经》⁹⁶。它由 13 卷组成，此书中，作者从如下五条公设（postulates）出发：

1. 从一点向另一点可以引一条直线；
2. 任意线段能无限延伸成一条直线；
3. 给定任意线段，可以以其一个端点作为圆心，该线段作为半径作一个圆；
4. 所有直角都相等；
5. 若两条直线都与第三条直线相交，并且在同一边的内角之和小于两个直角，则这两条直线在这一边必定相交；

⁹⁵我们在初中学的欧氏几何，基本就是这些内容。1607 年，明朝大学士徐光启与传教士利玛窦（Matteo Ricci, 1552–1610 年）合力将《几何原本》翻译为中文。笔者开始一直以为这个翻译是完整的版本，直至听到杨振宁先生讲的一个名为《近代科学：科学逻辑的真谛》的报告。这里，杨先生提到两点，笔者认为可以加到这里，供读者参考。第一是徐光启在他的译本的序中的原话：（几何原本）似至晦 实至明 似至繁 实至简 似至难 实至简。杨先生想强调这体现的是徐光启对从《几何原本》开始的科学逻辑的精神的真谛的理解。科学就是把复杂的事情，通过逻辑，简单化。看起来麻烦，但如果走逻辑，是非常简单与固定的。这也是科学的美。第二，是徐光启只完成了《几何原本》前六章的翻译。后面的完整的翻译是到了 1857 年，才由清朝的一位杰出的数学家李善兰（1811–1882 年）与另一位传教士伟烈亚力（Alexandra Wylie, 1815–1887 年）合力完成的。

⁹⁶西方的活字印刷始于谷登堡（Johannes Gensfleisch zur Laden zum Gutenberg, 1397–1468 年）。在 1450–1455 年，他第一次用这个技术印刷了一般圣经。之后，这个技术开始被推广，并深深地影响了他们的社会。毫无疑问，《几何原本》也是这个技术被用到的最早的几个著作之一。

结合五条公理 (common notions) :

1. 与同一事物相等的事物相等;
2. 相等的事物加上相等的事物仍然相等;
3. 相等的事物减去相等的事物仍然相等;
4. 一个事物与另一事物重合, 则它们相等;
5. 整体大于局部;

建立了包含约 131 个定义、465 个命题在内的一个严格的欧氏几何理论体系。在此基础上, 结合时间流动的连续性、均匀性, 一个最直观的时空概念体系自然诞生。下面要介绍到的阿基米德(Archimedes, 约公元前 287-212 年)、托勒密(Ptolemy, 公元后 100-170 年), 以及希腊化、罗马帝国、欧洲中世纪时期人们对很多天文观测、物理现象的理解, 显然都受益于此数学成就。

我们这里对《几何原本》的介绍从两个方面来展开。一是《几何原本》的研究方式(公设与公理的区别); 二是《几何原本》在后面的传播与进一步的发展(与代数的结合、向非欧几何的过渡)。

先从第一方面说起。前面提到, 《几何原本》是从五条公设、五条公理出发得到的一个理论体系。我们很多讲义会把上面 postulate 第五条(等同于平行线不相交)说成是公理, 这个是不对的, 那个是公设。Postulate 的词根是 postul, 有要求的意思。也就是我先要求这个成立, 在推结论。这个要求, 不一定被接受。比如, 在非欧几何中, 这个要求就不成立。基于前四条公设, 人们也能推出一个合理的几何系统。而 common notion (公理), 关注的是逻辑层面的等价性。这个是我们都认同的, 不会去怀疑。理解这两个词的差别, 对于我们理解欧氏几何为什么要向非欧几何去过渡, 很有帮助。

之后是第二方面,《几何原本》的传播与进一步的发展。在欧洲中世纪初期,阿拉伯世界逐渐崛起。《几何原本》开始在阿拉伯世界传播。公元九世纪初,代数又在这里代数。十二世纪,两个同时传回欧洲。它们一起为文艺复兴、科学革命中物理学、天文、工程应用等诸多学科的发展提供了最强有力的数学工具。由笛卡尔(Rene Descartes, 1596-1650 年)提出的将几何与代数结合产生的解析几何,更是在牛顿(Isaac Newton, 1642-1727 年)提出微积分进而建立牛顿力学的过程中发挥了至关重要的作用。

除了与代数结合形成解析几何,欧氏几何在科学革命结尾的时候还迎来了一个重要的发展,就是向非欧几何的过渡。考虑到我们的基础教育对欧氏几何已经介绍地比较清楚,而笔者写的这个讲义的初衷是对读者在常规课程教育中不熟悉的内容尽量覆盖。因此,对欧氏几何的内容我们这里可以不做太多展开。重点,是非欧几何的一些基本概念。

由于我们的基础教育(甚至包含多数高等教育)并不包含非欧几何的内容,人们往往会觉得它很高端、很抽象。实际上,类似概念与相关学术成就的诞生都是符合最直接、最简单的逻辑的。前面提到,欧氏几何告诉我们的是均匀的、可以无限扩展的三维空间。而亚里士多德告诉我们的,是地球处在中心宇宙这个同心球体的中心,连续的、无限的直线运动是不被允许的。这样,就不可避免地会带来一个逻辑上的矛盾。当我们站到地面上的一点,我们看到的是欧氏空间。但当我们把自己放在上帝视角,去看这个同心球中的地球,那么我们会意识到地球上的某个人看到的欧氏空间,是无法无限延展,进而覆盖整个地球的球面的⁹⁷。

⁹⁷这里,需要说明一下虽然地球是个球形的实验验证一直要等到大航海时代,但考虑到前面提到的航海时人们首先看到船帆这个生活经验以及球形在古希腊哲学中占据的重要位置,以

考虑到这一点，人们对欧氏几何提出质疑就不足为奇了。

1826 年，俄罗斯数学家罗巴切夫斯基（Nikolai Lobachevsky, 1792–1856 年）在喀山的一个数学家会议中宣读了他的关于非欧几何的论文《几何学原理及平行线定理严格证明的摘要》，提出欧氏几何中的第五条公设去除后，基于前面的几条公设还是可以构建一个几何体系的。但遗憾的是，此理论在当时并没有被人们接受。

比罗巴切夫斯基这个工作晚一些，来自哥廷根大学的高斯（Carl Friedrich Gauss, 1777–1855 年）接到了尚未统一的德国的一个政权的关于画地图的任务。高斯敏锐地意识到这个背后的问题是非欧几何的问题⁹⁸。1853 年，他建议自己的学生黎曼（Bernhard Riemann, 1826–1866 年）在教授资格考试（Habilitation）中以非欧几何为题目，完成资格考试论文（论文题目是 On the hypotheses which underlie geometry）。这标志着非欧几何的正式诞生。在该论著中，黎曼引入了流形（manifold，原意多褶皱，江泽涵先生（我国数学家，1902–1994 年）按“天地有正气，杂然复流形”进行翻译，信达雅兼顾）的概念，来描述基于曲面的几何。就像图 2.4 中的地球，如果我们画一个很大的三角形，则在局域的视角我们认为平行的两条经线，在全局看来实际上是不平行的，图中这个三角形的内角和也不是 180 度。这也就意味着平行线公设在这里只是局域的成立。空间的扭曲会带来与欧氏几何完全不一样的东西。而描述它，我们需要借助于图卡（Atlas，有时也

及很多早期的模型中地球就已经是一个球体了，我们有理由相信在很早的时候，他们对地球就有了这种形象的认识。这与我们早期天圆地方的理念是非常不同的。

⁹⁸在十九世纪初，画地图还是世界性的难题。后面，我们会提到达尔文在其进行环球旅行的时候，乘坐的猎犬号的任务就是更正里约热内卢附近的地图。在历史上，只有非欧几何的数学方法成熟后，人类才彻底解决了画地图的问题。这里，我们应该可以看到高斯“数学王子”的地位。

翻译为坐标图卡、图集)⁹⁹，通过有交叠的开集来进行拼接。局域上看，空间就是欧氏的。全局来看，非欧特性明显。

基于这些语言，可以定义出很多中曲面，也可以定义相应的拓扑结构。有趣的是，这套来自于数学家对空间的探索语言，在诞生六十多年以后爱因斯坦提出广义相对论的时候，起到了至关重要的作用。广义相对论中的关键点就是时空扭曲。这也就不难理解为什么我们说他去哥廷根大学讲学后，当看到希尔伯特对他工作新进展感兴趣的时候为何那么地紧张了。现在，我们描述宇宙的结构是有限无边，也是基于类似的直观图像。因此，不夸张地说，欧几里得在《几何原本》中总结出来的几何图像，代表了古希腊时期自然哲学成就的一个巅峰。同时，它也是数学史上最伟大的一部著作，基于其发展出来的各种现代数学分支也为近代物理学（经典理论）、现代物理学（经典理论+量子力学+相对论）的发展提供了关键的支撑。

⁹⁹这里要感谢笔者的朋友，北京大学数学学院的周珍楠教授。之前笔者一直找不到合适的翻译。

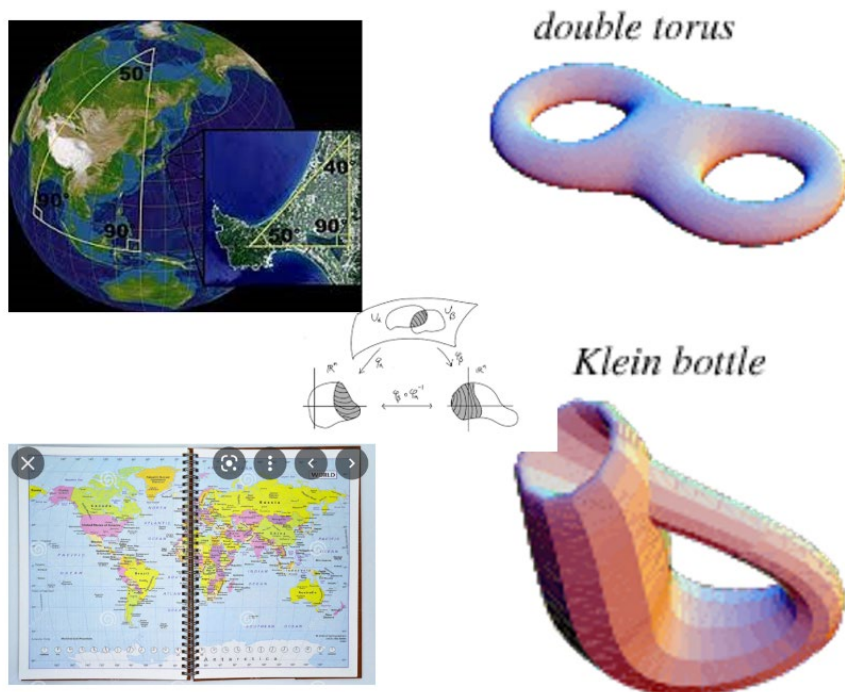


图 2.4 非欧几何概念的简单介绍。左上角是地球，很显然，其表面是一个球面。在地球表面画一个无限大的三角形，内角和显然并不为零。为了描述其表面，需要通过相互交叠的开集（正中间）引入图卡（左下角）的概念。这些都是非欧几何中的基本语言。它是描述右边显示的曲面的理想工具。最后，从右面的图也可以看出，拓扑的概念与非欧几何也密切相关。

2.5 阿基米德、埃拉托色尼、阿波罗尼奥斯

比欧几里得稍微晚一些，希腊化时期的另一个很重要的人物是阿基米德（Archimedes，约公元前 287–212 年）。和阿基米德几乎同时代，但稍微晚一些，有个埃拉托色尼（Eratosthenes，公元前 276–194 年）。比埃拉托色尼再晚一些，又有个阿波罗尼奥斯（Apollonius of Perga，公元前 262–190 年）。我们把他们放在一起介绍，是因为他们都是发展与利用古希腊自然哲学的成就为我们更加清晰地认识世界做出了重要的贡献的人物。从历史地位来说，阿基米德最高，他生活的时代也更早，我们从他说起。

与欧几里得一样,阿基米德的学习经历与埃及托勒密王朝的亚历山大城也密切相关。当时的亚历山大城就像十九世纪到二十世纪上半叶的哥廷根大学,聚集了一大批数学家。与欧几里得不太一样的地方是阿基米德的兴趣更加广泛,涵盖了算术、几何、光学、力学、天文学、工程学等多个领域。同时,目前我们也普遍认为他的工作的原创性更强。而欧几里得的工作,更多的是整理并将理论系统化。因为这个原因,与介绍欧几里得时围绕《几何原本》展开的方式不同,在介绍阿基米德时,我们不得不举几个例子来让读者感受其学术贡献。

算术方面,他以计算宇宙中的沙的数量为例,讨论了处理非常大的数时需要涉及的一些关键问题。比如,他发明了用以描述极大数的符号并在计算中展示了其使用方法。几何方面,他利用逼近法算出了球的表面积与体积、椭圆面积。这也是近代微积分思想的一个源头¹⁰⁰。以圆周率的计算为例,他基于圆内接多边形和相似圆外切多边形计算圆周率,方法是当边数足够大时,两多边形的周长便一个由上、一个由下的趋近于圆周长。他先用六边形,以后逐次加倍边数,到了九十六边形,阿基米德计算出其面积,并得到圆周率处在 $223/71$ 与 $22/7$ 之间。再比如,他证明一个抛物线与直线相交时,抛物线与直线之间的面积是其内切三角形的面积的 $4/3$ 倍。借此他可以算出一个抛物线与其相交的直线之间的面积。还有,就是当一个球形内接一个圆柱体的时候,这个球形的体积是这个圆柱体的 $2/3$, 表面积是这个圆柱体的 $2/3$ 。

在 1.5 节我们提到过,人们传统上喜欢按照力、热、光、声、电这些现象把物理学的研究进行划分。应该说,阿基米德对其中力、光的早期理论研究都有足

¹⁰⁰微积分的四个核心概念是:极限、导数、积分、级数【布雷苏, 2022】。这里,我们可以看到极限、积分的影子。

以进入教科书的贡献。在这些研究中，他对几何原理的应用是极具创造性的。力学方面，阿基米德的成就主要集中在静力学（特别是杠杆原理）与水静力学（浮力原理）。在杠杆定律中，他明确指出杠杆两端两个重物在与重量成反比的距离上保持平衡。在浮力方面，阿基米德原理明确指出：比液体重的固体若被置于液体中，将会沉到液体底部，它在液体中减少的重量将等于与固体体积相同的液体的重量。这些都是物理原理的非常严格的数学表达，与近现代通过实验观测获得的诸多物理学定律的表述非常相似。

因为上述原因，与我们中学课本中提到亚里士多德时多采取批评的态度不同，提到阿基米德时，论调往往是非常正面的。当然，对亚里士多德的批评往往是为了衬托像哥白尼、伽利略这样的人的思想的进步。亚里士多德在他自己的时代，对哲学的贡献是毋庸置疑的。这个有点像早期的科普读物经常一说到爱因斯坦就说他不喜欢量子力学，就会给人造成“爱因斯坦是阻碍量子力学的发展的人”这样一个错误认识。实际上，爱因斯坦是量子力学发展过程中最大的推动力之一！他不喜欢的，只是人们基于统计对量子力学的解释。在读类似书籍时，我们需要辩证地去看这部分内容。本门课程学习完之后，笔者也希望同学们在看任何一项伟大进展的时候，都把自己放到那个时代，在充分理解整个背景与整个故事地基础上去体会那个工作的重要性。这对于我们理解物理学非常重要！

埃拉托色尼与阿基米德一样，研究也涉猎了诸多领域。我们举一个他将几何学运用到地球半径测量的工作为例，来介绍他对我们认识这个世界的贡献。埃拉托色尼第一次根据经纬线系统绘制了世界地图。在这个过程中，他根据测量一根直立的日冕在阿斯旺与亚历山大的投影角度¹⁰¹，结合平行线定理，他估算出了地

¹⁰¹也有人说太阳光是往井底去射。

球半径。他认为阿斯旺与亚历山大在同一经线上。同时,阿斯旺在北回归线以内,可以太阳直射。实际上这两点现在精确地来看都有偏差。但在一个特定的精度范围内,这是很好的近似。他测量出了地球半径约为 39,690 公里,与现代值 40,009 公里相差无几。此工作的具体原理如图 2.5 所示。其中,前面提到的两点近似起到了至关重要的作用。类似近似的思想,也不得不说是物理学研究中必不可少的核心思想。

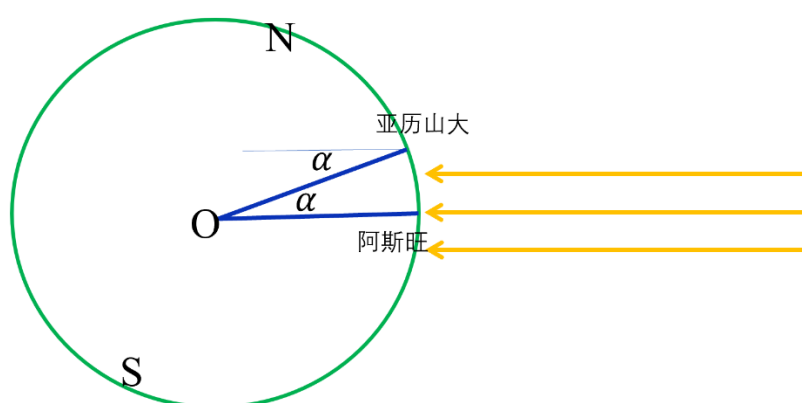


图 2.5 埃拉托色尼测量地球半径的原理示意图。N 与 S 代表北极与南极,黄色地射线代表太阳光。假设阿斯旺与亚历山大处在同一经线上,阿斯旺在北回归线以内。这样就存在太阳直射阿斯旺的井底,或者日冕角度为零的情况。从阿斯旺向北,走到亚历山大,通过太阳光入射角度的变化,可以测出一个角度。再根据平行线定理,可知此角度就是两个地方在气球由经线确定的大圆弧线夹角。由此,可通过两地距离,确定地球半径。

本节最后提到的人物是阿波罗尼奥斯 (Apollonius of Perga, 约公元前 262-190 年), 它的主要作品是《圆锥曲线论》(<On Conic>)。我们这里特别提一下是因为由圆锥确定的椭圆 (包含圆这种特殊情况)、抛物线、双曲线在后期天文学研究、近代物理学产生过程中起到了至关重要的作用。同时,对这些曲线的研究也

是几何向解析几何过渡的一个最大的推动力¹⁰²。这些曲线与圆锥的关系见图 2.6。但遗憾的是，人们在当时的天文学研究中，思路还局限于圆是完美的曲线，因此并没有非常系统地将这些曲线运用起来（尤其是椭圆）。作为替代，他们是通过圆与圆的某种特殊的组合产生椭圆这种曲线（下一节会讲到）。这个局限，一直到开普勒（Johannes Kepler, 1571–1630 年）提出行星运动三大定律那个时候才被彻底突破。

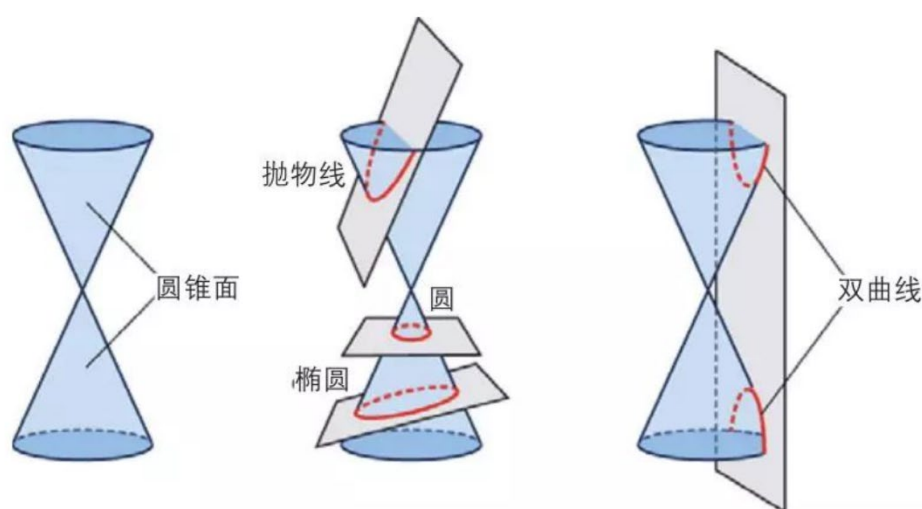


图 2.6 基于圆锥来获取的各种曲线的示意图。

2.6 古希腊与古罗马的天文学

有了前面的积淀，我们在本节讲古希腊与古罗马的天文学。首先，我们需要说明本读物不是专门的天文学读物，本节的引入纯粹为了讨论物理学的早期发展，因此我们也只对当时人们掌握的天文现象与理论做简单介绍。其次，三个主角（阿

¹⁰²在解析几何出现之前，人们研究几何问题的方法是就事论事（针对一个具体的几何图形，进行求解）。与几何相比，代数的特征是抽象、系统。代数方法往往能解决一系列问题。因此，在代数与几何结合形成解析几何之后，人们就可以把几何问题进行分类，并提供系统性的解决方案了。

波罗尼奥斯、希帕克斯¹⁰³、托勒密)都是地心说的代表人物。由于文献缺失,具体谁做了哪个贡献现在很难彻底确定。因此,与前面几节不同,我们仅进行整体的介绍而不过多区分个人。同时,我们也需要说明古希腊时期并不是没有日心说,哲学上思辨的特性决定了他们一定会有类似学说在同期也参与竞争¹⁰⁴。但毫无疑问,地心说占据了统治性地位。解释这一点,我们可以套用张卜天老师翻译的劳埃德的《希腊科学》中第五章的一句话:对大多数希腊人来说,地球位于宇宙中心的想法不仅是常识,而且是一种宗教信念,这种信念反映了它们对地球本身神圣性的构想【Lloyd, 2021】。

在地心说核心地位确立的过程中,合理解释天文观测的各种现象是必须的。在这个过程中,本轮与偏心圆模型起到了至关重要的作用。需要说明的是当时人们在解释天文现象的时候,并不需要解释星体为什么按某种方式运动?只需要基于圆,画出合理的路线,进而解释天文观测的现象就可以了。对比这种思维方式,我们也能一定程度上理解牛顿的伟大之处。从他开始,人们才相信天上的物体与我们身边的物体的运动是符合同样的规律的,进而基于力学把物理学从传统自然哲学中剥离,彻底打开了近代物理学研究的大门。

为方便阅读,我们先解释什么是本轮运动(这里面自然也包含了均轮的概念)与偏心圆运动。与之相关的两个可以被很好解释的天文现象,是行星逆行与季节的不均等。然后,我们再展示三点:1)本轮模型与偏心圆模型可以等价;2)椭圆是可以作为本轮运动的特例出现的;3)托勒密的地心说模型大致是什么样子?展示前两点是想说明这套方法在数学上的灵活性。展示第三点是想让读者对当时人

¹⁰³Hipparkhos, 大约生活在公元前 190 到 120 年。比阿波罗尼奥斯晚,比托勒密早很多。

¹⁰⁴比如阿里斯塔克斯(Aristarkhos, 约公元前 310-230 年)的日心假说。

们的宇宙观有个直观的认识，进而体会哥白尼基于圆（而不是椭圆）建立的日心说为什么在很长时间内不能被绝大多数人接受，直到开普勒基于椭圆总结出三大定律、伽利略《两个世界的对话》（全称是《关于托勒密和哥白尼两大世界体系的对话》，<Dialogue Concerning the Two Chief World Systems>，有时也简称《对话》）产生影响、以及牛顿力学的出现。

先从本轮运动与偏心圆说起。本轮运动表述见图 2.7 左。行星 P 绕其本轮的圆心 C 进行匀速圆周运动，而其圆心 C 又相对于另一个圆心 E（也就是地球）作均轮运动。这样的话，最终的行星轨迹就是如 2.7 右图红线所示相对复杂的形状。当然，从地球上的观测者的角度，不会是这样一个复杂的、立体的轨迹。但地球上观测者看到的行星的逆行现象可以被很好地解释。偏心圆运动则如 2.8 左图所示。行星 P 沿一个圆进行匀速圆周运动，其圆心 O 与地球 E 不重合。与之相应，2.8 图右边所示，地球上的四季就会不均等。

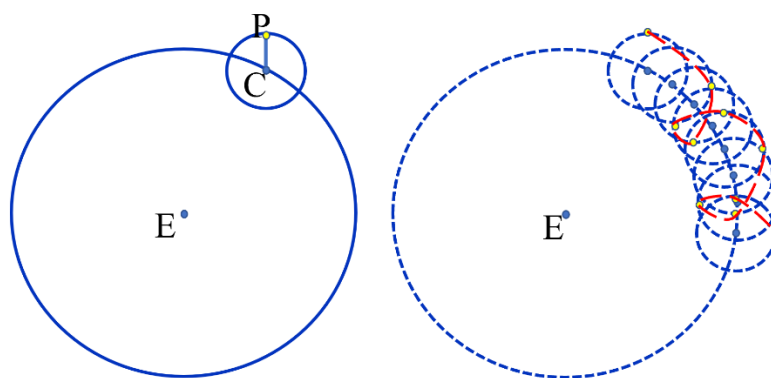


图 2.7 左边是本轮运动的图示。P 代表某行星（包括太阳），它绕圆心 C 作匀速圆周运动。而 C，绕 E 作匀速圆周运动。最终，呈现出的轨迹在相对较粗的时间分辨率的情况下如右边红线所示。从右边图，我们也可以理解：在地球上观测者的角度，行星是可以逆行的。

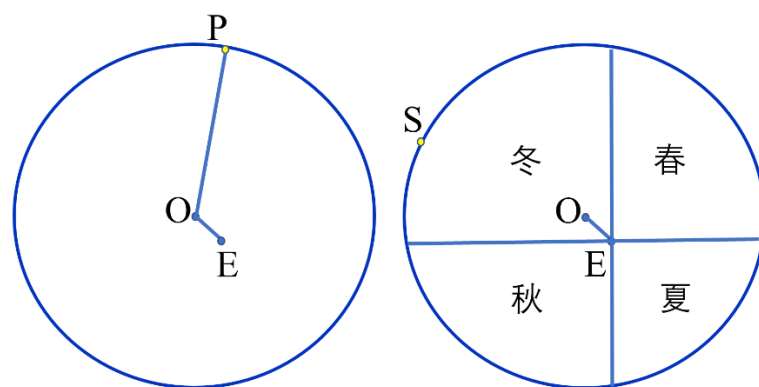


图 2.8 偏心圆运动模型。左图中，一个行星 P 绕某圆心 O 运动，地球 E 并不处在此圆心。右图中，基于此模型描述太阳 S 的运动，就可以根据弧长的不同，解释季节的不均等性。

基于这些简单的图形，人们可以针对复杂的天文现象给出足够简单、精确的描述。每个特定情况下，选取哪种模型往往取决于哪个更简单。比如，对于太阳的运动，偏心圆模型是首选，而对于行星与月亮的运动，本轮模型就更合适。在一些特殊情况下，两者也可以等价（图 2.9 左）。同时，前面我们提到的椭圆，也可以作为本轮模型的特例出现（图 2.9 右）。它们灵活的组合，构成了托勒密《至大论》的基础¹⁰⁵。在这部著作定义的地心说中，他主要描述的是地球、月亮、水星、金星、太阳、火星、木星、土星的相对位置与运动轨迹（天王星的发现要等到 18 世纪末，海王星、冥王星更晚）。人们可以观测到的其它星体，处于这些星球定义的球体之外，被称为恒星天（恒星的意思是不动，它们形成这些重要的行星、卫星、以及太阳组成的宇宙模型的背景）。为了符合天文学观测（很多数据甚至来自于古巴比伦），不同行星轨道的均轮中心还不同。这里，托勒密通过本轮运动模型与偏心圆模型的各种灵活的几何组合，画出这些主要星体的轨迹（图 2.10）。

¹⁰⁵ 按《希腊科学》中第八章开始的说法，《至大论》是其阿拉伯语<Almagest>的翻译。本著作也可以根据其英语<Mathematical Composition>翻译为《天文学大成》。托勒密生活的年代比前面讲的这些人还是要晚不少，大概在公元后 100 至 168 年。

这么做，从结果上看是很有效的。但缺点，是模型最后会变得越来越复杂。

实际上，本轮均轮模型的数学基础是傅里叶变换。如果引入无数多个本轮，空间中任意复杂的曲线对应的运动学内容都是可以被描述的（图 2.11）。物理学研究中，简单的模型往往都是更吸引人的，因为人们往往会相信简单的模型会反映更本质的东西。这也是日心说在引入了椭圆轨道进而解释了一些关键的天文观测后，能那么吸引物理学家的一个关键因素。

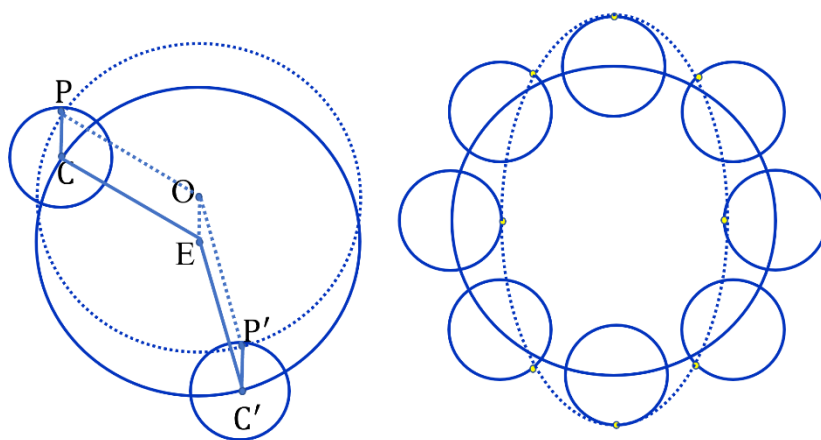


图 2.9 左图为偏心圆运动与本轮运动等价的示意图。当均轮半径 CE 等于偏心圆半径 OP ，且本轮半径 CP 与偏心距 OE 相等时。在特定的角速度的情况下，保证 $CEOP$ 始终为平行四边形，则两个模型给出的行星运动轨迹完全一样。右图为本轮运动给出椭圆的行星轨迹的情况。行星在本轮上运动一周，本轮的中心围绕均轮的中心按相反方向运动一周。

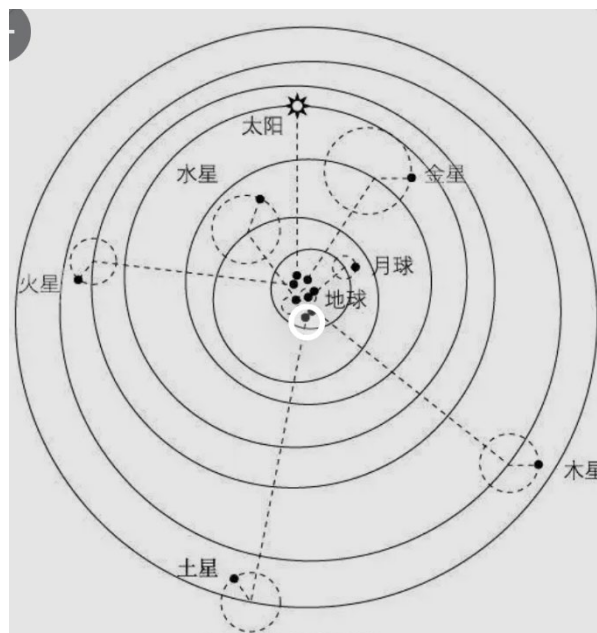


图 2.10 托勒密的地心说模型。这里主要考虑的是地球、月亮、水星、金星、太阳、火星、木星、土星。其它星体，处于这些星球定义的球体之外，称为恒星天。为了符合天文学观测，不同行星轨道的均轮中心还不同。可以说这里托勒密通过本轮运动模型与偏心圆模型的各种灵活的几何组合，人们可以画出这些主要星体的轨迹。这么做很有效，但缺点是模型会越来越复杂。这也是日心说在引入了椭圆轨道，进而解释了一些关键的天文观测后，能那么吸引物理学家的一个关键因素。在物理学研究中，简单的模型往往都是更吸引人的。因为人们往往会相信简单的模型会反映更本质的东西。

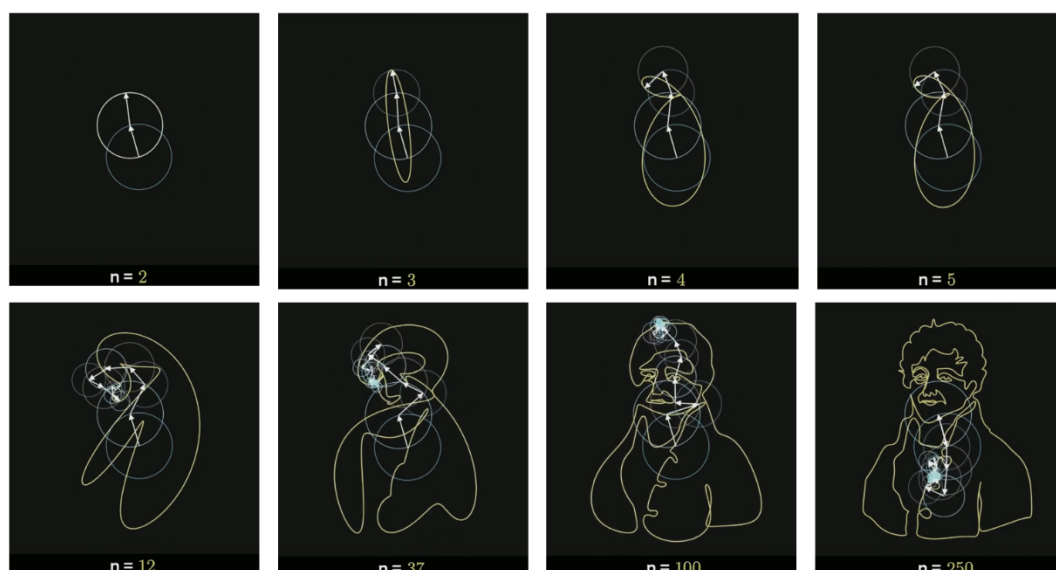


图 2.11 利用一个均轮与 249 个本轮画出的傅里叶的肖像。当然，古希腊天文学中人们只是

利用一个本轮与一个均轮，有时会调节轮心位置。这里，只是为了提一句这个操作背后的实际上有这么一个数学基础。当然，人们认识到这个数学基础是将近 2000 年以后。

2.7 中世纪欧洲、阿拉伯世界与古代印度

公元 455 年，东日耳曼部族汪达尔人贡献罗马，西罗马帝国进入了正式灭亡的倒计时¹⁰⁶。在此之前，由于罗马帝国的衰亡与日耳曼各部族对其长期骚扰，基督教已通过公元 313 年君士坦丁的米兰赦令获得足够的发展空间，并于公元 380 年被狄奥多西确立为国教。一神教在整体上肯定是要排斥崇尚多神教的古希腊文化的。西罗马帝国灭亡之后，西欧历史正式进入黑暗时代。按赵敦华老师《西方哲学简史》的说法，“黑暗时代”专指这段时间文化的蒙昧和倒退。这种情况在中世纪的初期（6 世纪到 10 世纪）尤为显著。其中一个明显的标识，就是古代哲学的希腊文/拉丁文典籍丧失殆尽。

在这段时间里，阿拉伯帝国兴起，并通过与东罗马帝国的战争/交往，得到了很多古典文献。在帝国武力兴起的同时，经济、文化也同时达到繁荣。比如，位于巴格达的智慧之家就聚集了大量的人文、科学学者与大量来自波斯、希腊、印度的古籍，取代泛希腊化时期的亚历山大图书馆成为环地中海地区与阿拉伯世界的学术中心。来自波斯的数学家、天文学家、地理学家花拉子米（Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi，约公元 780 到 850 年）是其中的典型代表。下面，我们将分欧洲中世纪的经院哲学、阿拉伯世界的科学、印度科学三条主线来介绍这些成就。

先从欧洲经院哲学（scholasticism 或 scholastic philosophy）说起。经院一词来

¹⁰⁶人们一般会把公元 476 年日耳曼人控制意大利全境作为西罗马帝国灭亡的标志。

自拉丁语 scholasticus，意思是学院中人的思想，或士林哲学。它有两个特征，一个是以经院（教会或修道院办的学校）为生存环境，二是以亚里士多德提倡的论辩推理为研究手段。公元9世纪有个短暂的卡洛林王朝文化复兴。之后是新一轮的蛮族入侵，但其建立的学校教育制度得以保存。这些学校的教学内容为“七艺”，包含“四艺”（代数、几何、天文、音乐）与“三科”（语法、修辞、逻辑）¹⁰⁷。这些内容对于希腊哲学传统的保存无疑是有益的。

到了十二世纪后期，欧洲的城市中开始出现大学，其原意为“统一体”（University的词源就是Universe），代表教师与学生的行业公会。教师按授课专业分为不同学院，常见的有艺学院、神学院、法学院、医学院。其中，艺学院与神学院成为继雅典学园之后传播哲学的摇篮。这里，亚里士多德主义得到了极大程度的传播。1203年，十字军东征攻陷君士坦丁堡也伴随着早期流落到阿拉伯世界的希腊典籍回流西方。除了欧洲大陆，英国牛津大学的罗吉尔·培根（Roger Bacon，1214-1292年）开始在学校全面讲授《physics》与《metaphysics》，成为亚里士多德的著名译注者。他比他同时代的人更早地认识到经验与实验的重要性以及科学应有的实用价值。因此，虽说中世纪整体是近千年的黑暗，但这些火种的保存与传播还是为后期的文艺复兴与科学革命进行了积极的准备【汉南,2022】。

在阿拉伯世界这边，为了学习先进的科学文化和技术，阿拉伯人开展了一场声势浩大的翻译运动，将希腊文明、波斯文明和印度文明的多数典籍译为阿拉伯文。通过这场始于八世纪中叶的翻译运动，阿拉伯在吸收借鉴东西方文明成果的基础上，创造了繁荣的阿拉伯伊斯兰文明。到了九世纪中叶，首都巴格达成为了

¹⁰⁷ 这里引用的是赵敦华老师《西方哲学简史》中的说法。代数实际上是个新鲜事物，在阿拉伯世界诞生不久。欧洲中世纪学校的教学内容包含这些稍微让笔者意外，但笔者不知道更准确的说法，这里权且引用。

科学进步的中心，取得了数学、医学、天文学和化学以及其他科学领域的进展。其中，花拉子米是一个代表人物。他是一位出生于阿拉伯帝国大呼罗珊地区的波斯数学家、天文学家、地理学家。花拉子米是著名的代数与算术的整理者，被誉为“代数之父”（algebra 一词即出自阿拉伯文拉丁转写 al-jabr，al-jabr 是其求解一元二次方程的两个办法之一；而 algorithm 更是被认为直接来自于花刺子模的拉丁文译名）。除了代数方面的成就，他还修订了托勒密的《地理》，在天文学、占星学方面也有诸多著作。

除了中世纪的欧洲与阿拉伯世界，古代的印度（不限于罗马帝国灭亡之后）对自然哲学与数学同样做出了重要的贡献。这主要体现在数学上【张红, 2007】。众所周知，零的概念对于数学非常重要，最早做出这个贡献的就是古代的印度。在英国伦敦牛津大学图书馆珍藏的巴赫沙里手稿中，就有零的记载。放射性碳年代测定显示这份手稿中的零可追溯到公元 3 或 4 世纪。除了零，负数的发明和运用对于数学同样是至关重要的。古代印度也比许多其它国家先意识到这一点。公元 628 年，印度天文学家和数学家婆罗摩笈多在他的著作《婆罗摩历算书》中介绍了负数的运用规则。这里，正数被视为拥有的财富而负数则被视为债务。同时，他还提出了“负数加负数为负数，正数加正数为正数”、“正正为正、负负为正、正负为负、正数乘零、负数乘零都为零”等运算规则。再有，就是我们常说的阿拉伯数字也来自于印度。在中世纪，被阿拉伯人传播开来，深刻影响了后期数学的发展。

上述内容，加上之前介绍的古希腊、古罗马的自然哲学与数学成就，基本上构成了西方世界对自然哲学与数学的认识。这些认识是文艺复兴与科学革命的重要的基础。具体体现，我们将会在第三章展开。

2.8 中国早期的自然科学与数学

最后，我们回到自己生长的这片土地，来谈谈我们华夏文明在物理学、自然科学、数学发展史中占据的位置。早期，作为一名从事物理学专业研究的专业人员，笔者在想到这一点的时候整体的感觉是尴尬的。其主要原因，是由于物理学是自然科学的一个分支，自然科学源于自然哲学，而自然哲学，整体是在西方发展起来的。我们在说到的先贤的时候，更多的时候用到的关键词是思想家、诗人、教育家、词人等。在准备这个讲义的过程中，笔者有幸阅读了冯友兰先生的《中国哲学简史》【冯友兰，2013】。这本书已经畅销了很多年了，但笔者之前确实没有看过。读完之后，感觉自己在教育过程中一直挥之不去的一些困惑的解答顿时得到了清晰的解答。因为这个愿意，笔者斗胆效仿冯先生通过发展西方哲学中的一些关键的感念，进而来总结我们文化中的很多优秀的成果与传承的方式，开展本节的讨论。

讨论的起点是冯先生讲的“哲学是思想人生之思想”这句话。在看到冯先生的这句话之前，笔者也尝试针对哲学进行过一些学习。整体效果，是非常不好的。但是从思想人生之思想这个角度出发，笔者好像瞬间可以把以前学习过的一些概念进行梳理。比如，人是要面对客观的物质世界的，因此就自然地会有自然哲学。其中，按亚里斯多德的论述，是由《physics》开始展开的。在此基础上，有我们无法感知的内容，但它可能就是一些规律。于是，有《metaphysics》（形而上学）。在描述这些规律的时候，我们一定是要用到一些逻辑方法的，于是有《logics》。除了这些比较严肃的话题，人生也需要美，于是有了《Aesthetics》（美学）。人和人之间总是要有相互关系的，于是就有《Ethics》（伦理学）。我们在与人交流以及写作的时候，总是要注意修辞的。于是就有了《Rhetoric》（修辞学）。

当我们在“思想人生之思想”的框架下去理解这些学问的时候，很自然地哲学的诸多分支就诞生了。当然，哲学研究的是这些学问的最基本的规律。当这些知识已经比较完善，成为一个在一定程度上具有实用价值的学科的时候，它也会脱离哲学成为这个独立学科。按照这个标准，冯先生将我们的传统文化进行了一个非常系统的梳理，在世界范围内去看，很大程度上丰富了哲学的内容。作为一个体现，二十世纪的西方哲学家也整体不会像十八、十九世纪的西方哲学家那样去轻视东方哲学¹⁰⁸。从这个角度去思考问题的话，我们可以说中国哲学虽然在自然哲学这方面占的贡献较少，但中国传统文化对哲学的贡献是不可忽视的。

回到自然科学与数学本身，按照冯先生的说法，“上农”的经济特质决定了伦理学在我们的哲学中始终占据着核心的地位。由于哲学整体是为此经济结构服务的，我们就不难理解为什么我们在自然哲学与数学方面的成就是相对零散且具备很强的应用特质的。其中，应用数学与医学占据了很大的比重。以数学的发展为例，《周髀算经》与《算数书》的成书时间还有一些争论，但整体是在西汉时期，并不比《几何原本》晚太多。其关注点，多为与农业生产直接相关的天文历法以及运算规则方面的内容，纯思辨的元素还是少一些。之后，《九章算术》（成书于东汉之初，较为流行的版本是曹魏时期的刘徽的注本¹⁰⁹）、《孙子算经》（大

¹⁰⁸ 比如黑格尔（1770-1831），他最具代表性的成就是辩证法。西方哲学在他之前都不是辩证地看问题的，而是非黑即白。从他这里，哲学家开始强调两面性。按中国人民大学张志伟老师的说法，西方哲学在他之前的发展目标一直是把自己做出科学。但到他之后，人们认识到用科学的方法做科学，则做出的东西一定就丧失了哲学的本质。与这种相对而言的后知后觉形成鲜明对比的是中国哲学从根儿上是辩证的。比如，冯先生提到的“入世与出世是对立的，正如现实主义与理想主义也是对立的一样。中国哲学的任务，就是把这些反命题统一为一个合命题”（文献【冯友兰，2013】第8页）。还有，就是我们常常听到的塞翁失马焉知非福的故事，说的都是事物的两面性。但好玩的是，提出辩证法的黑格尔却是西方哲学家中轻视中国传统文化的代表。

¹⁰⁹ 按冯先生的说法，从孔子开始，我们的书籍就喜欢按注的形式出现。

致为南北朝前半段)、《张邱建算经》(大致为南北朝前半段)、《五曹算经》(南北朝较晚的北周)、《缉古算经》(唐)、《数书九章》(南宋,秦九韶)都是很经典的著作,但同时也具备实用性明显的特征。从这个意义上来说,祖冲之(南北朝,具体而言是公元429年至500年)应该是超出了应用思维的纯数学家的代表。

与物理学相关的早期的研究大家比较公认的一点是墨家占据了很大比重。在《中国哲学简史》中,冯先生在西汉的司马谈(卒于公元前110年,司马迁的父亲)、西汉末到王莽的新朝时期的刘歆(约公元前46—公元23年)的将百家进行分类与溯源的学说的基础上,指出不同的“家”对应的是在公元前7世纪至3世纪这个社会、政治大转型的阶段,原来的贵族与官吏流落民间,以私人身份靠他们的专门才能和技艺为生,成为职业教师这样一个社会现实¹¹⁰。这个里面,教授经典与指导礼乐的专家,对应的是“儒”。而战争武艺专家,则为“侠”。他们分别发展为后期的儒家与墨家。

墨家实际上也是最早对儒家产生质疑的群体,因为他们的根基是完全不同的社会阶层。从这个角度来讲,我们也不难看出为什么我们的祖先最早对力与光现象的认识来自于墨家(这些现象在生产与战争中最有用)。这个和阿基米德发明投石机与利用光学反射点燃罗马战船来保卫他的国家叙拉古是一个道理。以墨家的著作《墨经》为例,力学方面,就有涉及杠杆、滑轮、斜面等装置,具有省力的效果;光学方面,直线传播及反射规律以及小孔成像等现象也有被涉及。与《墨经》大致同时期,还有一个《考工记》。这个可以说是我国最早的手工业技术的

¹¹⁰冯先生引用了孔子说的“礼失而求诸野”这句话来描述这个情况。这句话最早出自刘歆的《七略》。后来东汉的班固(公元32-92年)把它作为《汉书·艺文志》的基础。这句话出自《艺文志》。

国家规范¹¹¹，按攻木之工、攻金之工、攻皮之工、设色之工、刮摩之工、搏埴之工，记载了滚动摩擦、斜面运动、惯性现象、抛物轨道、水的浮力、材料强度，以及钟、鼓、磬的发音、频率、音色、响度及乐器形状的关系等诸多现象。同样在这个时期，《管子·地数篇》、《鬼谷子》、《吕氏春秋》等书中还记载了天然磁石的吸铁现象以及最早的指南针“司南”。这些与当时的经济生活、政治环境都有密切的联系。

再往后，每隔一段时间都有一些成就，其中最代表性的应该是宋代沈括(公元1031-1095年)的《梦溪笔谈》。这本书具有很高的科学价值，被称为中国科学史上的坐标。书中记载的主要成就集中于声学、光学、磁学方面。这里，作者详细讨论了声音的共振现象、针孔成像与凹凸镜成像规律，形象地说明了焦点、焦距、正倒像等问题¹¹²；同时，也讨论了人工磁化方法，并介绍了指南针的装置方法。这些，为后期航海使用的指南针的制造奠定了基础。

这些成就一方面是我们灿烂的文明史的一部分，另一方面，与西方自然哲学相比，在系统性方面也确实存在一定差距。中国科学院高能物理研究所张双南老师经常用到的一个典故或许可以让我们体会我们缺的一个很关键的思维方式。这个典故是我们都学过的一个故事，《两小儿辩日》，具体如下：

孔子东游，见两小儿辩斗，问其故。

一儿曰：“我以日始出时去人近，而日中时远也。”一儿以日初出远，而日中时近也。

一儿曰：“日初出大如车盖，及日中则如盘盂，此不为远者小而近者大乎？”

¹¹¹根据郭沫若考证，作者应该是齐国人，因为书中用的是齐国度量衡、齐国地名和齐国方言。

¹¹²但很遗憾并不是按照现代科学的方式来定量，当时也不具备这个条件(包含软条件与硬条件)。

一儿曰：“日初出沧沧凉凉，及其日中如探汤，此不为近者热而远者凉乎？”

孔子不能决也。两小儿笑曰：“孰为汝多知乎？”

在这个故事中，我们的态度好像是不知就不知了。但从科学研究而言，这些现象背后是丰富的光学、热学、甚至是微观层面的光与物质相互作用的知识的探索。如果我们在学习这个故事的时候，多一些这方面的思考，或许情况也会有所不同。当然，历史没有假设。但今天的我们在面临类似的现象的时候，是否应该不仅仅满足于眼前的温饱多一些类似的思考？当然，从个人生活的角度，每个人还是首先要把自己的生活过好。在此基础上，如果我们的下一代对纯科学的东西感兴趣，我们是否应该对孩子从事类似专业的研究提供更多鼓励，是整个社会需要重视的问题。

最后，我们用基于美国物理学会创始人亨利·罗兰的讲演稿发表在 1883 年 Nature 杂志上的一篇文章来讨论纯科学研究或者纯物理学研究对我们这个民族的意义【Rowland, 1883】。当时他所面临的环境是美国已经实现了工业化，并产生了像爱迪生这样伟大的发明家¹¹³，但整体而言基础科学的研究是远远落后于欧洲的。像我们在统计物理中经常接触的吉布斯 (Josiah Willard Gibbs, 1839–1903 年) 这个时候在欧洲才刚刚产生影响，这还要得益于麦克斯韦 (James Clerk Maxwell, 1831–1879 年) 对其的赏识。整体而言，在欧洲人眼里，美国人很富，但科学传统还是没有的。

于是，在 1883 年，亨利·罗兰以“关于纯科学研究的恳求 (A Plea for Pure

¹¹³当时还有一个小故事，是 1879 年爱迪生“实验了 1600 多种材料，做了几千次实验”，终于找到了碳化的棉丝作为最好的灯丝材料。而英国人斯旺在 1860 年就发现了此材料。1883 年，爱迪生试图把电灯推广到英国，立刻遭到了斯旺的侵权官司控告。爱迪生输掉了官司，被迫让斯旺加入爱迪生在英国的电灯公司担任合伙人。直到后来，爱迪生花钱买下了斯旺的专利。

Science)”为题，进行了这个讲演。我们摘出其中关键的几句：“I am required to address the so-called Physical Section of this Association. Fain would I speak pleasant words to you on this subject; fain would I recount to you the progress made in this subject by my countrymen, and their noble efforts to understand the order of the universe. But I go out to gather ripe to the harvest, and I find only tares.……. To have the application of a science, the science itself must exist. Should we stop its progress and attend only to its applications, we should soon degenerate into a people like the Chinese, who have made no progress for generations, because they have been satisfied with the applications of science, and have never sought for reasons in what they have done. The reasons constitute pure science. They have known the application of gunpowder for centuries; and yet the reasons for its peculiar action, if sought in the proper manner, would have developed the science of chemistry, and even of physics, with all their numerous applications. By contenting themselves with the fact that gunpowder would explode, and seeking no further, they have fallen behind in the progress of the world; and we now regard this oldest and most numerous of nations as only barbarians.”我想应该没有这段话更能让我们在回顾历史辉煌的同时唤醒我们对自身不足的认识了。我们也把这个作为本节的结束语，以期提醒我们的读者时刻关注此问题。

第三章 文艺复兴与科学革命

按照历史顺序，本章讲解文艺复兴与科学革命。它们共同的后果，按照罗素在《西方哲学史》卷三近代哲学开篇所述，是“教会的威信衰落下去，科学的威信逐步上升”【罗素，2022】。其中，文艺复兴在前，它对应的是人文精神的兴起以及对教会威信的挑战。科学革命在后，它对应的是科学威严的建立。前者是后者的基础。这两个事件对于世界近代史具有决定性的影响。基于这个关系，我们的讨论将分：文艺复兴的历史背景、文艺复兴、科学革命、科学革命的影响共四节来展开。

3.1 文艺复兴的历史背景

文艺复兴的英文名字叫 renaissance。其中，naissance 代表诞生，re 代表重新。因此，renaissance 的核心意思是重生，或者说重新绽放。这个绽放是一个动词，重新是副词，它们合在一起，需要有一个主语。这个主语就是：古希腊、古罗马的传统文化。

文艺复兴产生的历史背景，是人们对教廷在中世纪长期统治逐渐产生了厌恶情绪。虽说基督教的兴起是与耶稣的诞生伴随的，也就是从公元元年开始，但基督教对欧洲产生重要影响应该说是与罗马帝国的衰亡伴随的。也就是说，在中世纪，欧洲是个乱世，但基督教却获得了空前的繁荣。这个，和我们的历史上，在南北朝这样的乱世佛教却获得了空前的繁荣是比较类似的。

在 2.6 节，我们曾提到过古罗马帝国的衰落。这里，我们先简单总结一下这个过程，再针对文艺复兴展开说明。为了和古希腊的文明产生联系，我们从亚里士多德时期说起。在亚里士多德的时期，虽说古希腊的文化到达了高峰，但古希

希腊的城邦文明却基本上已经到了尾声。伴随着亚历山大帝的征服以及他的死亡（公元前 323 年），希腊历史进入泛希腊化时期。这个时期一直持续到罗马共和国在公元前 146 年征服希腊。它的一个基本特征是虽然古希腊城邦制已不存在，但古希腊文明作为一种先进文明依然在文化上统治着地中海东部沿岸。罗马共和国与公元前 27 年转变为罗马帝国。之后，很快就是公元元年，基督教开始兴起，并于公元 313 年通过罗马帝国皇帝君士坦丁一世的米兰敕令获得合法化。

公元 380 年，罗马帝国的狄奥多西一世要求罗马帝国境内的所有臣民遵守神圣使徒彼得给罗马人的信仰。从此，基督教成为罗马帝国的国教。公元 395 年，狄奥多西一世去世。他的两个儿子也将罗马帝国分为东罗马帝国与西罗马帝国两部分。公元 476 年，日耳曼人控制意大利全境，西罗马帝国灭亡。东罗马帝国一直延续至公元 1453 年，被奥斯曼土耳其帝国所灭。与西罗马帝国灭亡伴随的是欧洲的四分五裂，以及教廷长期的统治。期间，一直存在世俗权力与教会的斗争。

公元 1095 年，西罗马教宗乌尔巴诺二世应东罗马帝国（拜占庭）皇帝阿历克塞一世的求援，号召西方志愿军前往拜占庭帝国帮助其抵御塞尔柱人的入侵。由此引起的东征，后来逐渐演变为宗教战争，以夺回耶路撒冷城并将东方基督教从伊斯兰的统治中解放出来为目的。这场运动持续了将近两百年。作为这场运动的一个附带的作用，东西方之间的贸易被大幅度带动，不少商人（尤其是现在的意大利地区的商人，以威尼斯为最显著代表）变得富有。同时，东罗马帝国（拜占庭）的许多学者也带着大批的古希腊和罗马的艺术珍品和文学、历史、哲学等书籍逃往西欧避难。对于传统文化丧失殆尽的西欧¹¹⁴，这是很重要的文化输入，

¹¹⁴按照赵林老师在其网上课程《古希腊文明的兴衰》中的观点，这里面实际上有个文化自信的问题。古罗马在文化上传承了古希腊，并形成了环地中海地区的统治。罗马帝国对于诞生于东方（相对于他们的东方，实际上是欧亚交界处）基督教开始一直是压迫的，直至公元四世纪。在基督教

增进了西欧人对自己传统文化的认识。

之后，随着传统西罗马帝国的领地上经济的复苏与发展、城市的兴起与生活水平的提高，人们也逐渐改变了以往对现世生活的悲观绝望态度，开始追求世俗人生的乐趣。这些倾向，与天主教的主张是严重违背的。于是，在市民阶层，就出现了对天主教文化的反抗。当时意大利的市民和世俗知识分子，一方面极度厌恶天主教的神权地位及其虚伪的禁欲主义，另一方面，由于没有成熟的文化体系取代天主教文化，便开始借助复兴古希腊、罗马文化的形式来表达自己的文化主张。这也就带来了 renaissance 这场文化运动。

为了理解这种心态，我们可以从我们现在经常看到的一个词“哥特”出发，来体会当时人们的心情。我们首先需要明确这个词在当时绝对是一个贬义词。哥特人本身是日耳曼人的一个分支，也是灭亡西罗马帝国的主力。这个词最早出现，是人们用来描述一些教廷的建筑的丑陋的，说的是这些建筑像蛮族人建的。在十八世纪的英国，它又作为一种文学风格出现。其特征元素，是荒原、极端的天气、残破的古堡、巫师等。现在，它更像是统一的文化符号，甚至包含了着装风格(图 3.1)，特点就是暗、黑。这个词，和阳光下的美肯定是无缘的，虽然后期成为了一种个性。由此，我们也能在一定程度上体会当时的西欧人（以意大利地区生活的人为主）对他们的传统文化的向往。

经历了公元 313 年米兰赦令以及公元 380 年被宣布为罗马帝国国教之后，迎来了彻底翻身。之后，基督教对于崇尚多神的古希腊文化整体是排斥的。中世纪开始的一个标志就是罗马教会关闭最后一所古希腊学校。在中世纪，与欧洲形成鲜明对比的是新兴的伊斯兰文明对古希腊的文化则采取了一种更为包容的态度。这也是一种文化自信的表现。随着类似于十字军东征这种东西方文化的交流，文艺复兴前，本已厌倦教廷的西方文化界在接触到自己的传统文化后，也很自然地表现出对其的向往。



图 3.1 哥特风格，左边与中间是教堂（法国兰斯主教座堂、科隆大教堂），右边是穿衣风格。

3.2 文艺复兴

在文学和艺术上，人们一般认为文艺复兴开始的标志是十三世纪晚期但丁（Dante Alighieri, 1265–1321 年）、彼特拉克（Francesco Petrarca, 1304–1374 年）的文学著作与乔托（Giotto di Bondone, 1267–1337 年）的绘画作品的诞生。与之伴随的思想是人文主义，这源于罗马人文主义的概念和对普罗塔哥拉斯等古希腊哲学的重新发现，后者有这样的名言：人是万物的尺度¹¹⁵。同时，君士坦丁堡的战乱也使得大批希腊语学者及书籍流入意大利¹¹⁶，特别是佛罗伦萨。这个时候，

¹¹⁵按照赵敦华老师在《西方哲学简史》中的介绍，人文主义这个词最初的意识是人文学科（Studia Humanitatis），包括语法、修辞、诗学、历史与道德哲学。它重视“文”与“人”的联系，提倡古罗马优雅的拉丁文，目的是为了传播新的生活方式。与之相应，文艺复兴的早期成就也是在文学领域。由这些文学领域的成就带领，人们开始思考宗教改革，开始提倡自然科学的精神，进而进行宗教改革与科学革命。人在这，扮演了重要的角色。按照冯友兰先生“哲学是思想人生之思想”的观点，我们也能够理解这种人文主义背后的哲学。

¹¹⁶实际上这个城市的名字也能反映出其文化的变迁。早期是拜占庭，希腊城市。之后是君士坦丁堡，以宣布米兰敕令拯救基督教的君士坦丁命名。最后是伊斯坦布尔，伊斯兰文明的体现。

佛罗伦萨是一个自治城市。这和古希腊以雅典为代表的城邦文化恰恰又是极其相似的。但丁、彼特拉克、乔托都出生在这里。

在但丁生活的年代，佛罗伦萨的政治势力分为两派，分别支持教宗与神圣罗马帝国的皇帝。教宗与皇帝，代表的就是教权与世俗权力。但丁因为支持神圣罗马帝国的皇帝（很自然在这个背景下他会反对教廷），被放逐出佛罗伦萨。之后，他在意大利的几个其它城市居住，以意大利托斯卡纳方言写作了多部作品，这也为现代意大利语言以托斯卡纳方言作为基础起了先行者的作用¹¹⁷。其中，《神曲》描述了但丁在地狱、炼狱、天堂游历的经过。在《神曲》中，他将自己钦佩和厌恶的人物分别纳入各个部位，甚至将他痛恨的教皇及一些佛罗伦萨人全打入地狱。这反映了他对神学问题一些新的见解，以及对世界的看法。这在当时，是非常反传统的。在但丁之后，彼特拉克、薄伽丘（Giovanni Boccaccio，1313-1375 年）的作品（比如《歌集》、《十日谈》）也具有同样的人文主义的特征，以戏谑的方式对教廷展开嘲讽。同时，这些作品也开创了一些新的文学形式（比如彼特拉克的十四行诗、薄伽丘的写实风格）。因此，人们一般把但丁、彼特拉克、薄伽丘当作早期的文艺复兴三杰。

在早期三杰的文学作品流行的同时，1348 年开始的黑死病的流行（据说造成了佛罗伦萨一半居民的丧生）也使得人们对于上帝（神性）的信仰产生了动摇。在艺术领域，不同艺术家为了获得艺术品的委托展开了激烈的竞争，这也带来了艺术形式的创新。从乔托开始，人们尝试突破了僵化的中世纪艺术形式，探索新

¹¹⁷欧洲近代民族国家兴起的过程中，用本国语言写出的文艺作品、哲学作品、甚至科学作品，实际上是非常重要的。比如莎士比亚（William Shakespeare，1564-1616 年）、塞万提斯（Miguel de Cervantes Saavedra，1547-1616 年）、歌德（Johann Wolfgang von Goethe，1749-1832 年）、（Immanuel Kant，1724-1804 年），在这个方面都有很重要的贡献的。这个我们一定不能忽视。

的手法，使得艺术作品更加生动立体。十五世纪初，美第奇家族以银行起家，取得对佛罗伦萨的实际统治权。1419 年，乔凡尼·美第奇（Giovanni di Bicci de' Medici, 1360–1429 年）委托精通罗马古建筑的工匠布鲁内列斯基（Filippo Brunelleschi, 1377–1446 年）负责始建于 1296 年圣母百花大教堂的大圆顶的建筑。通过发明一种新型的起重机，该工程于 1436 年完工。之后，美第奇家族在佛罗伦萨的政治斗争中经历了一些起伏。

1469 年，乔凡尼的 21 岁的重孙洛伦佐一世·德·美第奇（Lorenzo di Piero de' Medici, 1449–1492 年）获得家族与佛罗伦萨实际统治权，文艺复兴进入黄金时代。洛伦佐·美第奇资助了包括委罗基奥（Andrea del Verrocchio, 1435–1488 年）、波提切利（Sandro Botticelli, 1445–1510 年）、达·芬奇（Leonardo da Vinci, 1452–1519 年）、米开朗基罗（Michelangelo di Lodovico Buonarroti Simoni, 1475–1564 年）在内的一批艺术家。其中，达·芬奇、米开朗基罗与更年轻的在佛罗伦萨学习后在罗马度过了大部分艺术生命的拉斐尔（Raffaello Sanzio da Urbino, 1482–1520 年）并称三杰，在很大程度上代表了文艺复兴在艺术上的辉煌。

之后，文学与艺术的发展使得人们的思想得到了极大程度的解放。人们也开始尝试以人为中心，深入思考人与神的关系以及人类社会的构成。作为文艺复兴这个时代的宣言，乔瓦尼·皮科·德拉·米兰多拉（Giovanni Pico dei conti della Mirandola e della Concordia, 1463–1494 年）在其 23 岁时写就的一篇长篇讲演稿《论人的尊严》（<Oratio de hominis dignitate>）¹¹⁸。他本来的愿望是在宗教、哲学、自然哲学等方面提出了一系列论题，希望在罗马进行的一个上与人讨论。最终，这个大会因为教皇的反对而搁浅。但这篇为开幕式准备的演讲稿却声名远扬，

¹¹⁸本段中对《论人的尊严》的介绍基本来自亚马逊网站上对本书的简介。

被誉为“文艺复兴的宣言”。这里，他赞颂人是自由的造物，能认识并能管理一切存在物。他提出，人的尊严来自于人的形象，它并未被先天地规定下来，而是可以通过道德自律、不断进取而实现自己的完善。这些论述无比深刻地体现了文艺复兴的精神底色：人文主义，对人的自然的确信，以及对不同学科、文化、哲学和宗教的开放态度。

这些文学与艺术的发展以及思想的解放很自然的会影响到生活在意大利的各种人群，包括青年学生哥白尼（Nicolaus Copernicus, 1473–1543 年）。1506 年，完成学业后，哥白尼回到波兰，担任他舅父的医生和秘书。同时，他也是教士。他还建了一个小天文台。但是从当时人的记载和哥白尼本人的著作来看，他很少进行天文观测，主要是通过前人的观测结果，进行哲学思考与数学计算。这些思想最终汇集为一个全新的天文学理论。从知识结构的角度出发，笔者认为哥白尼在意大利的求学经历对他能够产生这种思想是至关重要的。因此，我们也把这段讨论作为本节的落脚点以及下一节（科学革命）的起点。

3.3 科学革命

在本节，我们选取两个时间节点，即 1543 年哥白尼发表《天体运行论》与 1859 年达尔文（Charles Darwin, 1809–1882）发表《物种起源》，来标记科学革命¹¹⁹。它的展开，伴随的是倡导理性的哲学思想在欧洲哲学界统治地位的建立。当然，西方哲学从来不缺理性主义，但古希腊的理性是基于感官的思辨，中世纪的理性是神学的助手。只有在科学革命这个阶段，理性才冲破这些束缚，成为更加

¹¹⁹还有其它的说法，比如从《天体运行论》到 1687 年牛顿的《原理》的出版，从《天体运行论》到 1789 年拉瓦锡的《化学基础论》的出版。我们选《物种起源》，是因为它能够涵盖等多的自然科学的分支的关键的发展。

自由的探索。

与科学革命伴随的，是科学的研究方法的建立、自然科学的成熟及其向其它哲学领域的推广。或者更准确地说，是以科学方法作为手段来产生科学知识这样一种模式所定义的科学的成熟及其发展。与之伴随，科学成为一个与哲学、神学并列，且占据了更大比重的认识世界的工具。现在，人们甚至将科学等同于正确¹²⁰。下面，我们将按时间顺序，选取一些代表人物来首先介绍科学革命。

3.3.1 哥白尼

第一个代表人物，当然是哥白尼。2.6 节中，我们也提到过古希腊天文学家阿里斯塔克斯（Aristarkhos，约公元前 310–230 年）曾提出过以太阳为中心的关于宇宙结构的学说，但这个学说在当时影响不大。哥白尼的日心说可以说是吹响了科学革命的号角。哥白尼认为，托勒密体系中的各部分之间的关系非常地不协调、不统一。实际上，人们当时的宇宙模型只需要确定日、月、地，以及水、金、火、木、土，一共八个天体的运动轨迹。天、海、冥这三个行星还没有被发现¹²¹。而恒星，则是按根本不动的方式，被当作“恒星天”来处理。

在托勒密的体系中，为了让这几个天体的运动符合天文观测，必须引入不同的原理、假设，以及对视觉效果的解释。前面提到，在哥白尼生活的年代，人们对天主教会提倡的亚里士多德的思想的怀疑和批评已渐成风气。他本人作为一个在文艺复兴期间的意大利求学过的年轻人，又专注这个问题几十年，对天体运行提出新的看法（认为太阳是宇宙的中心，而不是地球）是很容易被理解的。当然，这是对世俗观点的强烈的挑战。但整体而言，与后期的布鲁诺不同，哥白尼与教

¹²⁰这句话当然很不正确。哲学与神学的很多内容至少在目前看，不能被科学所替代。

¹²¹当然，冥王星的太阳系第九大行星的地位也还有争议。

会的关系始终是融洽的。

1543 年,《天体运行论》(拉丁语: < De revolutionibus orbium coelestium >, 英语: < On the Revolutions of Heavenly Spheres >) 出版。同年,哥白尼去世。在之后的七十多年间,日心说的内容并没有本很广泛的接受。因此,也没有引起罗马教廷的重视。在此期间,第谷·布拉赫(Tycho Brahe, 1546–1601 年)做了很多新的天文观测。在哥白尼的天体模型中,所有的轨道都是圆。这就导致此模型在解释天文观测的结果的时候表现地并不好。就连第谷本人,也在使用一个“第谷系统”(介于地心说模型与日心说模型之间的模型,见图 3.2)来解释其天文观测的。

日心说被大众接受,很大程度上得益于布鲁诺与伽利略对其的宣传。其中,布鲁诺非常勇敢,但伽利略很显然更具备“科学的智慧”,知道利用事实而非观点来说服自己与说服别人。他基于自己设计的天文望远镜得到了更多更有利的证据,这使得他更加坚信日心说是正确的。之后,通过他的著作《两个世界的对话》(< Dialogue Concerning the Two Chief World Systems >, 有时也简称《对话》),日心说模型得到了极大的传播。当然,在从哥白尼的《日心说》的出版到伽利略的《两个世界的对话》的出版这样一个约七十年的历史进程中,日心说模型本身的进步也是关键因素。这主要来自于精通数学的开普勒把椭圆轨道广泛的引入此模型中,进而完美地解释了当时的天文观测。

与上述日心说被越来越多的知识精英所接受并开始进行推广的事实相对应,罗马教廷在 1616 年将《天体运行论》列为禁书¹²²。

¹²²后面我们会提到,《对话》的出版是晚于《天体运行论》被禁的。这里,我们主要强调的是在十六、十七世纪之交日心说被越来越多的人接受并开始传播这样一个事实。

3.3.2 第谷·布拉赫、开普勒、布鲁诺

第谷·布拉赫 (Tycho Brahe, 1546–1601 年) 是为数不多的我们更经常用名而非姓来称呼的西方历史人物 (其他还包括但丁、伽利略)。他以高精度的观测数据成为了推动近代天文学发展的奠基人之一。第谷出身于丹麦的贵族家庭, 其研究也得到了丹麦皇室的鼎力支持。其中, 比较有代表性的是 1576 年丹麦国王腓特烈二世将汶岛 (island of Hven, 位于丹麦与瑞典间, 现在属于瑞典) 赐予第谷来建天文台的台址, 于是就有了“天堡” (Uraniborg) 这样一个欧洲最早的大型天文台。

之后, 因为天堡的观测不稳定 (震动这个技术问题), 第谷在它旁边又建立了“星堡” (Stjerneborg)。在汶岛 20 多年的观测期间, 第谷亲自设计了大批当时先进的天文仪器, 如大型墙象限仪 (实际上就是个四分仪)、赤道浑仪, 取得了一系列重要的观测成果。第谷去世于人们开始使用望远镜进行天文观测之前 (约 1609 年, 始自伽利略), 他在汶岛为了进行天文观测所设计的各种仪器, 在当时也都代表着最前沿的观测技术。作为一个结果, 这些观测积累了大量的数据, 也为其助手开普勒提出著名的三大定律奠定了坚实的基础。

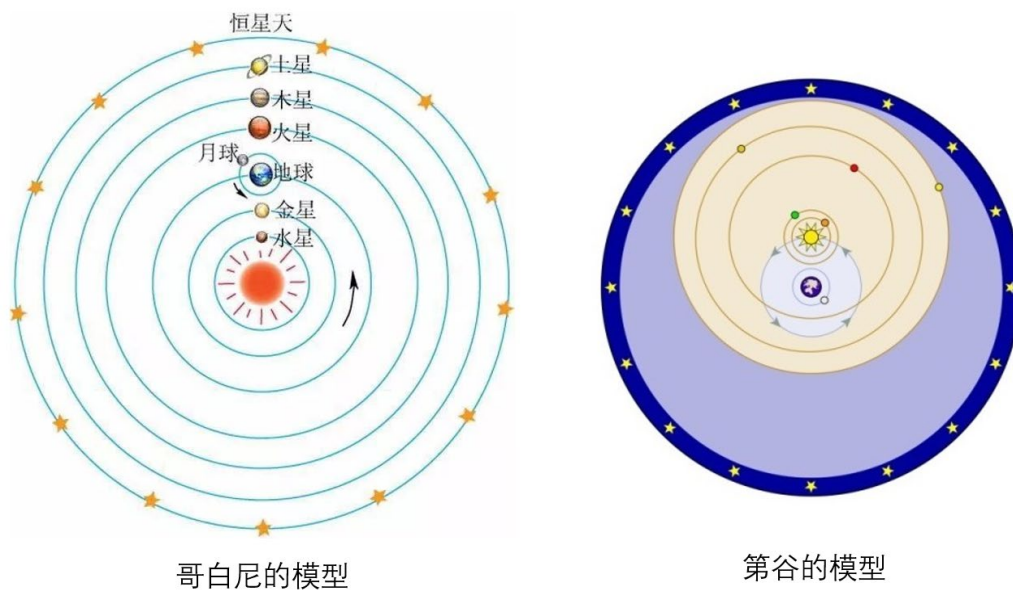


图 3.2 第谷的模型与哥白尼的模型，前者更像是后者与地心说的混合体。

开普勒 (Johannes Kepler, 1571–1630 年) 来自德国。与第谷·布拉赫相比，他的数学要好很多，这在他将天文观测结果总结为几何规律的过程中起到了至关重要的作用。在他生活的年代，天文学 (astronomy) 与占星术 (astrology) 之间的边界并不清晰，但天文学与物理学的边界是非常清晰的。开普勒把他的研究描述为天体物理 (celestial physics)，这个具有巨大的进步意义。1600 年，基于一些前期的通信联系，开普勒开始了与第谷的合作。合作伊始，第谷对数据还是有所保留。后来，惊异于开普勒的数学技巧，他分享了很多关键的观测数据。没有这些观测数据，开普勒不可能总结出后来的三大定律¹²³。

1601 年 10 月，第谷在 55 岁的年纪意外去世。之后，开普勒被聘为皇家数学家来完成第谷未完成的工作。1602 年，开普勒意识到了我们现在知道的第二定律：面积速度定律（行星围绕太阳运动时，每一行星和太阳中心的连线在相等的

¹²³ 其中第谷的数据对前两个定律至关重要。第三个定律提出的时候，天文望远镜已经被大量使用了。

时间扫过相等的面积)。1604 年,他又发现了我们现在说的第一定律:轨道定律(太阳系中所有的行星分别在大小不同的椭圆轨道上围绕太阳运动,太阳位于这些轨道的一个焦点上)。这两个定律,在 1609 年被总结在他发表的著作《新天文学》(拉丁语: *Astronomia nova*, 英语: *A New Astronomy*) 中。1619 年,他又在自己的新作《世界的和谐》(拉丁语: *Harmonices Mundi*, 英语: *The Harmony of the World*) 中报道了第三定律:周期定律(太阳系各行星绕太阳运动时,周期的二次方和行星轨道半长轴的三次方成正比)。

至此,牛顿力学中为了万有引力定律的引出所需要的最关键的天体力学基础准备完毕。我们这里强调一下:这些基础是对天文观测的数学描述,而非力学解释。一定程度上,它们描述的是运动学(kinematics)而非力学(mechanics)的内容。但运动学一般都是力学的基础,当然也都是物理学的核心内容。关于这一点,在第八章我们讲量子力学的时候读者应该会有更深的体会。至于开普勒定律对牛顿力学的意义,牛顿在其《自然哲学的数学原理》一书的序中也专门提到过。实际上,牛顿利用《原理》中由三大定律定义的牛顿力学所进行的一个作业,就是针对开普勒所描述的运动学内容给出了力学解释。关于这一点,读着在完成 3.3.6 小节和 4.1 节的阅读之后,应该有更完整的体会。

在本节的最后,我们讲一下布鲁诺(Giordano Bruno, 1548–1600 年)。他与第谷是同代人。作为对比,伽利略(Galileo Galilei, 1564–1642 年)与开普勒是同代人,比他们都稍微晚一些。从主要学术思想方面,第谷和开普勒放在一起讨论而布鲁诺单独讨论是合适的。布鲁诺与他们的不同点是他并不是以天文观测见长,而是以哲学与宇宙学见长。因此,他的论述在很大程度上是基于观点而非事实来进行。他的一生,代表的是对天主教信仰稳固纯粹之权威的明显对抗。同时,他

还是一名明道会修士¹²⁴、数学家、诗人。他最杰出的成就，是在日心说基础上提出了宇宙无限的理论。在这个年代，支持日心说的天文学家并不多。除了他，比较著名的还包括来自德国的梅斯特林（Michael Maestlin，1550–1617 年）、罗斯曼（Christoph Rothmann，1550 至 1560 年出生，约 1600 年去世）、开普勒，来自英国的迪格斯（Thomas Digges，1546–1595 年），以及来自意大利的伽利略¹²⁵。其中，布鲁诺的观点是最激进的。因此，他收到的罗马教廷的迫害也最残酷。1593 年，他因为异端罪名收到了罗马宗教法庭审判，被指控包括否认数项天主教核心信条等多项罪名。1600 年，被对其信仰的坚持，在罗马鲜花广场被处以火刑。

3.3.3 伽利略

相对于布鲁诺，伽利略在处理与教廷的关系的时候要缓和很多。实际上，他于当时的教宗的私人关系一直很好，直至其天文学著作《两个世界的对话》（全称是《关于托勒密和哥白尼两大世界体系的对话》，<Dialogue Concerning the Two Chief World Systems>，有时也简称《对话》）的出版。这本书所代表的根本性的冲突也使得其在晚年不得不接受来自罗马宗教法庭较为严苛的惩罚。

伽利略对科学的发展做出了多项不可磨灭的贡献。其中，他的提出了科学方法直接导致了近代科学的诞生。此方法强调对现象的一般性观察。基于此观测，人们需提出假设并运用数学和逻辑进行推理。此推理的结果则进一步需要经过实验检验，最终形成一般性理论，也就是早期哲学中经常提到的真理¹²⁶。基于此方法，科学知识就可以成为确定性的知识。在此方法体系中，伽利略既重视实验的

¹²⁴Dominican Friar，现在还有。

¹²⁵但当时的德国和意大利实际上都还不是现在的德国和意大利，英国已经是了。

¹²⁶在科学和哲学中，真理（Truth）是一个极其“崇高”的词。它是我们应该追求的目标！

意义，又强调理智的力量。与古希腊哲学家基于观察与思辨得出结论的研究方式不同，他引入了实验。与十三世纪的英国经院哲学家（也是实验科学最早的倡导人）罗吉尔·培根相比，他又强调自然离不开数学，只有数学证明的东西才是科学的、可靠的结论，而实验又是解开“自然之书”之谜的钥匙¹²⁷。

利用此研究方法，伽利略首先讨论了物体下落的问题，并基于此对亚里士多德哲学中“力是使物体运动的原因”这一论断提出了质疑。此质疑在当时具有重要的进步意义。传说中，这个实验是在比萨斜塔上做的，时间大概在 1590 年左右。也有说法说没有此实验的严格记载，从纪录的角度比较明确的是伽利略关于力与运动的关系以及惯性概念的提出主要依赖于斜面下滑的实验。但不管怎样，这些结论后期被整理为牛顿第一定律，进而作为经典力学的基础出现在我们的中学物理课本中是个不争的事实。包括牛顿，也承认他的第一定律来自于伽利略。

除了力学原理方面的成就，伽利略还于 1609 年发明了天文望远镜。此工作的一个重要基础是荷兰的眼镜制造利伯希(Hans Lipperhey, 1570–1619 年)在 1608 年向荷兰政府提交专利的折射望远镜。这个消息很快就传遍欧洲。伽利略在 1609 年 6 月听到了此消息，就在一个月內做出自己的望远镜用来观测天体。因为此仪器的出现，人类能够触及的天文观测的精度得到了极大的提升。比如，短期内，他就发现了诸如金星在运行过程中会呈现相位、木星有四个大的卫星（后面发现了其它的，这四个相对而言最大）、土星有环，以及太阳黑子等多项极其重要的天文现象。在解释这些天文现象的过程中，经过开普勒改进后的日心说就具有了

¹²⁷ 实际上，他们的思想又恰恰构成了后期哲学中理性主义与经验主义的基础。在以伽利略稍微晚一些的笛卡尔为代表的来自欧洲大陆的理性主义的哲学体系中，人们强调直觉与逻辑推理的重要性。而在以两个培根（罗吉尔·培根，弗朗西斯·培根）、霍布斯、洛克、休谟为代表的来自英伦三岛经验主义的哲学体系中，人们强调经验的重要性。这些特征，在我们这里对比伽利略与罗吉尔·培根时就已经有所体现。

地心说无法比拟的优势。实际上，金星相位就是日心说的一个预测。这使得伽利略在这个时期（1610s）成为鉴定的日心说支持者，并为其提供了前人所无法提供的支持。

1632 年，《对话》在意大利出版。这本书采用对话的形式来展开。参与对话的是支持日心说的两个朋友，沙格列陀和萨尔维阿蒂¹²⁸，与亚里士多德的观点的支持者辛普利邱¹²⁹。伽利略用这种对话形式使他的著作能拥有了大量的读者，从而能有效地否定掉了亚里士多德的力学和宇宙论。此著作出版的一个结果就是伽利略与其朋友也是最重要的支持者（教宗）关系的破裂，他也于 1633 被罗马宗教法庭强迫放弃“太阳是宇宙中心而非地球”的歪理邪说并被判处终身监禁。

除了科学方法、力学、天文学方面的贡献，伽利略在 1593 年还利用空气膨胀发明了温度计，这对于热学的发展具有重要的意义。另外，他还率先探讨了钟摆等重要的力学问题。这些辉煌的成就，使得他与牛顿一道，成为近代物理学甚至是科学的奠基人。

3.3.4 笛卡尔

笛卡尔（Rene Descartes, 1596–1650 年）比伽利略晚出生 30 多年，他对西方的哲学与科学的发展都至关重要。人们一般认为西方的近代哲学也从他开始。笛卡尔强调人的理性，认为可靠的就是个人自己以及这个人的思想的存在，外在的世界是由此推出来的¹³⁰。这个崇尚理性的理论被称为唯理论，后来影响了以莱布

¹²⁸这个萨尔维阿蒂（Salviati）就是他自己。

¹²⁹Simplicio，隐喻头脑简单的人。

¹³⁰笛卡尔的一句名言是：我思故我在（Cogito, ergo sum/I think, therefore I am），很能放映他对理性的强调，以及此思想的唯心主义特质。

尼茨 (Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646–1716 年)、贝克莱 (George Berkeley, 1685–1753 年)、康德 (Immanuel Kant, 1724–1804 年)、费希特 (Johann Gottlieb Fichte, 1762–1814 年)、黑格尔 (Georg Wilhelm Friedrich Hegel, 1770–1831 年) 为代表的
一批哲学家。同时, 他也将代数方法引入几何问题的研究中, 成为解析几何的奠
基人¹³¹。

在与科学相关的哲学思想方面, 笛卡尔的思想中有强烈的理性主义 (真理需
依赖理智和演绎推理的方法论) 的印记, 但同时也有伽利略的科学实验验证理论
的影子。基于后者 (科学实验方法), 融入前者 (纯理性主义, 将解析几何手段
应用于力学问题研究) 的因素, 此思想对我们后面要讲的一批科学家同样产生了
深刻的影响。这种影响通过他的学生惠更斯 (Christiaan Huygens, 1629–1695 年),
影响到了莱布尼茨 (Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646–1716, 惠更斯的学生)、胡克
(Robert Hooke, 1635–1703 年)、牛顿 (Isaac Newton, 1642–1727 年) 等人¹³²。
我们这个通识教材往往会选择科学革命中最辉煌的成果, 也就是《自然哲学的数
学原理》, 作为关注点。但我们也需要明确他的诞生与牛顿的这些前辈的贡献也
是密切相关的。

笛卡尔能够对哲学产生这么深刻的认识, 应该说与他的个人经历是密切相

¹³¹一种借助于解析式进行图形研究的几何学分支。在此之前, 几何与代数整体是分开的。代数普
适, 但不具体。几何画的都是具体的图形, 但方法不普适。从解析几何的研究方法创立开始, 代
数与几何开始融合。现在, 有人会说“几何是代数的几何, 代数是几何的代数”这样的话。背后
想传达的, 可能就是它们有时会反应相同的东西, 即集合的结构特征。只不过传统上几何通过图
形来描述, 代数通过代数语言来表述。这只是笔者作为一个数学的外行在看到一些类似的语言时
随便产生的想法, 数学的内涵当然比这个大很多, 这句话写在这里, 还是出于“想说给当年的自
己”这种考虑。

¹³²虽然《原理》的宇宙模型批判的对象就包括笛卡尔的漩涡说宇宙模型。

关的。他出生于法国贵族家庭，少年时代游历欧洲，32岁时移居荷兰并长期居住了二十年。此时的荷兰，正处在与西班牙海上霸权交替的上升时期，新教与天主教的冲突比较剧烈。在知识界，整个欧洲也处在新旧知识交替地比较剧烈地年代。唯理论的核心是承认人的理性可以作为知识来源的理论基础上的一种哲学方法，认为理性高于感官知觉¹³³。感官知觉是人的心灵与客观世界之间的窗户，但理性是落脚点¹³⁴。到了笛卡尔这里，他除了接受感官，更强调批判怀疑与理性方法，特别是普遍数学对于自然哲学的重要性¹³⁵。这种对数学的强调是建立在实验观测、批判怀疑的基础上的。因此，我们可以说他补齐了伽利略提倡的科学方法的短板，为后期牛顿、莱布尼茨这些人的成果奠定了坚实的哲学与数学基础。

最后，我们需要强调一下的是在理解笛卡尔的时候，我们一定要将他的思想上升到哲学的高度，而不是仅仅理解他具体贡献了什么知识。这从他理性主义的开山之作《谈谈方法》(<Discourse on Method>，1639年出版)中应该可以看出端倪。他的这本书的重点，是讨论如何在哲学上获得知识的方法。比如，在未弄清一个事情的时候，不要就信以为真；比如，除了对于清晰可辨和毫无疑问之物，对其他问题都不要做判断；比如，面临一个复杂的问题，一定要把它分解为多个小问题，逐一解决；再比如，将所有问题解决后，一定要检验，确保无遗漏。像我们熟悉的解析几何，在他的这本书里，也是作为附录出现的。或许他的考虑也

¹³³这个可以说是最早的从亚里士多德向柏拉图回归的例子。像柏拉图，就认为感知是理想世界到现实世界的投影。

¹³⁴实际上，早期自然哲学的成果，也可归结为人们对感官与理性的综合运动。在印度哲学中，人们忽略感官，自然哲学也很自然地没有得到发展。

¹³⁵普遍数学 (mathesis universalis) 一种强调数学的假设的、普遍的科学方法，笛卡尔和后面要提到的莱布尼茨是主要倡导者。

是把将代数与几何结合的解析几何当作是处理几何问题、代数问题的一个方法，提出供后人参考。

应该说，这在哲学上是最基础的，处于认识论的范畴。对于科学的发展，我们在各种教材上看到的很多历史人物的贡献都是极其重要的，但在方法论的层面，亚里士多德、伽利略、笛卡尔是一个层级，贡献的是最最基本的研究方法，值得大书特书。在第六章，我们在总结物理学革命前哲学思想发展的时候，还会对笛卡尔在哲学上的贡献（比如他唯理论的思想、第一性原理方法等）展开更多的介绍。这里，我们暂且将讨论局限在“科学革命”这样一个关键词上，以“为牛顿力学的提出进行准备”为侧重点，结束本小节的讨论。

3.3.5 惠更斯、胡克、莱布尼茨

从笛卡尔到牛顿，还有惠更斯、胡克、莱布尼茨需要进行介绍。其中，惠更斯是笛卡尔的学生，比笛卡尔小三十多岁，比牛顿（Isaac Newton, 1642–1727 年）与莱布尼茨（Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646–1716 年）大十多岁¹³⁶，胡克（Robert Hooke, 1635–1703 年）介于他们中间。一定程度上，惠更斯算是他们三个的领路人。这里，我们把惠更斯、莱布尼茨放在一节，原因是他们既是师徒，又在哲学上（尤其是自然哲学）都有自己的特色思想，一起连接起了伽利略与牛顿。把胡克也放在这里，是因为他在牛顿之前是英国青年才俊的代表，在牛顿力学的提出过程中，与牛顿也存在一些争端与争议。这是科学史的一部分¹³⁷。

惠更斯来自于荷兰的一个富庶的家庭。他的父亲是一名外交官，也是笛卡尔

¹³⁶ 在科学研究上，十来年基本是一代人。

¹³⁷ 科学知识是客观的，但科学家就是人，是以科学为职业的人。因此，科学作为一个知识体系、一种文化，是有人文特质的。我们在理解科学的时候，一定要认识到这一点。

的朋友。因此，在他 16 岁的时候，他就接受了笛卡尔的建议，到 Leiden 大学跟随范斯库腾（Frans van Schooten，1615–1660 年）学习数学。在这里，他系统地了解到韦达（Franciscus Vieta，1540–1603 年）¹³⁸、笛卡尔（Rene Descartes，1596–1650 年）、费马（Pierre de Fermat，1607–1665 年）的工作，这使得他能够很好地在研究中使用解析工具，也为他后期的成功打下了很好的基础。惠更斯是第一个针对物理问题建立模型，然后设定一系列参数用解析的方式进行求解的人，也是第一个利用钟摆原理发明时钟来计时的人。同时，他建立光学的波动理论，大幅改进了天文望远镜的性能，并基于此对伽利略发现的土星环进行了更为详细的描述。在概率论方面，他从费马那里学到了很多新奇的思想，引入期待值。这些对于后期物理学、天文学的发展都是至关重要的。

胡克（Robert Hooke，1635–1703 年）出生于英国南部英吉利海峡中的怀特岛（Robert Hooke，1635–1703 年）。1648 年，其父亲去世后，他怀揣几十镑的遗产赴伦敦求学。在这里，他主要学习了拉丁语、希腊语、以及《几何原本》，并对力学产生了兴趣。1653 年，胡克赴牛津继续深造。之后，他作为波义耳（Robert Boyle，1627–1691 年）的助手解决了抽真空的问题¹³⁹，在波义耳定律的发现中贡献了力量。1660 年，皇家学会成立，胡克作为年轻的学者开始在里面任职。十七世纪七十年代末，哈雷（Edmond Halley，1656–1672 年）的天文观测开始为力学的发展提供新判据。1687 年，哈雷赞助了《自然哲学的数学原理》一书的出版。

¹³⁸他是第一个系统性地数学中使用字母符号代表变量的人。

¹³⁹波义耳在将化学从炼金术中剥离进而将其融入自然哲学的过程中发挥了重要作用。我们现在往往会把他的著作《怀疑的哲学家》与一百多年后拉瓦锡（Antoine-Laurent de Lavoisier，1743–1794 年）的著作《化学基础论》放在一起，当作近代化学诞生的标志。波义耳还是英国皇家学会的一个重要的发起人。这个学会对于后期英国的科学发展，是至关重要的。

在这个过程中，胡克与牛顿关于引力与距离平方反比定律优先权的争议后来也成为了科学史上至今难有定论的话题。此争议的主要疑点集中在 17 世纪 70 年代牛顿是否从胡克这里受益？但没有争议的是从十七世纪七十年代到 1687 年之间，胡克确实没有将这些内容真正发表。科学史上，特别是比较成熟的近代科学史上，一个人是无法从未发表的工作中得到关于此工作的认可的。

除了胡克，另外一个与牛顿就学术成果优先权有争端的是莱布尼茨。这个有争端的学术成就是微积分方法，不是力学。莱布尼茨出生于莱比锡，学习过程中有个重要的导师是惠更斯。通过惠更斯，他传承了笛卡尔的唯理主义哲学，也成为其代表人物。除了哲学，他最重要的学术成就是独立于牛顿发展了微积分方法。这在当时，应该说也是必然。类似思想早期在阿基米德针对抛物线下面积的求积时就有使用（Quadrature of the Parabola）。科学革命的过程中，开普勒、费马对其都有发展。

考虑到牛顿与惠更斯一直有通信交流，莱布尼茨是惠更斯的学生，加上西欧因为其地域不是太开阔，学术交流一直比较通畅（像莱布尼茨就访问过英国，并与胡克、牛顿有交流），因此牛顿、莱布尼茨关注到这个问题从逻辑上都比较自然。莱布尼茨与牛顿共同的地方是他们意识到求积分与求导实际上是互逆的过程。但与牛顿不同，莱布尼茨并没有用此方法产生系统的力学理论。就微积分方法的发展而言，他的贡献是被后世充分认可的。同时，通过其学生雅可比 I·伯努利（Jacob Bernoulli, 1655–1705 年）以及尤其引领的伯努利家族，莱布尼茨的微积分工具相对于牛顿的微积分工具在后世得到了更好的发展与更为广泛的应用¹⁴⁰。

¹⁴⁰ 我们的多数习惯来源于莱布尼茨这一支。牛顿的习惯比较复杂，现在我们还在用的好像就字母上面加点代表微分这样一个了。同时，据说由于牛顿的强势，英国科学界很长时间被要求不能使用欧洲大陆流行的这套微积分理论。而后面提到，欧洲大陆的这套方法既好用，又便于发展。因

3.3.6 牛顿

前期准备结束后，我们现在介绍科学革命最大的主角：牛顿。牛顿的科学贡献中，最有代表性的可总结为三个方面。第一个，也是最重要的一个，是建立了经典力学理论体系。它使人们认识到世间万物可以遵循统一的、由数学公式可以简单表达的规律。就像他的墓碑上刻的，英国诗人波普(Alexander Pope, 1688–1744 年) 为其写的墓志铭说的：Nature and Nature's laws lay hid in night. God said, Let Newton be! and all was light。因为这个贡献，人们往往会把 1687 年牛顿出版《自然哲学的数学原理》一书当作科学革命的高峰。

牛顿第二方面的贡献是数学上的微积分的建立，这个是与莱布尼茨分别独立完成的。对牛顿而言，实际上是在研究统一的力学理论过程中发展的数学工具。现在，微积分也是我们理工科高等教育必不可少的基础课程，在科学研究、工程应用、甚至社会学数据分析等各个方面发挥着重要的作用。第三个方面，是其关于光学的很多重要实验，以及光微粒说的提出。当然，到了十九世纪初，在托马斯·杨(Thomas Young, 1773–1829 年)、菲涅尔(Augustin-Jean Fresnel, 1788–1827 年) 等人的努力下，它被波动说取代。在二十世纪量子理论建立后，又以另外一种形式进行了一定程度上的回归。这些工作当然都是开创性的，但不得不说相互对比起来，重要性还是有差异。下面，我们以经典力学理论的建立为重点，来展开对牛顿的介绍。

现在的读物中，人们都会把牛顿的四大定律（三大定律+万有引力定律）放

此，这个规定也在一定程度上阻碍了英国科学的发展。整个 18 世纪，相对于力学在法国以及欧洲大陆蓬勃的发展，英国是沉寂的。当然，实验上有像卡文迪许(Henry Cavendish, 1731–1810 年) 这样优秀的实验物理学家，但理论上顶尖的科学家相对于法国是少很多的，直到托马斯·杨(Thomas Young, 1773–1829 年) 的出现。

在一起来进行介绍，具体如下¹⁴¹：

1. 牛顿第一运动定律（惯性定律）：每个物体都保持其静止或匀速直线运动的状态，除非有外力作用于它迫使它改变那个状态；
2. 牛顿第二运动定律（运动方程）：运动的变化正比于外力，变化的方向沿外力作用的直线方向¹⁴²；
3. 牛顿第三运动定律（作用力与反作用力定律）：每一种作用都有一个相等的反作用；或者说，两个物体间的相互作用总是相等的，而且指向相反；
4. 万有引力定律：物质相互作用的普遍规律，自然界中任何两个物体都以一定的力相互吸引，这个吸引力的大小与它们质量的乘积成正比，与距离平方成反比。

我们中学的时候会基于这些定律做很多习题，让大家掌握知识点。这里我们换个

¹⁴¹这里四个定律中的前三个（第一、第二、第三）用的都是北京大学科学元典系列牛顿《自然哲学数学原理》（王克迪 译，袁江洋 校）的表述。这是由其英文表述中直接翻译过来的。万有引力定律的表述和它们有区别，用的是笔者自己总结的句子。这样做的原因很简单，在《原理》这本书中，前三个定律的地位与万有引力定律是完全不一样的。前三个定律是牛顿力学的基础，作者基于其推出了一个力学体系。而万有引力定律，是在《原理》的第三编（《宇宙体系》）中作者在前两编（《物体的运动》、《物体在阻滞介质中的运动》，特别是第一编中推出的诸多结论）的基础上，将这些定理应用于太阳系中的星体运动问题，发现只有在星体间的相互作用力符合万有引力定律的描述的时候，开普勒三大定律才能被很好的解释。换句话说，从理论体系的角度，第一、第二、第三定律是这个力学理论体系的基本假设，是先验的。而万有引力定律是牛顿基于归纳推理的逻辑，结合实验观测的事实（开普勒三大定律），推出的定律，是基于经验的。在本节，为了让读者阅读起来不是很累，我们只是将这个区别点到。在4.1节经典力学理论中，我们会用现代人的语言把这个推理过程进行一个简单的重复。在牛顿的《原理》中，这个推导是极其晦涩的，大家可以不用过多考虑，只需理解这点不同就可以。

¹⁴²原始的表达据说是：The alteration of motion is ever proportional to the motive force impressed; and is made in the direction of the right line in which that force is impressed。这里的 motion 现在叫 momentum，motive force impressed 指的是冲量。这里我们对这几个定律，用的都是原始表述的中文版。现在，第二定律更多的被描述为动量对时间的微分与其受力作为矢量相等。当质量不变的时候，也可表述为其受力等于质量乘上加速度。

侧重点，从科学发展规律的角度，来理解这些定律的产生过程，并强调三大定律与万有引力定律在逻辑上不是一个层面的！

我们首先想指出的是牛顿出生于 1642 年，而《自然哲学的数学原理》出版于 1687 年，从 1661 年牛顿进入剑桥大学三一学院学习开始算起到这本专著的出版经历了 26 年。一个理论的建立，往往是多年积累的沉淀，更何况是一个如此伟大的理论。因此，像我们经常说到的 1665-1666 年牛顿为了躲避瘟疫回到老家，收苹果落地的影响想到万有引力进而建立力学理论的故事，从科学规律的角度，或许需要换一种理解。

我们要知道这个故事是在牛顿去世之后，他的迷弟，也是法国启蒙运动的三个代表人物之一的伏尔泰流亡英国期间在访问他的侄女时¹⁴³，听他的侄女讲的一个长者对孩子讲故事的时候（比如牛顿给他的侄女），会有扰乱时空与夸大的可能的¹⁴⁴。同时，1665-1666 年这个时间节点离 1687 年太远了。一个理论成型，很难等二十多年才写下来。笔者更倾向于相信的是牛顿在那个时候受到了某种启发，这个启发对后期他建立一个完整的理论有重要帮助。要理解这个理论的建立

¹⁴³ 牛顿力学对于 18 世纪的法国产生了重要的影响。类似理性的思想，除了挑战宗教权威，还挑战传统的封建势力。启蒙运动中，以伏尔泰为代表的很多关键人物都受到了来自邻国的这种先进思想的影响。笔者家里有一本从网上淘到的戴念祖先生赠予友人的由商务印书馆在 1978 年出版的劳厄（Max von Laue, 1879-1960 年）的《物理学史》（范岱年、戴念祖译）。其中，第二章有这样一段话放在这里比较合适：**事实上，牛顿的思想首先在法国传播，不仅在专业人员中传播，而且“启蒙运动”把它传播到广泛很多的各个阶层。**在专业领域，牛顿力学的进一步发展也多以法国为中心开展，比如：丹尼尔·伯努利（Daniel Bernoulli, 1700-1782 年）与欧拉（Leonhard Euler, 1707-1782 年）对多质点体系、刚体、流体问题的研究，达朗贝尔（Jean le Rond d'Alembert, 1717-1783 年）对牛顿第二定律的重新表述，拉格朗日（Joseph-Louis Lagrange, 1736-1813 年）基于变分法创立的分析力学，拉普拉斯（Pierre-Simon Laplace, 1749-1827 年）建立的经典天体力学等。这些，应该说都是牛顿的方法与理论的进一步发展。

¹⁴⁴ 笔者的一个学法学的的朋友经常跟笔者提故事的可信度的问题。笔者认为对于科学史中的故事，我们应该持同样态度。

过程，我们一定要从他受到自然哲学的系统训练之后，如何总结前人对力学问题的理解开始讲起。

处在十七世纪六十年代这个时间节点上，牛顿面临的能够对他理解这个世界产生重大影响的前辈包括：开普勒、伽利略、笛卡尔、惠更斯。他的关注点是建立一个力学体系，来解释开普勒的天文观测。这里的力学指的是动力学。力学虽然是一门具有两千多年历史的学科，但之前更多的是静力学与运动学，动力学的创建应该说是从伽利略、惠更斯才开始的¹⁴⁵。前面提到，伽利略对力与运动的理解是力是改变物体运动状态的原因。牛顿第一运动定律（物体不受外力运动时保持惯性，作匀速直线运动），就是这个最早由伽利略提出的惯性定律的另一种表述。牛顿本人也是把这个贡献归结到伽利略这里的。

有了这个定律，人们要关心的下一个问题自然是：如果我受力了，那我的运动状态如何改变？这里，就牵扯到一个数学上的思维范式的跳跃¹⁴⁶。这个跳跃就是所谓的微积分方法的产生及应用。牛顿考虑的问题从平均速度这种与人们的直观感觉密切相关的概念向瞬时速度这种抽象的、必须通过先进的数学方法描述的概念的跳跃¹⁴⁷。这也是我们常说的物理学的进步往往要与数学的发展密切联系的一个体现。客观世界的基本规律往往需要针对一些可观测的物理量引入抽象的概念，然后基于数学语言来进行描述。

在参考系的选择方面，牛顿满足于伽利略的惯性参考系并尊重伽利略不变性。

¹⁴⁵这里牵扯到力学这个词的多重涵义，在 4.1 节我们会详细介绍。

¹⁴⁶库恩所说的科学革命即思维范式的变革。这里，在数学上体现为牛顿、莱布尼茨引入的微积分的方法。

¹⁴⁷这里引用的是文献【张天蓉、葛惟昆，2021】中的观点。在她/他们讨论牛顿的时候，还特别说到了开普勒的行星运动第二定律的表述实际上就是一个积分表述，没有瞬时的概念在里面。

同时，基于伽利略早期对重力下物体运动的研究，牛顿在物体的受力与动量单位时间内的变化之间建立了关系。在牛顿所关心的开普勒三大定律的解释问题中，天体质量并不会随时间变化。因此，第二定律也可写成质量与加速度的乘积。基于此，人们也可定义质量。

有了第一、第二定律，人们知道了不受力的时候物体应该匀速直线运动、受力的情况下物体应该怎么进行运动状态的转变？从逻辑层面，要建立一个力学理论体系，先不考虑开普勒定律描述的类似星体运动问题，也不考虑力是从哪里来的，那么对于包含多个物体的系统，下一个问题就是物体相互作用的时候的相互作用力需要满足什么样的规律？这个是牛顿第三定律做的事情。

针对这个问题，牛顿给出的表述是：相互作用的物体的相互作用力是大小相等、方向相反的。这个也是高度反直觉、高度理性的！在亚里士多德的哲学体系中，相互作用的两个物体有等级，高等级的物体对低等级的物体的作用是大于后者对前者的。同时，在描述运动的时候，人们也会认为作用力大于反作用力才能实现运动。十七世纪初，笛卡尔、惠更斯这些人也研究过物体碰撞，并发现了动量守恒定律。这个定律意味着作用力与反作用大小相等方向相反¹⁴⁸，但笛卡尔的关注点并不在力这个矢量上，而在动量本身，并且他也把动量简化为一个标量。牛顿看出了这个本质，并将其运动到不产生实际接触的天体，进而彻底建立了自己的力学体系。

基于三大定律，以及对质量、动量、力、外力、向心力、加速度这些量的定义，牛顿建立一个力学理论体系。这个理论体系可以描述物体在力的作用下是怎

¹⁴⁸ 基于碰撞过程中动量守恒，结合牛顿第二运动定律，可推出碰撞过程中作用力与反作用力大小相等、方向相反。

么运动的？这些内容构成了《自然科学的数学原理》的前四部分¹⁴⁹。在这本书的第五部分，也就是其第三编《宇宙体系（使用数学的论述）》中，牛顿将前面的内容用于星体的运动描述。这里，他发现以开普勒三大定律为依据的话，可以推出星体间的相互作用满足与距离的平方成反比与物体的质量成正比这样一个规律。这就是所谓的万有引力定律。

因此，从逻辑上来说，虽然我们在教学中经常把牛顿三大定律与万有引力定律放在一起构造牛顿力学的理论体系，但在其实际构造过程中，这四个定律所起的作用是不一样的。前三个是事先认定的规则，就像《几何原本》中的五条公设。而万有引力定律，是以开普勒三大定律为判据，由基于三大定律建立的力学理论推出来的定律。在有了万有引力定律之后，牛顿也一定程度上解决了力是从哪里来的问题。当然，像类似于热机这种力学系统中力的来源，人们要等到热学理论发展成熟后才逐渐清楚。

牛顿力学的诞生，是科学史上最具影响力的一次思维范式的变革。它是一个描述自然界运动的最基本的规律。基于此，人们开始广泛地使用分析与解析的方法，去探索更多自然界的规律，科学革命也迎来了高潮。在牛顿力学诞生后的一个多世纪中，人们将其运用到世间万物的运动描述中。从质点开始，到刚体，到流体，到天体。代表人物包括了伯努利家族的诸多成员、欧拉、达朗贝尔、拉格朗日、拉普拉斯等。当拉普拉斯完成《天体力学》这样的巨著，拿破仑问他为何一句也不提上帝的时候，他简简单单地回答：我不需要这个假设。这些，应该说都是牛顿力学巨大成功的体现。

¹⁴⁹具体而言，它由《定义》（上面提到的这些量的定义）、《运动的公理与定律》（三大定律及其推论）、第一编《物体的运动》、第二编《物体（在阻滞介质中）的运动》、第三编《宇宙体系（使用数学的论述）》五部分组成。

天文观测方面, 1781 年, 赫歇尔 (Friedrich Wilhelm Herschel, 1738–1822 年) 发现了天王星, 这极大地丰富了人们对太阳系的认识。但天王星的运动轨迹的理论计算与天文观测始终不符。1843 年, 英国数学家、天文学家亚当斯 (John Couch Adams, 1819–1892 年) 通过这种偏差, 计算出影响其运动的太阳系八颗行星的轨迹。1845 年, 法国数学家、天文学家勒威耶 (Urbain Jean Joseph Le Verrier, 1811–1877 年) 对这颗行星的轨迹进行了更为详细的计算。1846 年, 德国加勒 (Johann Gottfried Galle, 1812–1910) 基于勒威耶的计算, 直接观测到了海王星的存在。牛顿力学的预测能力也得到了完美的展示。有趣的是, 之后人们也企图基于类似的方法对水星摄动进行解释, 但没有成功。最终的解决方案是广义相对论对牛顿力学的变革。冥冥中, 牛顿之后的物理学的王者 (爱因斯坦) 也悄然登基。

3.3.7 波义耳、拉瓦锡

在前面提到的物理学取得关键性进展的同时, 我们的兄弟学科化学也经历了最为关键的一次蜕变。化学学科的前身是炼金术 (Alchemy)。这个与天文学科 (Astronomy) 的前身是占星术 (Astrology) 有点类似。化学与炼金术的研究对象是类似的, 但后身具有很强的神秘主义色彩。在这个从炼金术到近代化学的蜕变过程中, 我们需要提两个关键人物: 波义耳 (Robert Boyle, 1627–1691 年)、拉瓦锡 (Antoine-Laurent de Lavoisier, 1743–1794 年)。

波义耳是一个爱尔兰人。我们前面提到的胡克在年轻时曾经作为他的负责抽真空的助手, 参与到其关于气体性质的研究中。这方面研究的一个重要成果是一

定温度下气体的压强与体积成反比这一定律的发现¹⁵⁰，第四章我们讲热学的时候会详细讨论。除了这个定律，波义耳还有一个重要贡献是其完成了一本意义非凡的著作：《怀疑的化学家》(The Sceptical Chymist)。在这部著作中，他将科学的精神（这已经在伽利略之后了）融入到化学的演技中，强调基于实验的批判。也是因为这个原因，人们现在普遍认为这本书的出版是炼金术向近代化学转变的标志性事件。之后，虽然类似于燃素说这样的错误的理论还统治了化学研究一百多年，但化学研究的基本方法已经确立了¹⁵¹。直到今天，实验在化学学科中扮演的角色依然是极其重要的（甚至大过实验在物理学中的比重，这个或许也与物理学本身更注重思辨有关）。

与波义耳类似，拉瓦锡对化学的贡献也不在于他发现什么重要的化学物质和化学反应，而是方法论层面的。波义耳是引入了一个基于实验的批判方法，而拉瓦锡的贡献是他建立了一个全新的理论框架来对化学反应进行解释。拉瓦锡的代表作是其1789年出版的《化学基础论》(<Elementary Treatise on Chemistry>)。在里面，他系统地阐述了自己基于精确的实验研究与理性思维总结出的化学反应质量守恒定律与氧化说。至此，历史上燃素说发挥的作用在拉瓦锡的理论体系中被氧化说取代。在这部书中，拉瓦锡还对传统希腊哲学强调的元素的概念进行了重新定义，对当时人们常见的一些化学物质进行了分类。在这个分类中，他列出总结出三十三种元素（尽管一些实际上是化合物）和一些常见的化合物。这非常有

¹⁵⁰这一定律后来被法国物理学家马略特(Edme Mariotte, 1620-1684)独立发现，因此我们往往称其为波义耳-马略特定律。

¹⁵¹这里，也可以做一个类比，热质说也统治了热学研究很多年，但这段时间明显已经是在近代物理学建立之后。人类对客观世界的认知总是有边界的。因此，学科创立的标准往往还是会以科学方法的引入为起点的。

效地使得化学这门知识略显零碎的学科建立起一个相对系统的理论。

遗憾的是，在雅各宾派专政时期，拉瓦锡以为担任过前朝的税务官被推上了断头台。拉瓦锡死后，他的好友拉格朗日感叹道：他们只用一瞬间就砍下了一颗头颅，但再过一百年也找不到像他那样杰出的脑袋了¹⁵²。庆幸的是，历史最后给了拉瓦锡最公平的肯定。从《化学基础论》开始，人们对化学反应的描述开始沿着正确的方向进行。化学，也不停地为科学的发展，包括物理（尤其是在人们对原子结构的认识的过程中，意识到化学本质上就是原子结构的重新排布）、生命科学（比如呼吸运动在拉瓦锡的时代就被解释为缓慢氧化、本世纪分子生物学科的建立）的发展，贡献着不可忽视的力量。

3.3.8 达尔文

达尔文（Charles Robert Darwin, 1809–1882 年）的父亲是一名医生，他的祖父叫伊拉斯谟斯·达尔文（Erasmus Darwin, 1731–1803 年），是英国医学界的权威，在关于生命、植物的理解上颇有建树。这个家庭对生命、对医学的认识，对日后的达尔文产生了重要影响。他 1825 年至 1827 年在爱丁堡大学学习医学¹⁵³，但在这个期间，达尔文对医学课程并没有太大兴趣，而是在植物分类上花费了比较多的精力。为此，他的父亲开始为他规划不同的人生，把他送到剑桥大学学习一些文科知识，并希望他最终能够成为一个神职人员。

1828 年，达尔文并没有通过一种名叫 Tripos 的学位资格考试，不得不转而攻读一种叫做 ordinary degree 的学位（正常的翻译就是普通学位）。但幸运的是，

¹⁵²拉格朗日、拉普拉斯、拉瓦锡的年龄差距不是很大，他们有很多交集。同为法兰西科学院院士，他们也为法国科学在十八世纪末、十九世纪初取得举世瞩目的成绩贡献了关键的力量。

¹⁵³当时爱丁堡大学的医学院是英国最好的，好过剑桥与牛津这些更加有名的大学。

之后他在剑桥大学找到了自己的兴趣，并成为著名植物学家、地质学家亨斯洛教授（John Stevens Henslow, 1796–1861 年）的好朋友。这段友谊深深地影响了达尔文的人生方向。1831 年 1 月，达尔文在其参加的 ordinary degree 的学位考试中表现出色，最终位列 178 名候选人的第 10 位完成了这段学习。

同样在 1831 年，隶属于英国政府的猎犬号军舰要进行第二次环海旅行（Second voyage of HMS Beagle, 见图 3.3），目的是为了修正当时的航海图（比如当时人们对里约热内卢的经度是有争议的，而这个问题在猎犬号的第一次航行中并没有解决）¹⁵⁴。船长菲茨罗伊（Robert FitzRoy, 1805–1865）希望带一名既懂地质也懂博物学的绅士同行。亨斯洛教授向他推荐了达尔文。在上船之前，达尔文阅读了约翰·赫歇尔（John Frederick William Herschel, 1st Baronet¹⁵⁵, 1792–1872，他也是发现天王星的威廉·赫歇尔的儿子）的《自然哲学研究略论》（A Preliminary Discourse on the Study of Natural Philosophy），并被其中“自然哲学追求的最高目标是基于观测通过归纳推理来理解最基本的规律”的观点所折服。同时，他也看了亚历山大·冯·洪堡（Alexander von Humboldt, 1769–1859）关于其 1799 到 1804 年南美洲旅行探险的《个人叙述》（<Personal Narrative>）¹⁵⁶。这些，都为他在本次航行中取得收获奠定了知识储备上的基础。

¹⁵⁴前面我们在 2.3 节讲到高斯的时候提到过，地图绘制在当时，是一个世界性的难题。只有在高斯引入映射（mapping，词根是 map）这个数学概念，并建议他的学生黎曼开展关于曲面的研究之后，这个问题才从数学上被根本性的解决。之后，工程应用就变得很直接。

¹⁵⁵翻译为第一代从男爵。在英国，有科学家获得爵位的传统。他的爵位分级，与我们周朝、春秋时的爵位分级很想，一一对应为公（Duke）、侯（Marquis）、伯（Earl）、子（Viscount）、男（Baron）。笔者不知道这个巧合还是有什么原因？

¹⁵⁶在第七章，我们会讲到普鲁士的教育改革。洪堡就是这次教育改革的主要负责人。从知识结构的角度来看，他在年轻时对世界的游历应该会对他完成那样的历史任务起到积极的作用。



图 3.3 猎犬号第二次航行图。

《物种起源》的核心思想是演化论及其运行机制，这个机制是自然选择 (Natural Selection)。在此之前，受基督教的影响，在主流的博物学研究中，人们相信物种是被上帝创造出来且不变的。实际上，科学革命的整个进程就是在自然哲学的各个领域人们基于科学的方法去打破来自宗教的思想禁锢的过程。当然，这种方法也被用到了包括社会科学在内的其它领域，下一小节我们也会介绍。在演化这个问题上，达尔文不是第一个提出类似思想的，但却是提出地最为彻底并且能让这个理论有效至今的。他在环球旅行中积累的很多见识对于他进行这个方面的深入思考是至关重要的。比如，在东太平洋的加拉帕戈斯群岛，他就发现近缘的多种雀鸟就因为生存环境的不同，嘴的形状存在巨大差异。再比如，基于他对南美山脉与珊瑚岛的观测，他完成了一系列关于地壳升降演化的著作。在地学领域，演化思想在十九世纪上半叶已经很流行了。这对于达尔文基于演化去理解生物现象，无疑是有正向的帮助的。

在演化的整体思想确立之后，其背后的基本运行机制就是最重要的问题。这里，达尔文于 1838 年在闲暇时间阅读的马尔萨斯 (Thomas Robert Malthus, 1766-1834 年) 的《人口论》(<An Essay on the Principle of Population>) 起到了关

键的作用。在《人口论》中，生存竞争被广泛用来描述人口的变化。达尔文将这种思想扩展至整个生物界，提出了“生物在生存斗争中适者生存、不适者被淘汰”的自然选择的机制来描述生物的演化。至此，这个极度深刻的理论背后简单的逻辑应该是清楚了。

3.4 科学革命的影响

文艺复兴与科学革命造成的一个最直接的结果是人的理性不再受到传统的宗教思想的束缚，得到了彻底的释放。与之伴随的，是科学思想的传播。科学的根基不再是权力的统治，而是理性。伴随着理性力量的释放，人类社会的发展也进入了一个明显的加速期。这种影响不限于西方社会，在世界各地都有类似效应。以我国为例，在我们的五四运动中，我们的先贤倡导的德先生、赛先生也是充分借鉴了西方社会在这个阶段的发展成果给出的我们的救国主张。因此，不夸张地说，科学革命的这个影响是世界范围的。

充分发挥理性思维的作用，透过现象看本质进而建立理论，并利用一些能够被观测的客观现象去验证此理论的有效性，成为了通用的科学研究方法。虽然在上一节我们对科学革命的介绍集中在物理、化学、生命科学三个领域，但科学革命对现代社会的影响是全方位的。在自然科学的其它领域，比如地学、医学，这种影响也随处可见。除此之外，科学的研究方法也深入到包含经济学在内的社会科学诸多领域。比如，在生理科学方面，哈维（William Harvey，1578–1657 年）关于心脏作用与血液循环的学说取代了古罗马的医学家盖伦（Claudius Galenus，129–216 年）的体液说被无数的实践活动所证实，成为生理科学与医学领域基础理论；在经济学领域，亚当·斯密（Adam Smith，1723–1790）的《国富论》（全程为《国民财富的性质和原因的研究》，<An Inquiry into the Nature and Causes of

the Wealth of Nations>) 也开创了古典经济学, 对很多国家的经济发展也起到了重要的推动作用。

这些典型的具有哲学性质的理论(反映的是深层次的智慧)是如此成功, 以至于就像我们在 1.2 节中利用图 1.2 介绍的那样, 很多时候人们甚至将科学与真理之间划上等号。人们也在很长时间内企图用科学的方法去统一哲学的研究。最后, 人们当然认识到哲学不能被科学取代¹⁵⁷。但科学, 还是与哲学、神学一起, 形成了我们认识世界的三大工具。而科学的精神, 也毫无疑问地渗透到我们现代生活的各个领域, 成为我们改善人类生活的最重要的工具。在这个过程中, 物理学不管是从哲学思想的指导、还是从实际成果对人类生活的影响的方面来讲, 都起到了引领的作用。笔者因为眼界的局限, 不可能对这样一个宏大的话题展开更多深入的讨论。但是作为一个从事物理学研究的学者, 笔者在介绍物理学的通识教材中写下这段话时, 是充满了对本专业的自豪感的。同时, 笔者也希望这份自豪感能够引起读者对物理学、对科学的兴趣。

¹⁵⁷这个也是经历了一个过程的。前面提到过, 近代哲学大致可分为以笛卡尔为代表的理性主义(唯理论)和以英国的两个培根、洛克、休谟为代表的经验主义(经验论)。科学产生后, 人们很长时间想把哲学做成科学, 这大大的挤压了形而上学(Metaphysics, 不能被证实或证伪)的空间。到了休谟那个时候, 他强调人们通过经验获得的知识只能描述过去, 无法描述未来。这也是我们常说的休谟把经验主义带入了死胡同。从康德开始, 人们又开始为形而上学寻求生存空间, 这种努力在黑格尔的时代(19 世纪上半叶)达到了巅峰。从这个意义上来理解, 科学革命甚至差点革了它的母体(哲学)的命。最后, 人们认识到了哲学无法被科学取代。在我们认识世界的过程中, 应该给哲学足够的独立空间!

第四章 经典物理学

在科学革命结束之后，我们的时间节点就来到了十九世纪末。如前一章的总结所述，这是一个物理学取得空前胜利的时代，也是一个科学取得空前胜利的时代。在力学、热学、光学、声学、电磁学等物理学主要领域，经典理论取得了如此大的成果，以至于 1900 年 4 月 27 日，开尔文爵士 (William Thomson, 1st Baron Kelvin, 1824–1907 年) 在英国皇家学会进行一个讲演的时候 (题目为: Nineteenth-Century Clouds over the Dynamical Theory of Heat and Light)，他将当时物理学的天空形容为晴空万里。当然，除了以太与比热两朵乌云。这两朵乌云最后导致了相对论与量子力学的诞生，也诱发了二十世纪初的物理学革命。

在本章，我们先将讨论的时间节点固定在这个世纪交替的季节之前，系统回顾一下从十六世纪初开始，到十九世纪末物理学取得的成就。考虑到这些理论的发展整体而言是有一个时间顺序的 (大致如图 4.1 所示)，参考这个顺序，我们的讨论将分：经典的力学理论、经典的热学&热力学&统计力学理论、经典的光学理论、经典的声学理论、经典的电磁学与电动力学理论，共五节来展开。当然，物理学是一门基于实验的学科，虽然每节都会以理论总结为主，理论发展过程中关键的实验进展我们也尽量不放过。

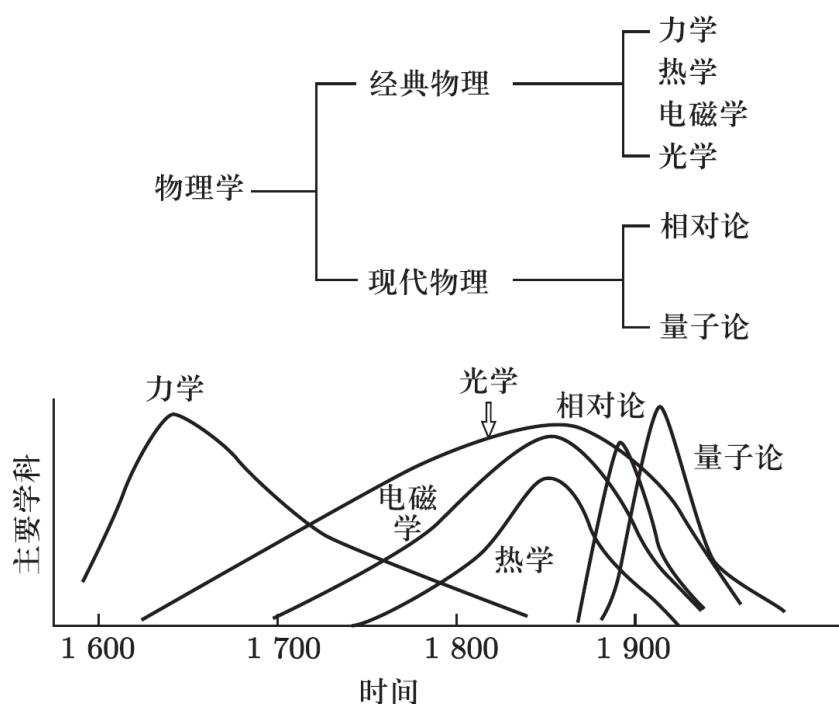


图 4.1 物理学中各主要理论分支发展的时间顺序示意图，本图摘自张酊老师在北京大学出版社出版的《漫步物理世界》【张酊，2021】。

4.1 经典的力学理论

我们先从力学（mechanics）讲起，它是物理学中历史最为悠久的一个分支，主要研究内容包括力、能量，以及它们与物体的平衡、变形或运动的关系。Mechanics 的词根是希腊语的 *mēchanē*，对应现代英语的 *machine*，本意是机械。我们可以想象在古希腊、古罗马时期，人们最早对这类现象的研究一定关于机械相关¹⁵⁸。

后来，随着物理学的发展，在力学研究中，人们的思考会侧重于不同的方面。这些方面会对应不同的单词，比如 *statics*（静力学）、*kinetics*（动力学）、*kinematics*（运动学）。他们的区别大致可归纳为：静力学研究物体在力的作用下的平衡关

¹⁵⁸这个跟我们的墨家很像。

系；动力学研究物体在力的作用下运动状态的改变；运动学只描述的运动状态及其改变，不涉及其原因。这个是历史上最早的划分。后来，人们也会把 statics 与 kinetic 合写为 dynamics，我们也翻译为动力学，其背后，有一点运动是绝对的意思（静止是相对的，实际上也在运动）。换句话说，dynamics 描述的就是物体在力在作用下的运动，而不仅仅是运动状态的改变。另外，在化学上人们还常用 kinetics（比如 chemical kinetics），这个多集中在化学反应动力学领域，人们用 reaction kinetics 这个词来特指针对反应速率的研究¹⁵⁹。

除了这些 mechanics 这个词的划分，针对具体的力学问题，还有天体力学（celestial mechanics）、应用力学（applied mechanics）、连续力学（continuum mechanics）、统计力学（statistical mechanics），它们都特指一定的学科领域，用的是力学的总称（mechanics）。此外，分析力学（analytical mechanics）、流体力学（fluid mechanics），这个更像是力学中具体的基础课程。总结起来，力学这个词是有多个不同的含义，我们在使用时一定要明确其具体指代。关于这一点，我们在第八章讲到量子力学的时候，还会再次强调。

在本节讨论中，我们说的是力学是经典力学（classical mechanics）。具体讨论，会按：牛顿力学的时空观、牛顿三大定律及其各种推论、万有引力定律、牛顿之后经典力学的进一步发展及其对自然哲学的影响共四小节来展开。

4.1.1 牛顿力学的时空观

在物理学研究中，空间（国际单位制中基本单位为米，下面括号中也使用国际单位制）、时间（秒）都是最基本的物理量。此外，还有质量（千克）、电流（安

¹⁵⁹ 笔者在研究中有一个体会是化学的如果用一个源自物理的理论去描述化学现象或过程，他们往往会比物理学家更尊重传统，更原教义。

培，简称安)、热力学温度(开尔文，简称开)、物质的量(摩尔，简称摩)、发光强度(坎德拉，简称坎)，一共七个。括号中是这七个量的基本单位，其它任何物理量都可通过这七个量组合得到，相应的单位也就不是基本单位了。在这些量中，与早期力学研究相关的是空间、时间、质量。后面的一些量在经典物理学的框架中，也会通过某种组合产生力。比如，电流乘上时间，给出电荷，电荷又通过库仑作用给出力。但这种力所产生的影响仍然可以被经典力学的理论框架描述。本节，我们针对经典力学的讨论仅从空间、时间、质量三个量开始说起。

应该说，这三个量与我们的感官感知都具有比较强的联系，比如空间大小、时间长短、以及一个物体的质量大小。在物理学建立的过程中，将这些能够被感官直接感知的东西进行抽象化，进而以理性为武器对其进行描述，实际上是最关键的一步。换句话说，就是发现存在与被感知之间的关系，并将其定量化。经典力学是近代物理学最早诞生的分支，或许也与这些量相对比较容易感知有关。

先说空间，它反映的是物质运动的广延性和伸张性。数学上最简单的空间是一维、二维、三维的欧氏空间，这些概念早在《几何原本》中就有。后来，人们可以把它推广到有限维的情况，并用实内积空间的语言来对其进行详细的描述¹⁶⁰。到了十九世纪中后期，人们开始意识到曲面的重要性，也将欧氏几何推广至非欧几何的情况。这样，空间的定义就有进一步的扩展。量子力学发展起来后，人们在描述量子态的时候，又开始使用希尔伯特空间这样一个概念。不管哪个，空间的广延性都是内在的。在经典力学的理论体系中，空间就是简单的三维欧氏空间。

¹⁶⁰这里可以体现出物理与数学的一些思维习惯的区别与客观上存在的一点联系。物理习惯于把人们能够感知的客观存在抽象化，借助数学的手段描述。而数学习惯于在此基础上把这种抽象出来的东西在理性的层面做得更加普适。有趣的是，有时这些被普适化的东西虽然早期并不对应人们能感知的客观存在，但随着物理学的发展，会被人们逐渐感知。

它与时间之间无耦合。目前，人们使用的标准长度单位（1 米），是 1983 年第 17 届国际计量大会定义的光在真空中运动 $1/299792458$ 秒所经历的路程。

之后是时间，它描述的是物体运动的持续性以及顺序。它可以采用周期性的运动来进行计量。最传统的钟表借助的是类似钟摆这种机械运动，整体精度较差。在一些高精度计时被需要的场合，比如 GPS（全球定位系统，Global Positioning System）的卫星上，由于其相对高速的运动，需要对其时间针对一个绝对时间进行校准，人们往往会借助于原子钟技术来完成这项工作。目前，人们使用的标准时间单位（1 秒）是铯-133 原子基态的两个超精细能级之间跃迁所对应的辐射周期时长的 9192631770 倍。

空间与时间之后是质量，它在《自然哲学的数学原理》一书中它被定义为物质的量，具体意义是：物质的量度，可以由其密度和体积共同求出。在十九世纪初，原子论发展过程中物质的量又被定义为另外一个物理量（单位是摩尔），但是在《原理》产生的年代，这个表述是不会产生歧义的。现在，人们一般会通过这样的定义来描述它：物体所具有的一种物理属性，是物质的惯性大小的量度（也就是在一个特定的总体力的作用下物质速度改变的难易程度的量度），它是一个正的标量。这个定义，就与它在牛顿力学中的意义有了更的严格对应¹⁶¹。

质量的单位是千克。早年，多借助某物质来定义。比如，法国在 1795 年 4 月 7 日颁布了关于度量衡的法律，其中规定千克为“在冰融化时的温度下，体积等于边长为一分米的立方体的水的绝对重量”。之后，根据这个标准对应的温度又被调整为 4 摄氏度。冰的切割工艺很难统一，于是从 1889 年起，国际单位制又

¹⁶¹当然，后来质能方程告诉我们质量与能量之间可以相互转换，但就质量本身的定义，人们还是应该从惯量的量度这个角度来理解。

将千克的大小定义为跟国际千克原器（International Prototype of the Kilogram，简称 IPK）的质量。IPK 由一种铂合金制成，这种合金由 90% 的铂和 10% 的铱按质量比制成，然后用机器造成 39.17mm 的直立圆柱体（它的高度等于直径），这样做的目的是把表面积减至最低，进而让氧化对这个单位标度的影响最小化。但随着时间的推移，即使这两种金属的惰性都很强，但此实物原器的质量也会发生变化。

为了克服这个问题，2011 年，国际计量大会以全体代表一致赞成的票数，同意根据一个物理常数来重新定义千克进而与实物剥离。2018 年 11 月 16 日国际计量大会全体会议通过决议，改用以普朗克常数为基础的公式作为“千克”的新定义：将普朗克常数定为 $6.62607015 \times 10^{-34} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ ，此定义于 2019 年 5 月 20 日生效。根据此定义，结合一种叫做基布尔秤（也称瓦特秤）的科学仪器¹⁶²，人们就可以对千克给出一个精确的标度了。当然，本段后部分讨论中的考虑在《原理》撰写的时候都是不重要的。这里只是为了给读者尽量全面的介绍物理学，给出的一些扩充的讨论。

有了这些基本单位，我们就可以开始描述一个物体在时空中的运动了。在经典力学的时空观中，空间是三维的欧氏空间，时间是与其垂直的一个轴，时间与空间之间是相互独立的。物体的空间坐标由某参考系确定，如此参考系进行的是匀速直线运动，则其为惯性系。如果它进行的是加速运动，则称之为非惯性系。

¹⁶²在由此仪器进行操作来定义质量的过程中，测量结果仅仅依赖于普朗克常数与元电荷电量这两个自然常数。在测量过程中，人们可以最后一次使用国际千克原器（IPK）来测量普朗克常数。然后把这个普朗克常数固定下来。这样，以后对质量的定义就不会受到国际千克原器本身质量随时间变化的影响了。此定义方法参考了人们利用量子霍尔效应对电阻（欧姆）进行定义以及利用约瑟夫森效应对电压（伏特）进行定义的想法，即脱离实物。应该说，能够对一些基本的物理量进行定义，也是这两个效应的发现者冯·克里钦（Klaus von Klitzing, 1943–now）和约瑟夫森（Brian D. Josephson, 1940–now）分别被授予诺贝尔物理奖的重要原因。

因为伽利略曾经在一个匀速行驶的船舱中观察过力学现象, 并发现这个现象与他在“静止”的陆地上观察到的现象完全一致, 人们把这种不变性称为伽利略相对性原理。准确的说, 就是: 一切彼此做匀速直线运动的惯性系对于描述机械运动的力学规律而言, 都是完全等价的。牛顿力学尊重这种不变性。与之伴随的一个逻辑上的难题, 就是要有一个绝对时空的存在¹⁶³。

在经典力学取得成功的年代, 这并不带来本质的问题, 直到迈克尔逊-莫雷实验的出现。由此实验观测作为基础, 洛仑兹、爱因斯坦、庞加莱、闵可夫斯基等人对绝对时空的概念进行了修正, 进而带来了相对论力学的诞生。这都是后话, 在本章范围内, 伽利略的相对性原理、牛顿运动规律、经典时空观是可以和谐、统一地存在地。

4.1.2 牛顿三大定律及其各种推论

在 3.3.6 节, 我们介绍过, 在上面讨论的时空中定义完了质量、动量等关键量之后, 牛顿引入了三大定律:

1. 牛顿第一运动定律 (惯性定律): 每个物体都保持其静止或匀速直线运动的状态, 除非有外力作用于它迫使它改变那个状态;
2. 牛顿第二运动定律 (运动方程): 运动的变化正比于外力, 变化的方向沿外力作用的直线方向;
3. 牛顿第三运动定律 (作用力与反作用力定律): 每一种作用都有一个相等的反作用; 或者说, 两个物体间的相互作用总是相等的, 而且指向相反。

之后, 他基于这三定律推出了一个完整的力学理论体系。在这个力学理论体系中, 解析结合、微积分等数学工具得到了充分的应用。很多不同受力条件下一个物体

¹⁶³ 这个在 8.5 节我们会详细介绍。

会按什么样的轨迹运动这样一个问题得到了系统的讨论。与之伴随，也产生了很多定理。这些定理在当时具有重要的科学价值，因为它们可以把让牛顿力学的结果通过几何的方式在实际体系中得到更充分的验证。

4.1.3 万有引力定律

在由三大定律推出的一系列结果中，万有引力定律的地位很特殊。它是通过对比开普勒的天文观测确定的定律，不是这个理论体系的假设。在很多介绍经典力学的材料中，人们把它与三大定律放在一起讲，进而推出牛顿的力学理论。从其科学属性及其逻辑地位的角度来说，这是不对的。它明显既与牛顿力学中的其它定理不同，也与三大定律不同。为了更为详细地描述这个逻辑过程，我们参考知乎上“姜小白 71”与“南部”两位网友提供的材料，给出下面的描述。

先回顾一下开普勒三定律：

1. 轨道定律：太阳系中所有的行星分别在大小不同的椭圆轨道上围绕太阳运动，太阳位于这些轨道的一个焦点上；
2. 面积速度定律：行星围绕太阳运动时，每一行星和太阳中心的连线在相等的时间扫过相等的面积；
3. 周期定律：太阳系各行星绕太阳运动时，周期的二次方和行星轨道半长轴的三次方成正比。

之后，我们取一个由行星轨道与太阳构成的平面。开普勒第一定律（轨道定律）告诉我们太阳处在行星轨道的焦点上。这样，人们就能以太阳为中心（这个有足够的理由，因为太阳的质量远远大于行星的质量），用极坐标来描述行星的运动（图 4.2）。

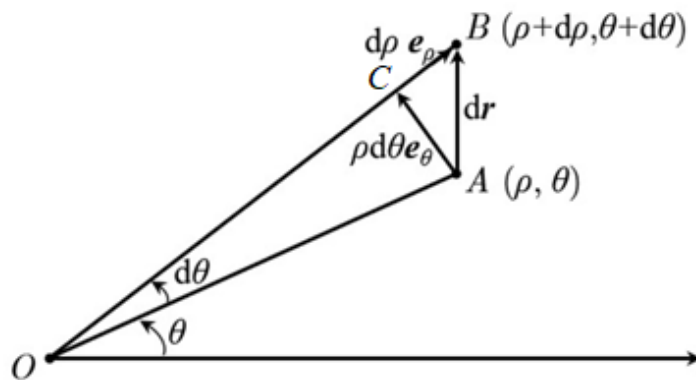


图 4.2 极坐标下行星的运动。这里，行星被当作一个质点来处理。 t 时刻处在 A 点， $t + dt$ 时刻处在 B 点。根据牛顿三大运动定律的要求，人们就可以求出这个行星在某种力 F 下运动轨迹。为了使这个轨迹符合开普勒三大定律的要求，人们可以推出这个力是向心力（轨道定律、面积速度定律），同时力的大小反比于距离平方（周期定律）。这样，牛顿就成功地将三大定律+万有引力定律用到了行星轨道的描述中。而万有引力定律也适用于其它有质量的物体，可以被用来描述苹果为什么落地、地球上物体的抛物线等问题。也就是说，一个牛顿力学，解释了天上与地上的物体可以按统一规律进行运动，充分地展示了科学的力量。

在这个极坐标下，我们可以选择一组正交归一的基 $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta)$ 来描述质点的运动。其中， $\mathbf{e}_\rho$ 沿径向， $\mathbf{e}_\theta$ 沿运动方向与之垂直。这样的话，在 dt 的时间间隔以内，行星运动的矢量是：

$$d\mathbf{r} = d\rho \mathbf{e}_\rho + \rho d\theta \mathbf{e}_\theta$$

公式 4.1

与之相应，速度可表述为：

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \rho \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta$$

公式 4.2

如果再将速度做一次对时间的微分，考虑到这组基也会随时间如图 4.3 所示按下式变化：

$$\dot{\mathbf{e}}_\rho = \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta$$

$$\dot{\mathbf{e}}_\theta = -\dot{\theta} \mathbf{e}_\rho$$

公式 4.3

那么加速度很自然地就等于：

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}} &= \ddot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \dot{\rho} \dot{\mathbf{e}}_\rho + \dot{\rho} \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + \rho \ddot{\theta} \mathbf{e}_\theta + \rho \dot{\theta} \dot{\mathbf{e}}_\theta \\ &= \ddot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \dot{\rho} \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + \dot{\rho} \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + \rho \ddot{\theta} \mathbf{e}_\theta + \rho \dot{\theta} (-\dot{\theta} \mathbf{e}_\rho) \\ &= (\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) \mathbf{e}_\rho + (2\dot{\rho} \dot{\theta} + \rho \ddot{\theta}) \mathbf{e}_\theta \end{aligned}$$

公式 4.4

换句话说，加速度有两个方向。一个是沿着 $\mathbf{e}_\rho$ 方向，分量大小为 $\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2$ ；另一个为沿着 $\mathbf{e}_\theta$ 方向，分量大小为 $2\dot{\rho} \dot{\theta} + \rho \ddot{\theta}$ ，它满足：

$$2\dot{\rho} \dot{\theta} + \rho \ddot{\theta} = \frac{1}{\rho} \frac{d(\rho^2 \dot{\theta})}{dt}$$

公式 4.5

其中， $\rho^2 \dot{\theta}$ 恰恰是图 4.2 所示的三角形 OAC 的面积的两倍。行星在单位时间内扫过的面积 OAB 在微分的一阶近似下，是等于三角形 OAC 的面积。这样的话，利用开普勒第二定律（面积定律，对某个行星， $\rho^2 \dot{\theta}$ 是个常数），我们就知道这个行星运动的加速度在 $\mathbf{e}_\theta$ 方向的分量为零。而运动的行星质量是一定的，那么它在 $\mathbf{e}_\theta$ 方向的受力也为零。换句话说，太阳与行星之间的力必为有心力！

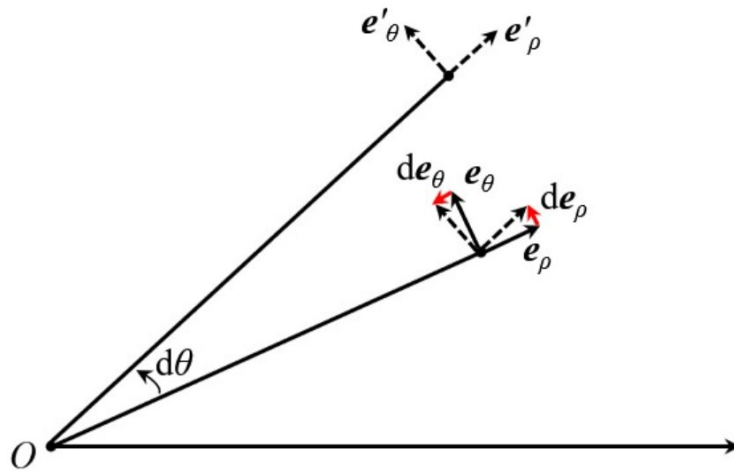


图 4.3 极坐标的基随时间的变化示意图。

之后，我们就需要利用加速度的径向分量 $\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2$ 来理解这个径向力到底是个什么样子？其对应的牛顿方程为：

$$F = m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)$$

公式 4.6

这个公式中，牵扯到两个自由度 ρ 与 θ 。它描述的是在一个特定的 $F(t)$ 下， ρ 、 θ 与 t 的关系。而开普勒定律描述的是轨道形状，也就是 ρ 与 θ 之间的关系。实际上，多数天文观测给出的也是这个信息。为了让推导万有引力定律的过程看起来更直接¹⁶⁴，我们这里的介绍借助 19 世纪初由法国数学家、天文学家比奈（Jacques Philippe Marie Binet, 1786–1856 年）提出的 Binet 方程来进行。借助 Binet 方程，结合开普勒定律，我们将展示万有引力定律中最关键的引力的距离平方反比关系。

这里，人们可以定义一个 u 来替换 ρ 这个自由度，它们两者关系是：

$$u = 1/\rho$$

公式 4.7

¹⁶⁴ 《原理》一书的推导过于晦涩，我们不采用。

通过公式 4.5，我们知道下面这个量：

$$h = \rho^2 \dot{\theta}$$

公式 4.8

在行星运动过程中是个守恒量。由公式 4.7、4.8，可知：

$$\dot{\theta} = hu^2$$

公式 4.9

这时，我们可以基于图 4.2 中从 A 往 B 运动的这个短暂的过程来分析各变量之间的关系，进而把公式 4.6 中的几个关键量用 u 和 θ 来表达。具体如下：

$$\dot{\rho} = \frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \frac{d\rho}{d\theta} = \dot{\theta} \frac{d(1/u)}{d\theta} = -\dot{\theta} \frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta} = -h \frac{du}{d\theta}$$

公式 4.10

进而：

$$\ddot{\rho} = \frac{d\dot{\rho}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -h \frac{d^2u}{d\theta^2} \dot{\theta} = -h^2 u^2 \frac{d^2u}{d\theta^2}$$

公式 4.11

把公式 4.10 与公式 4.11 代入公式 4.6，我们就可以得到：

$$F = -mh^2 u^2 \left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u \right)$$

公式 4.12

这就是著名的 Binet 方程。它用一种直接的方式，给出了行星轨道形状与其所受向心力之间的关系。

这个时候，我们需要做的就是将开普勒第一、第三定律利用起来（第二定律在推出相互作用是有心力时已经用到）。其中，第一定律告诉的是行星的轨道是个椭圆，太阳在一个焦点上。这意味着在极坐标下，轨道可表述为：

$$\rho = \frac{b^2}{a + c \cdot \cos\theta}$$

公式 4.13

其中， a 、 b 、 c 分别为椭圆的半长轴、半短轴、半焦距长度。由它，我们很自然地通过公式 4.7 得到：

$$u = \frac{a}{b^2} + \frac{c}{b^2} \cos \theta$$

公式 4.14

这个式子代入公式 4.12，我们就有：

$$\begin{aligned} F &= -mh^2 u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) = -mh^2 u^2 \left[\frac{a}{b^2} + \frac{c}{b^2} (\cos \theta - \cos \theta) \right] = -mh^2 \frac{a}{b^2} u^2 \\ &= -mh^2 \frac{a}{b^2} \frac{1}{\rho^2} \end{aligned}$$

公式 4.15

因此，这是一个大小与距离成反比的向心力。

而对这个椭圆来说，面积速度 $\frac{1}{2}\rho^2\dot{\theta}$ 乘上周期 T 是等于椭圆面积 πab 的。因此，继续有：

$$\frac{1}{2}\rho^2\dot{\theta}T = \frac{1}{2}hT = \pi ab$$

公式 4.16

进而公式 4.15 继续等于：

$$F = -mh^2 \frac{a}{b^2} \frac{1}{\rho^2} = -m \left(\frac{2\pi ab}{T} \right)^2 \frac{a}{b^2} \frac{1}{\rho^2} = -\frac{4\pi^2 ma^3}{T^2} \frac{1}{\rho^2}$$

公式 4.17

如果我们假设太阳系的所有行星与太阳相互作用的力的性质是一样的话，那么平方反比前面那个系数应该一样，这也就解释了开普勒第三定律的观测，也就是行星的周期的二次方和行星轨道半长轴的三次方成正比。

至此，牛顿力学的整体理论框架基本建立。尚缺失的一点是公式 4.17 平方反

比前面那个系数和太阳质量还有关。同时，如果假设这个引力适用于所有带质量的物体，比如地球对地球上实物的吸引（比如传说中的苹果落地），这个系数还可以写成两个物体质量乘积再乘上一个普适系数的形式。这个普适系数在牛顿力学提出大约 100 年后（1798 年 5 月）由卡文迪许（Henry Cavendish, 1731–1810 年）测定。我们在这里分享这些内容，包含了一定的数学推导，不包含很多可以用考试的形式来验证学生理解的细节，主要目的是为了让读者从与应试教育不同的角度，去理解这个历史进步背后的数理逻辑。

4.1.4 牛顿之后经典力学的进一步发展及其对自然哲学的影响

牛顿力学的诞生，让人们对外观的自然世界的认识产生了翻天覆地的变化。人们认识到上到天体下到地面上的物质的运动可以用一个统一的、可使用定量的规律来验证的科学理论来描述。自然哲学，也完成了向自然科学转化的最为关键的一步。

这种影响是超出物理学界、科学界的。很多人认为人们可以基于牛顿力学去理解世间万物的，与之相应的思想是机械论。这种思想的哲学根基来自更早一些的霍布斯（Thomas Hobbes, 1588–1679 年），它在牛顿力学中得到了很好的体现。启蒙运动中，以伏尔泰为代表的很多关键人物都受到了来自邻国的这种先进思想的影响。当然，本部分的讨论仅仅限于经典力学理论发展的范畴。我们将按时间顺序，挑出丹尼尔·伯努利（Daniel Bernoulli, 1700–1782）、欧拉（Leonhard Euler, 1707–1783）、拉格朗日（Joseph-Louis Lagrange, 1736–1813）、拉普拉斯（Pierre-Simon Laplace, 1749–1827）、哈密顿（William Rowan Hamilton, 1805–1865）几个代表人物，简要概括几个关键进展。最后，将落脚点放在力学理论在热学相关现

象的研究中，为下一节的讨论奠定基础。

我们先看丹尼尔·伯努利。他是伯努利家族产生的第三位杰出的数学家，前面是他的父亲约翰 I·伯努利以及伯父雅可比 I·伯努利。前面提到过，雅可比 I·伯努利是莱布尼茨的学生，也是他忠实的信徒。他又带出了自己的弟弟约翰一世·伯努利。两人是如此的优秀以至于他们后来长期处在一种紧张的竞争关系中。在雅可比 I·伯努利去世后，约翰 I·伯努利的竞争对手又变成了我们这里要提到的他的儿子丹尼尔·伯努利。

丹尼尔最大的一个贡献就是将牛顿力学的基本原理应用于流体系统，在 38 岁时写出了《流体动力学》(<Hydrodynamics>)。其中的伯努利原理，现在用方程的形式表述如下¹⁶⁵:

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + P + \rho gh = \text{constant}$$

公式 4.18

这里， ρ 是流体局域密度、 v 是局域速度、 P 是局域压强。它用最美妙的方式为与诸多与现代生活息息相关的力学现象提供了简洁的解释，成为相关应用（比如多种飞行器，如图 4.4 所示）的基础。

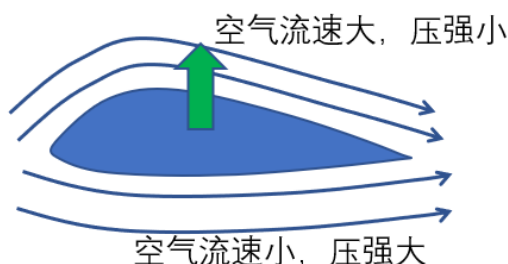


图 4.4 机翼原理示意图。上部空气流速大，相应的压强小一些；下部空气流速小，相应的

¹⁶⁵伯努利说明了流速大的时候压强会相对减小。而我们熟知的这个方程，则据说是由丹尼尔的好朋友欧拉于 1752 年推出。

压强大一些。这样，就可以产生一个如绿色箭头所示的有效提升力。

丹尼尔比欧拉略大几岁，也是欧拉在其 20 岁左右就能在圣彼得堡的俄罗斯皇家科学院获得重要职位的主要推荐人。在圣彼得堡，欧拉成长为一代数学大师¹⁶⁶。之后，他又在普鲁士国王腓特烈的邀请下来到柏林科学院工作。他一生对数学、力学的发展做出了极其重要的贡献。就数学中的微积分而言，他们这几代人的集体贡献是让其成熟，而欧拉无疑是其中贡献最为突出的一个。他使用分析、几何、变分的概念，大大扩展了微积分方法的应用范围。

力学中，他将针对质点的研究扩展至质点组以及刚体系统，引入的欧拉角至今仍是描述转动的重要工具。变分方法的引入更是为经典力学向分析力学的过渡提供了最基础的数学工具。欧拉在数论的成就笔者因为专业所限无从感受，刚体转动大家在常规力学教材中都能接触到，分析与变分方法的最终的受益者是其学生拉格朗日（下一段我们会专门介绍），欧拉这里我们就把落脚点放在一个大家都很熟悉的概念（虚数）上，从中感受他作为数学大师的贡献。

实际上，早在近代的力学发展之前（也就是伽利略、笛卡尔之前），人们在研究一元三次、四次方程的根式解的时候，就引入了根号下负一这样一个量。一般群论课程中，讲课的老师都会提这段历史，代表著作是 1545 年意大利数学家卡丹（Girolamo Cardano, 1501-1576 年）的《大术》（<Ars Magna>）。但这个数和人们之前接触的数完全不一样，太反常识了。因此，人们能避免就避免。1637

¹⁶⁶俄罗斯的数学传统和欧拉以及伯努利家族都有很大的关系。在俄罗斯，有个圣彼得堡学派，这个就是他们带出来的。得益于这种传承的在后世的代表人物包括：我们讲非欧几何时总会提到的罗巴切夫斯基（Nikolai Lobachevsky, 1792-1856）、后来被成为俄罗斯现代数学奠基人的切比雪夫（Pafnuty Chebyshev, 1821-1894）、以及在微分方程稳定理论方面有重要贡献的李亚普洛夫（Aleksandr Lyapunov, 1857-1918）。

年，笛卡尔甚至直接把 $\sqrt{-1}$ 命名为“虚数”(imaginary number)。与之对应的名词是“实数”(real number)。笛卡尔针对其的否定情绪，应该说是一目了然的。之后，欧拉接受了这个数的存在，并引入“i”来标识这个数。高斯(Carl Friedrich Gauss, 1777-1855)更是引入了复数的概念，并使用标识实数与虚数的两个轴来表示这个复数。至此，虚数与复数才被世人广泛接受。我们从这个故事中这些大师的贡献，也可以体会其学术地位与眼界。

欧拉之后是他的学生拉格朗日(Joseph-Louis Lagrange, 1736-1813)，他是彻底建立分析力学的人¹⁶⁷。在分析力学中，人们不再像牛顿力学那样利用位置、速度这样的矢量来描述物体的运动，而是借助于作用量这样一个标量来描述这种规律，这个作用量是物体的运动轨迹这个函数的泛函(输入是一个函数，输出是一个数)。这样，人们就可以通过变分，基于“物体的运动轨迹是作用量取最小值时的轨迹”这个所谓的最小作用量原理，来得到这条轨迹，进而获取物体的运动规律了。基于作用量获得的轨迹与牛顿方程给出的是等价的。但变分、最小作用量原理、拉格朗日量这些概念的引入，赋予了分析力学更深刻的物理内涵。因此，此方法后来又渗透到了力学的各个领域，包括后期的量子力学、场论方法。

比拉格朗日稍微小十多岁，还有一个极具影响力的法国数学家、物理学家、天文学家，叫拉普拉斯(Pierre-Simon Laplace, 1749-1827年)。他是另外一位数学与力学大家达朗贝尔(Jean-Baptiste le Rond d'Alembert, 1717-1783年)的学生。拉普拉斯的一个重要的贡献是将牛顿之后发展了将近100年的分析的数学工具系统性的引入了天文学的研究当作，完成了一步巨著《天体力学》(< Celestial

¹⁶⁷ 严格意义上分析力学有拉格朗日力学、哈密顿力学，拉格朗日建立的是拉格朗日力学。

Mechanics)>)。在天体力学这部巨著中，他利用分析的手段，将关注点从力移至能量，系统地研究了太阳系的稳定性问题。他也系统性的研究了星体运动中的三个星体间的相互作用问题，提出了摄动理论¹⁶⁸，这对于后期人们发现海王星的发现过程中起到了决定性的作用¹⁶⁹。这个《天体力学》是如此完美地利用了科学的手段解释了当时人们已知的宇宙，以至于当时已经称帝的拿破仑问拉普拉斯在这个理论中上帝处在什么样的位置的时候¹⁷⁰，拉普拉斯简单的答道：我不需要这样的假设。

前面提到的这些学者都来自于欧洲大陆，特别是法国。背后的原因，有人认为是牛顿的强势，使得他本人并没有特别掌握的微积分方法的另外一种表述（莱布尼茨的表述）在英伦三岛没能普及。而基于这种表述去发展此方法是更有前途的。与之相应，莱布尼茨之后伯努利家族的传帮带作用催生出一系列法国的数学

¹⁶⁸这个摄动理论研究的问题虽然也有三个星体，但并不是我们现在说的三体问题。它处理的问题是一个恒星、两个行星。我们可以把恒星与一个行星间的相互作用当作主要相互作用。再把另一个行星当作微扰。因此，这个理论叫摄动理论。现在人们说的三体问题，往往是两个恒星，一个行星。这个问题与前一个的区别是这里没法把哪个相互作用当作微扰。因为行星与两个恒星的相互作用在大小上是可以比拟的。类似问题的研究要等到19世纪末的庞加莱（Henri Poincaré, 1854-1912年），与之相关的一个现象叫混沌。也就是一个物理问题因为多体特征，没法用微扰展开的方式来处理时，计算结果对初始条件会非常敏感地存在依赖关系。这个现象最早是庞加莱在19世纪末注意到的。到了20世纪中期，当计算作为一个重要手段进入物理学研究之后，人们发现同样的设置当运行在不同的时刻中断时，重新开始后计算机会给出不同的模拟结果。后来，人们发现原因是每次停机会损失一些小数点后很多位的精度。而最终模拟结果对初始条件有高精度的依赖。20世纪末，混沌又一度成为物理学研究的热点。这些问题，虽然听起来不一样，但应该说本质上都是存在一定联系的。

¹⁶⁹具体而言，就是在1844和1846年，英国天文学家亚当斯（John Couch Adams, 1819-1892）和法国天文学家勒威耶（Urbain Jean Joseph Le Verrier, 1811-1877）分别独立地使用天体力学理论预测出一个尚未发现的行星（即海王星）。1846年9月，德国天文学家加勒（Johann Gottfried Galle, 1812-1910）在勒威耶理论预测的位置附近发现了这颗行星。

¹⁷⁰在拿破仑还是一个学生的时候，参加一个考试，拉普拉斯是考官。后来他们之间也存在一定的私人友谊。

大师。实际上，牛顿之后，从理论物理的角度，英伦三岛下一个大师的诞生或许就得等到托马斯·杨（Thomas Young, 1773–1829 年）了，而杨在年轻的时候也是曾到欧洲大陆进行学习的¹⁷¹。从托马斯·杨开始，英伦三岛又回到了中心舞台，在理论力学领域，一个代表人物就是哈密顿（William Rowan Hamilton, 1805–1865 年）。他引入了相空间的概念，建立了哈密顿力学。这个概念对于力学从理论力学向统计力学、量子力学的发展，是至关重要的。后面在讲量子力学的时候，我们会反复提到哈密顿量。就是这种影响的一个直接体现。

读到这里，如果我们的读者留意的话，应该可以注意到从欧拉开始我们就引入了一个很重要的东西，叫变分。变分的对象往往是能量或者作用量这些标量。基于变分原理，人们可以推出拉格朗日力学，也可以从能量角度去研究太阳系中各行星轨道的稳定性。其中，拉格朗日力学是分析力学的一种形式。在拉格朗日之后，哈密顿又创造了一种分析力学的另外一种形式—哈密顿力学。他们的共同点，都是从力这个概念跳出来，从能量或作用量的角度去理解客观世界，进而使得物理学能够用更为美妙的数学语言来描述。与之相应，当物理学向下一步发展的时候，这些理论的优势也就会得到更加充分的体现。其中，热学、热力学与统计力学应该说是在经典力学到量子力学理论的发展过程中起到了桥梁的作用，因此我们接下来针对它们进行讲解。

4.2 经典的热学、热力学与统计力学理论

关于热，我们首先需要注意的是人们对热学现象的关注甚至要早于力学现象。

¹⁷¹虽然当时学的是医学，在德国的哥廷根大学，时间是 18 世纪末。哥廷根大学进入鼎盛，是从 19 世纪开始的。托马斯·杨是一个典型的 polymath（或许应该翻译为博学者），他的研究覆盖了自然哲学的诸多领域。

一个重要原因，是这类现象与人类的生活密切相关。毕竟，火的使用就像直立行走与制造工具那样是区分人类与其他生物的重要标志。比如，在神话故事这个阶段，我们中国就有燧人氏钻木取火的传说，在古希腊也有普罗米修斯盗火的神话。

我们人类的祖先在不断地接触与火相关的热现象的过程中，也认识到了一些经验和规律。在先秦的古书《考工记》中，就有利用火焰的颜色（暗红色、橙色、黄色等）来判断火焰的温度的记录¹⁷²。在西方，亚历山大图书馆的希罗（Heron of Alexandria，有时也被叫做 Hero of Alexandria，~10–70AD）也向人们演示过空气的热胀冷缩的现象，并利用这种现象发明了汽转球（应该是蒸汽机最早的雏形）。但这些记载，整体还是停留在现象与规律的简单认识层面，离现代物理学很远¹⁷³。

4.2.1 从伽利略到克拉帕隆

和前面介绍的关于力学的研究一样，第一个把这些关于热的现象与规律的研究上升到近代物理学（或者说科学）的高度的人，也是伽利略。他是被牛顿与爱因斯坦公认的科学第一人。伽利略发明了热学研究中最重要的一個仪器，温度计。利用它，人们可以对一个物体的冷热程度来进行测量。

现在，我们把温度当成热学中第一个态函数来对待，并利用热平衡定律这种总结出来的经验定律来规定两个处于热平衡态的物质具有相同的温度¹⁷⁴，进而基于其描述其它热学性质的。这个热平衡定律被称为热力学第零定律。从逻辑上

¹⁷²理解这个规律，需要用到我们后面要讲的黑体辐射，这是十九世纪末、二十世纪初的事情。但最早类似现象的记录这是就已存在。

¹⁷³本节开头的一些内容，借鉴了中国科学院物理研究所的杨义峰研究员在网上的一篇文章《如汤探冷热——热的历史与热力学第零定律》。

¹⁷⁴热平衡定律的简单表述就是如果物体 A 分别与物体 B 和物体 C 处于热平衡，那么让 B 和 C 接触，它们也必将处于热平衡。处于热平衡的物体具有相同的温度。

它是热学理论的基础,意味着互为热平衡的物体必然存在一个属于物体本身的内在性质的物理量,这个物理量是温度,它是描述一切热现象的基础。但从时间顺序上,它正式地以定律的形式提出的时间节点,反而晚于热力学的其它三大定律¹⁷⁵。下面,我们将按历史的顺序(一、二、三、零)来介绍这些关键的进展。

我们从伽利略讲起。据说,他在 1603 年或之前发明了第一个温度计。这个温度计的关键组件是一个中空的玻璃球和一个长的管子(如图 4.5 所示)。玻璃球可以先用手捂热。然后,把管子放在一个水杯里面。因为在一个特定的压强下(大气压),对于理想气体,温度与体积成反比(这个实际上是在伽利略之后发现的查理定律)。因此,当玻璃球的温度降下来的时候,密闭部分气体的体积减小,水平面就会上升。这样的话,随着外界温度的变化,我们就会看到一个水平面会随之变化的定量的规律。管子上面有刻度,反映外界温度的变化。这对于热学研究,是一个从定性到定量的飞跃。

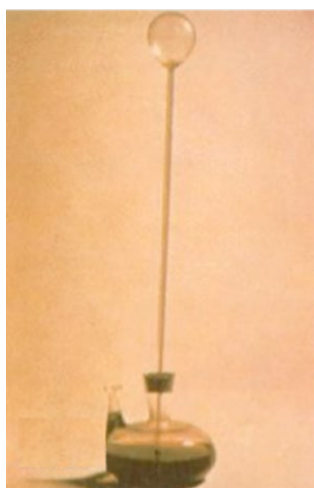


图 4.5 伽利略的温度计示意图

¹⁷⁵ 第零定律比起其他任何定律更为基本,但直到二十世纪三十年代前一直人们都未有察觉到需要把这种现象以定律的形式表达。历史上,第零定律是由英国物理学家福勒(Ralph Howard Fowler, 1889-1944, 他也是狄拉克和王竹溪先生的博士导师)于 1939 年正式提出,比热力学第一定律和热力学第二定律晚了八十余年,比第三定律也晚了二十多年。但是逻辑上,第零定律是后面几个定律的基础(因为它基于热平衡定义了温度),所以叫做热力学第零定律。

早期的温度计都含有空气，采用液体作为测量物质，但不密封。后来，人们由掌握了把管口进行密封的技术。在这个时间节点上，人们对物体的冷热层度有个粗略的描述，但并不能非常系统地、精准地进行定量的标定。在这个状态下，实验上最大的一个关于热学现象的科学知识就是我们在课本上学到的波义耳-马略特定律（Boyle-Mariotte Law）。它是由我们在上一章提到了爱尔兰化学家波义耳（Robert Boyle，1627-1691 年）在 1662 年发现的。具体内容是“对于密闭容器中的定量气体，恒温下，气体的压强 P 和体积 V 成反比”。同样的内容在 1679 年也由法国物理学家马略特（Edme Mariotte，1620-1684 年）独立发现。在这个发现中，温度只要保持不变即可，不需要进行非常精确的测量。

在对温度进行系统地、高精度地标定地过程中，波兰出生的荷兰物理学家华伦海特（Daniel Gabriel Fahrenheit，1686-1736 年）发挥了重要的作用。1714 年，他发明了水银温度计。基于这个发明，他引入了华氏温标（Fahrenheit Scale），使得人们对温度的定量标定质量与测量精度得到了极大的提升。也是基于这个关键的技术进步，人们对热学规律的认识得到了极大丰富。比如，大约在十八世纪八十年代，法国学者查理（Jacques Alexandre César Charles，1746-1823 年）发现在一个特定的压强下，改变温度，体积作为温度的函数是一条直线¹⁷⁶。十九世纪初期（约 1801、1802 年），英国化学家道尔顿（1766-1844 年）、法国科学家盖-吕萨克（Joseph Louis Gay-Lussac，1778-1850 年）进一步指出在理想条件下，这个曲线的斜率与具体的气体无关。在盖-吕萨克的工作中，他引用了之前没有发表的查理的工作。因此，这个定律被后人称为查理定律。

¹⁷⁶这个时候，变量就可以是温度了。

基于盖-吕萨克的工作, 1812 年, 意大利科学家阿伏伽德罗 (Lorenzo Romano Amedeo Carlo Avogadro, 1776–1856 年) 还指出在一个压强下, 一个容器内气体的量也与体积成正比。体积与气体量的比值只与温度和压强有关, 与气体是什么无关。这个定律被称为阿伏伽德罗定律。同时, 阿伏伽德罗还基于这个定律解释了 1808 年盖-吕萨克发现的两个体积单位的氢气与一个体积单位的氧气反应后, 给出两个而不是三个体积单位的气体¹⁷⁷。这里, 阿伏伽德罗的假设是两个氢原子与一个氧原子反应生成一个水分子。这个假设是对道尔顿的原子论的强力支持¹⁷⁸。同时, 在逻辑上, 基于波义耳-马略特定律和查理定律, 人们是可以推出在一个特定体积下压强与温度线性相关的关系的¹⁷⁹。

基于这些定律, 1834 年, 法国物理学家卡拉帕隆 (Benoît Paul Émile Clapeyron, 1799–1864 年) 提出了理想气体的状态方程, 将温度、压强、体积、气体物质的量通过一个常数 R 通过:

$$PV = nRT$$

公式 4.19

¹⁷⁷ 被解释的这个规律, 被称为盖-吕萨克定律。它的完整描述是: 同温同压下, 气体相互之间按照体积比例反应, 生成的任一气体产物也与反应气体的体积成整数比。

¹⁷⁸ 实际上热学的发展与原子论的发展一直是密不可分的。后来玻尔兹曼也是坚定的原子论信徒, 并因此与马赫产生了争端。其背后原因, 在于人们对热学现象的解释过程中, 需要引入人们当时看不见的原子、分子。这在当时具有一定的形而上学的特质, 但是随着科学的发展, 后来被证实。这也成了物理学发展过程中, 人们要合理地处理理性与感知之间的关系的例子, 成为领先时代的理论的榜样。

¹⁷⁹ 这一点必须强调, 我们的很多教材中会说人们可以基于 P - V 定律、 V - T 定律、 P - T 定律推出理想气体的状态方程。实际上, 这三个定律在逻辑上并不相互独立, 知道了两个自然可以推出第三个。而理想气体的状态方程中物质的量那个自由度是不能被这三个定律描述。因此, 阿伏伽德罗定律在推出卡拉帕隆方程的过程中是必须的。历史上, 人们也是通过波义耳-马略特、查理、阿伏伽德罗这三个定律推出理想气体状态方程的。上面提到的盖-吕萨克定律更多的是对原子论的支持, 与这个理想气体状态方程关系不大。

联系起来¹⁸⁰。后来，人们发现这个常数蕴藏着更为丰富的物理内容，它等于玻尔兹曼常数与阿伏伽德罗常数的乘积。

同时，如果将查理的直线向低温方向扩展，会与横轴相交在-273 摄氏度左右的样子（华氏温度约-459 度），这个实验观测结果也为人们最早认识绝对零度提供了条件（图 4.6）。实际上，这一点直到 1848 年才由开尔文爵士（William Thomson, 1st Baron Kelvin, 1824–1907 年，当肯定还没有授勋）指出。也是基于这个认识，开尔文引入了绝对温标，成为科学研究中温度的标准计量单位。

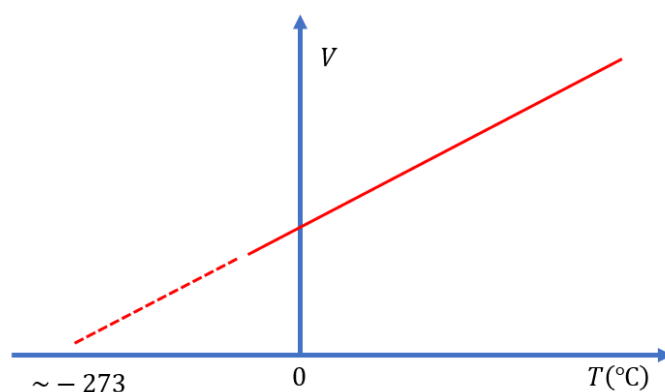


图 4.6 克拉帕隆方程预示的绝对零度。

4.2.2 热力学第一定律

上述发展为人们理解热学现象进而提出热力学理论奠定了坚实的基础。在热力学理论的提出过程中，一些更为抽象的概念，比如热量、能量、熵起到了重要的作用。类似概念的形成与上述实验规律相比，具有更为鲜明的哲学属性。和原子论一样，它们在提出的时候，都具有一定的形而上的特质。但随着研究的深入，人们越来越认识到其客观性，并建立了相应的微观理论。进入上个世纪，量子力学与统计物理的发展更是给这些微观理论建立了坚实的理论基础。本着逻辑与历

¹⁸⁰当然在卡拉帕隆的时候，这个温度不是绝对温标，是要减一个常数的，这个我们马上会说到。

史相统一的原则，我们整体按时间顺序来展开讲解。

同时，我们也需要指出，从逻辑关系上来说，热力学第零定律是基础，虽然它的提出晚于前三个定律（这三个定律的提出是按时间顺序产生的）。还有就是这四条基本定律都是基本定律，不能由其它任何物理学定律推导出来。它们都是基于丰富的实验总结出来的。然后，基于这四条定律，人们可以建立热力学理论，并在其建立后与经典力学、量子力学基本理论结合，给出了统计力学。

先从热力学第一定律说起，它的具体内容是：物体内能的增加等于吸收热量减去对外做功。这里，有两个比较抽象的概念：内能、热量。对外做功相对它们两个比较好理解。我们先从热量说起。在十八世纪早期，荷兰科学家布尔哈夫（Herman Boerhaave, 1668–1736 年）发现当人们把等体积的不同温度的水混合在一块的时候，它最终温水的温度会落在中间点。布尔哈夫由此就得到了一个结论：物体在混合的时候，它的热量是守恒的，它既不能被创造也不能被消灭，它可以从一个物体流动到另外一个物体，但是在这个过程中它的总量守恒（热量是守恒的，既不能被创造也不能被消灭）。

得到了这个定律之后，人们自然会想这个定律是否适用于除了水之外其它的物质。布尔哈夫曾经尝试把水和水银混合。但是不幸结果并不符合这个“定律”。当然你可以说水与水银的比重不同，因为当时人们已经对质量有了很好的认识。但技术层面两者并不互溶，物理层面我们知道两者的热容不同，因此结论不应符合上述预期。但不管怎样，布尔哈夫的这个实验至少让人们认识到物质中除了质量，还有某种守恒的量，与热有关。

除了热容，上述观测中还有一个很重要的与“热的量的多少”相关的量没有被发现，就是潜热。这个是在 1755 年由一个叫布莱克（Joseph Black, 1728–1799

年)的苏格兰科学家所发现的。布莱克研究了冰和水之间的混合,他就发现一个很有意思的现象就是将 0°C 的冰和等质量差不多接近 80°C 的水混合起来,他们又会发现冰会全部转化为水,但是混合的水的温度仍然是 0°C 。这个现象告诉我们冰在熔化的过程中虽然它的温度保持不变,但仍然会吸收热量,这个热量被叫做潜热。同时,它也告诉我们温度并不能够用来衡量一个物体所含有的热的多少,同样是 0°C ,水所含有的热量就比冰要多。

如果不能单纯的用温度来作为热现象的一个单一衡量标准,那应该还存在着一个或几个量,与物体的吸热、放热有关。实际上,人们后来意识到有很多描述平衡系统的热力学状态的态函数,比如内能、焓、熵、自由能等。基于冰转化为水的潜热,布莱克提出了他的量热术,发明了世界上最早的冰量热器(图 4.7)。在测量一个物体的热量的时候,把这个物体放在冰的量热器中。当这个物体它的温度和冰达到了一致 0°C ,那么有一部分的冰就会转化为水,这个水就会流下来。这样,我们就可以对这些水的质量进行测量,并通过这些冰转化为水的质量来估计我们要测量的物体它所含有的热量了。至此,布莱克澄清了关于热现象的两个基本的概念。一个是温度,用来测量一个物体它的冷热程度(这个人们早就知道)。另一个,是热量,用来测量一个物体它所含有的热的量的多少。对温度和热量,我们分别可以用温度计和量热器来进行测量。这样一来就为整个热现象的研究就奠定了一个科学的基础(实验测量)。



图 4.7 布莱克量热器的示意图。

从 1755 年布莱克的工作之后，到十八世纪末至二十世纪初，人们就是在对热现象的定量的研究的基础上，建立了热力学的三大定律，最终建立起来了热力学的整个框架。其中第一个定律是关于热和功可以相互转换且总量不变的。理解这一定律，可以从两个途径。一是卡拉帕隆的理想气体状态方程，因为吸热可以让温度升高，而温度升高又向外作用。这样就很容易理解热与功的互换。第二，就是焦耳 (James Prescott Joule, 1818–1889 年) 实验。通过做功让水升温 (图 4.8)，焦耳在 1843 年发表了他关于热功当量的研究，让人们认识到热与功具有一样的本质¹⁸¹。同时，焦耳还发现一个系统从某初态经过不同的绝热过程到某终态，外界对系统所做的热功都相等。这研究意味着对初态、终态都是平衡态的热力学过程，外界对它所作的热功只与初态与终态有关，与过程无关。话句话说，可以基于绝热过程的做功来定义一个态函数（内能），绝热过程的做功等于热力学系统

¹⁸¹ 在焦耳之前，1841 年，德国科学家迈尔 (Julius Robert von Mayer, 1814–1879 年) 曾有过能量守恒定律的表达。但焦耳的工作基于的实验更加牢靠，因此现在人们讲到热力学第一定律的时候，对焦耳提的也更多一些。

的内能差。

之后,把这个守恒定律推广至非绝热过程,在 1850 年左右,克劳修斯(Rudolf Clausius, 1822–1888) 正式总结出热力学第一定律: 热能可以从一个物体传递给另一个物体,也可以与机械能或其他能量相互转换,在传递和转换过程中,能量的总值不变。它可以由公式表达为:

$$\Delta U = Q - W$$

公式 4.20

其中 ΔU 代表系统内能的变化, Q 代表物体从外界吸收的热量, W 代表物体对外作用。基于热力学第一定律,人们也认识到有能量守恒这样一个更为普适的定律。这也为第一类永动机判了死刑。

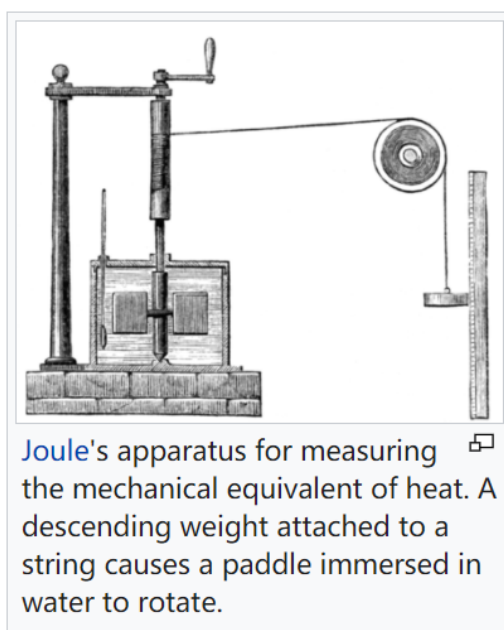


图 4.8 焦耳实验示意图 (此图截自维基百科)。

这里,我们还需要说一下的是热学的发展与第一次工业革命是密切相关的。蒸汽机是利用热学原理工作的。在瓦特 (James Watt, 1736–1819) 改良蒸汽机这个时间节点 (约 1776 年),人们甚至连热力学第一定律都没有意识到。因此,这

是一个典型的应用先行、机理研究跟上的学科。当然，在机理地研究跟上之后，人们就可以更加系统地改进机械效率了。

4.2.3 热力学第二定律

除了热物质的能量守恒，人们在热学研究中发现的第二个定律是关于熵增加的。但熵是一个极其抽象的概念，它的微观定义直到十九世纪末玻尔兹曼的时候才清楚¹⁸²。因此，这也是一个人们先发现实验上的客观规律，然后再意识到这个客观规律背后有深层次的物理的定律。

这里，实验上的客观规律是卡诺定理。卡诺（Nicolas Léonard Sadi Carnot，1796–1832 年）是个法国人，出身一个在政治和科学方面都有一定基础的家庭。他毕业于巴黎高工，当时巴黎高工的教师队伍包含傅里叶（Jean Baptiste Joseph Fourier，1768–1830 年）、安培（André-Marie Ampère，1775–1836 年）、盖-吕萨克（Joseph Louis Gay-Lussac，1778–1850 年）、泊松（Siméon Denis Poisson，1781–1840 年）这样的人物。因此，我们可以想象他在这里受到的科学训练是极其高水平的。卡诺本人是个工程师，又是拿破仑的铁杆粉丝，对改进热机的效率具有很大的热情，希望通过这个帮助法国赢得战争。但历史上拿破仑最终失败了。这些尝试的影响最终体现在了科学上，就是卡诺定理。

在讲卡诺定理之前，我们先了解一下可逆热机。它是基于可逆过程进行热与功的转换的热机。这个工作过程是理想模式，也就是每一步工作物质（比如气缸内的气体）都有足够的时间弛豫，没有耗散。对理想气体而言，活塞运动的宏观

¹⁸² 本节内容大量参考了林宗涵老师的《热力学与统计物理学》（北京大学出版社，2018 年第二版）。

时间尺度是远远大于气体通过分子碰撞进而弛豫的时间尺度的。同时，活塞的阻力可通过润滑油减到最小。因此，这个理想模式可以在实验上无限逼近。经过一系列的实验，卡诺发现如下两点规律：

1. 在相同的高温热源与相同的低温热源之间工作的一切可逆热机，其效率都相等，且与工作物质无关；
2. 在相同的高温热源和相同的低温热源之间工作的一切不可逆热机，其效率不可能大于可逆热机的效率。

从逻辑上来讲，第一条规律可以当作第二条规律的推论。因为当工作在两个固定温度的热源间的不可逆热机的效率都要低于可逆热机的效率的时候，可逆热机的效率就只能是一个固定的数，且与工作物质无关。不然，当利用工作物质 A 进行工作时，可逆热机的效率高于用工作物质 B 做成的可逆热机。那么让利用工作物质 A 进行工作的热机稍微不可逆一些，就会产生一个不可逆热机，比利用 B 作为工作物质的可逆热机的效率高。这样的话，卡诺定理的核心其实就是第二点。

卡诺当年在证明这一点的时候用了一个叫做“热质说”的理论。它有点像拉瓦锡所批判的燃素说，把燃烧当成物质的消耗，拉瓦锡更正说这个就是氧化反应。热质说是把热当成物质来看待。现在我们知道热质说是错误的，热其实对应的是微观粒子的运动¹⁸³。因此，卡诺当时的证明是不可靠的。现在，人们知道在逻辑上为了得到卡诺定理，人们需要引入一个更为基本的定律。这个定律就是热力学第二定律，它有两种表述：

¹⁸³热质说的证伪过程中本杰明·汤普森（Benjamin Thompson，也叫伦福特伯爵，Count Rumford，1753-1814）发挥了非常重要的作用。他主要是基于能量的精确测量，说明同样一种物质，通过做功，温度会升高，也就是产生了热量，但质量一点都没有变。关于这部分更详细的讨论大家可以看参考文献【10】的 2.3.1 节。

-
1. 开尔文 (William Thomson, 1st Baron Kelvin, 1824–1907) 表述：不可能从单一热源吸收能量，使之完全变为有用功而不产生其他影响；
 2. 克劳修斯 (Rudolf Julius Emanuel Clausius, 1822–1888 年) 表述：不可能把热量从低温物体传递到高温物体而不产生其他影响。

其背后隐藏的规律，是热力学过程的不可逆性（虽说热机可逆，但把热源包含进去，大的孤立的热力学系统的过程也是不可逆的）。换句话说，孤立的热力学系统会自发地朝着热力学平衡方向（最大熵状态）演化。这个过程，是不可逆的。

我们先说明一下热力学第二定律的两个表述在逻辑上是等价的。然后，再说明卡诺定理如果想成立，必须先要承认热力学第二定律。以此，来说明人们认识热力学第二定律的过程（先有卡诺定理，再有两个等价的表述）。当然，热力学第二定律背后隐藏的物理量（熵）在十九世纪后期人们在为热力学规律寻求力学解释的过程中也获得了微观对应，我们后面再解释。这里，先从热力学第二定律两种表述的等价性开始。

先说如果“开尔文表述不真”则“克劳修斯表述不真”。假设存在一个违反开尔文表述的热机 A，如图 4.9 所示。它可以从低温热源吸收热量 Q 将其全部转化为有用功 W 。这个时候，我们可以把这个 A 连接一个热机 B，B 的作用是把功 W 全部转化为热量并传给高温热源（这个没有说不可以，现实操作中也可以）。此时，如果我们把 A、B 看成一个整体，那么就可以从低温热源吸收热量 Q ，并全部把它传递到高温热源，而未产生任何其它影响。也就是克劳修斯表述不成立了。换句话说，开尔文表述不成立的话，克劳修斯表述也不成立。

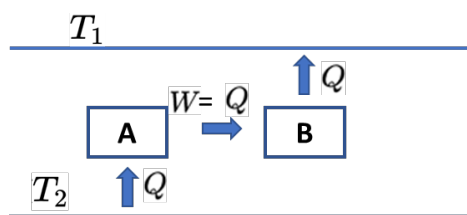


图 4.9 开尔文表述不成立，则克劳修斯表述不成立。

再看反过来这个过程，如果“克劳修斯表述不真”，则“开尔文表述不真”。如图 4.10 所示，假设存在一个违反克劳修斯表述的制冷机 A，它可以从低温热源吸收热量 Q_1 并传递到高温热源，且不产生其它影响。这个时候，我们可以把它与另一个热机 B 联合。热机 B 的作用是从高温热源吸收热量 Q_2 ，然后将其中的 $Q_2 - Q_1$ 转化为有用功，并把剩下的 Q_1 还给低温热源。这样的话，如果让 A、B 联合工作，效果就是低温热源吸、放热完全一样，可以看作不参与。而高温热源释放热量 $Q_2 - Q_1$ ，全部转化为有用功。这也就是说开尔文表述不成立了。

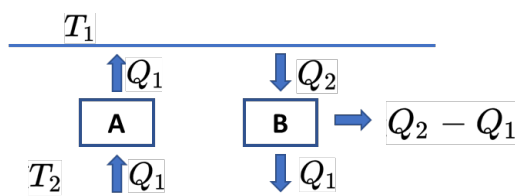


图 4.10 克劳修斯表述不成立，则开尔文表述不成立。

现在，如果我们接受热力学第二定律（两个表述中的任意一个），就很容易理解卡诺定理的。因为我们如果假设有两个热机 A 和 B 工作在两个相同的热源之间，它们分别从高温热源中吸收热量 Q_1 与 Q'_1 ，对外做功 W 与 W' ，向低温热源放热 Q_2 与 Q'_2 。根据热力学第一定律，有：

$$\begin{aligned} W &= Q_1 - Q_2 \\ W' &= Q'_1 - Q'_2 \end{aligned}$$

公式 4.21

两个热机的效率分别是：

$$\eta_A = \frac{W}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$$

$$\eta_B = \frac{W'}{Q'_1} = \frac{Q'_1 - Q'_2}{Q'_1}$$

公式 4.22

如果 A 为可逆热机，那么卡诺定理就可以表述为：

$$\eta_A \geq \eta_B$$

公式 4.23

那么，我们就可以先接受热力学第二定律的开尔文表述。然后，用反证法来证明卡诺定理一定成立。也就是假设不可逆热机的效率可以高于可逆热机的效率。这样的话，就可以推出违反开尔文表述的结果。

为此，我们先假定两个热机从高温热源吸收相同的热量，也就是：

$$Q_1 = Q'_1$$

公式 4.24

那么，根据公式 4.22， $\eta_A < \eta_B$ 就意味着 $W < W'$ 。由公式 4.21，结合公式 4.24 以及 $W < W'$ ，就有：

$$W' - W = Q_2 - Q'_2 > 0$$

公式 4.25

这样的话，只要根据图 4.21 设计两个热机 A 和 B，A 为可逆热机，B 为不可逆热机。B 不可逆，从高温热源吸热 Q'_1 ，向低温热源放热 Q'_2 ，做功分两部分。 W 这部分功用于 A 这个可逆热机的输入，A 从低温热源吸热 Q_2 ，向高温热源放热 Q_1 ；另一部分是 $W' - W$ ，用于对外作用。这样的话，当 $Q_1 = Q'_1$ ，将两个热机联立，则等同于一个从下面的热源吸热 $Q_2 - Q'_2 > 0$ ，然后根据公式 4.25，将它完全转变为 $W' - W$ 的热机。也就是从某一热源吸热，将其完全转化为功，且不造成其它影响。这样的话热力学第二定律的开尔文表述就不成立的。也就是说热力学第二

定律（两种表述等价）是蕴含着卡诺定理的。

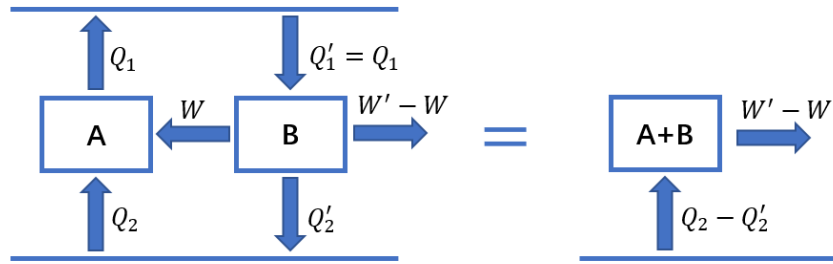


图 4.11 假设存在一个效率高于可逆热机的不可逆热机，那么热力学第二定律（开尔文表述）就不成立。

至此，历史上，人们从一条实验观测的总结（可逆热机效率高于不可逆热机）出发，进而认识到热力学第二定律这样一个基本规律的过程基本讲完。从第二定律出发，人们是可以认识到有个热力学温标存在的。实际上，1845 年，威廉·汤姆逊（后来的开尔文爵士）剑桥大学毕业后，在法国实验物理学家勒尼奥（Henri Victor Regnault, 1810–1878 年）的实验室第一次读到了卡拉帕隆讨论卡诺热机的文章，第一个反应也是可以利用卡诺热机确定一个与工作物质无关的温度。

1848 年，在以《基于卡诺的热动力理论和由勒尼奥观测结果计算所得的一种温标》为题的论文中，他写道：按照卡诺所建立的热与动力之间的关系，热量和温度间隔是计算从热获得机械效果的表达中唯一需要的要素，既然我们已经有了独立测量热量的一个确定体系，我们就能够测量温度间隔，据此对绝对温度差做出估计（详见参考文献【郭奕玲、沈慧君，2005】的 2.5 节）。1854 年，威廉·汤姆逊又与焦耳联名发表了《运动中流体的热效应》一文，在其中定义了绝对温标。也因为这些贡献，人们后来把绝对温标中的温度单位定义为开尔文。然后，基于热力学温标，人们又可以认识到熵的存在。在这个过程中，克劳修斯起到了决定性的作用。下面，我们把这个过程也进行一个简单的介绍。

在克劳修斯的表述中，热量从高温物质流向低温物质很自然，但在封闭系统中，这个过程不可逆（无法从低温到高温热源而不引起其它影响）。这个不可逆似乎预示着某种混乱度的提高，他把这种描述混乱度的物理量叫做熵。英文是 entropy，en 代表内在，trope 代表变化。本意是一种内在的变化。中文对这个词的翻译，来自胡刚复先生。他很准确地抓住了其与热有关、与商有关（熵变的定义是系统得到的热量除以系统温度），进而提出了这个合成词。在克劳修斯提出熵这个概念的时候，他清楚这个描述的是一个热学系统的内在性质的变化。封闭系统中，热量只能从高温热源流向低温热源。这也代表了 this 不可逆过程对应的是某个量在增加。如果用吸热除上温度定义熵，那么两个热源的这个量加起来：

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T_2} - \frac{\Delta Q}{T_1}$$

公式 4.26

因为 $T_2 < T_1$ ，就是一个正数。这就意味着封闭系统的熵总是增加的。

至此，在十九世纪六十年代中期这个时间节点，热力学第一、第二定律基本定型。人们知道了热和功本质上都是能量，以及在制造热机的时候不可能把所有的热都转化为功，工作的热物质整体的熵是要增加的。但略显遗憾的是“熵”还是一个非常抽象的概念，并没有微观解释。同时，热力学貌似与力学没有任何关系¹⁸⁴。为了改变这种状况，从十九世纪六十年代开始，沃特斯顿（John James Waterston, 1811–1883 年）、克罗尼格（August Karl Krönig, 1822–1879 年）、麦克斯韦（James Clerk Maxwell, 1831–1879 年）、玻尔兹曼（Ludwig Eduard Boltzmann, 1844–1906 年）进行了一系列卓有成效的探索。其中，克罗尼格针对理想气体基于原子论与牛顿力学提出了气体动力学理论（kinetic theory of gases），后被麦

¹⁸⁴人们对热物质的描述（热力学第一与第二定律）与牛顿力学那样的力学没有任何关系。

斯韦与玻尔兹曼进行了完善。我们很多读者在高中时应该做过这样的题，就是假设气体分子有个平均速度，气体是理想气体（除了碰撞时并不相互作用），把气体放在容器中。然后，根据气体分子撞击容器壁的平均动量变化，算出压强。这道题的本质就是这个理论。它看似简单，却给出了热力学定律与物质的微观结构与动力学之间最本质的联系。

玻尔兹曼另一个重要贡献是指出一个体系的熵等于这个体系的微观状态数的对数乘上一个常数。这个常数后来被称为玻尔兹曼常数。之后，美国物理学家吉布斯 (Josiah Willard Gibbs, 1839–1903 年) 引入了系综的概念，统计力学建立。它为热力学现象给出了一个清晰的、微观的、力学的图像，也在后来量子力学的建立过程中发挥了重要的作用。这时，我们已经不知不觉地来到了十九世纪末、二十世纪初这个时间节点了。下一个任务，就是第三定律。1901 年，在科学界历史悠久且享有盛誉的科普利奖 (Copley Medal) 被授予吉布斯¹⁸⁵，也在一定程度上代表了人们对热力学在十九世纪发展的认可，以及统计力学在二十世纪的发展的期待。

¹⁸⁵ 笔者是一次午饭的时候从同事全海涛教授那里第一次听说这个奖项的，之后详细查了一下，收获良多。这个奖从历史沉淀上来看，应该说比诺奖厚重很多。它由英国皇家学会颁发的，多数情况下每年一个或几个人相关的工作（以一个人的情况为主）。对向涵盖自然科学或数学的各个分支。如果某年没有选出合适的人，也可以空缺。之前的获奖人包括卡文迪许 (Henry Cavendish, 1731–1810 年)、威廉·赫歇尔 (Frederick William Herschel, 1738–1822 年)、法拉第 (Michael Faraday, 1791–1869 年)、泊松 (Siméon Denis Poisson, 1781–1840 年)、高斯 (Carl Friedrich Gauss, 1777–1855 年)、达尔文 (Charles Darwin, 1809–1882 年)、焦耳 (James Prescott Joule, 1818–1889 年)、亥姆霍兹 (Hermann von Helmholtz, 1821–1894 年)、克劳修斯 (Rudolf Clausius, 1822–1888 年)、威廉·汤姆孙 (William Thomson, 1st Baron Kelvin, 1824–1907 年)、魏尔施特拉斯 (Karl Theodor Wilhelm Weierstrass, 1815–1897 年) 这样的人物。从名单来看，应该说这个奖涵盖了更多的我们教科书中经典知识的贡献者。当然，这也有这个奖项历史更悠久的因素。

4.2.4 热力学第三定律

热力学第三定律是热力学发展史上按时间顺序出现的第三个定律。它在十九和二十世纪的物理与化学学科发展中扮演了重要角色,与物理化学这个隶属于化学的二级学科的诞生也是密切相关的¹⁸⁶。其中的纽带,是人们利用热力学理论对化学反应的研究。后面,我们会详细解释人们针对化学反应的研究在热力学第三定律的发现过程中发挥的重要作用。

历史上,热力学第三定律是由化学家瓦尔特·赫尔曼·能斯特(Walther Hermann Nernst, 1864-1941)提出的。早期,被称为能斯特热定理(Nernst Heat Theorem)¹⁸⁷。能斯特(Walther Hermann Nernst, 1864-1941年)也因此获得1920年的诺贝尔化学奖。后来,能斯特热定理被命名为热力学第三定律。相较于热力学第一、第二定律及之后被总结出的第零定律,热力学第三定律具有明确的量子力学的内涵¹⁸⁸。实际上,能斯特就是与量子力学的发展密切相关的索尔维会议的关键发起人。在热力学第三定律的产生过程中,美国化学家西奥多·威廉·理查兹(Theodore William Richards, 1868-1928年)同样发挥了重要作用。理查兹是当时很精确的一种绝热量热计(calorimeter)的发明人,也是化学反应热研究中极

¹⁸⁶ 物理化学可以简单的理解为“在分子层面理解化学”。此解释来自笔者的一个朋友,中国科技大学的郑晓教授(后来转到复旦大学化学系工作)。

¹⁸⁷ 在理论体系中, Theorem 与 Law 的逻辑地位完全不同。Theorem 是在一个理论体系中的某种性质,非一眼可见,却可以由某些出发点推出。在能斯特1906年的文章中,化学反应的熵变(ΔS)在绝对零度时趋于零的结论是由化学反应时的自由能变化(ΔG)对温度的偏微分在趋近绝对零度时为零所推出的。因此,在能斯特最早的文章中,它是一个 Theorem。Law 则是对经验的理性总结,此后作为某理论体系的出发点。有些 Law 后期可以被更为基本的理论导出,有些 Law 还没有。Nernst Theorem 提出后,随着热力学理论的发展,人们认识到在热力学理论体系中,它其实应该被赋予 Law 的地位。因此,能斯特热定理也正式被命名为热力学第三定律。

¹⁸⁸ 热力学第三定律可以由量子统计力学导出,但在热力学理论的框架下,它本身是完全独立的。

其重要的量热法 (calorimetry) 技术变革的引领者。这些精确测量化学反应中关键物理量的实验技术的发展及电化学实验输出功的测量是热力学第三定律能够被提出的基础¹⁸⁹。

或许正是由于热力学第三定律的发现与确认是由物理与化学的学科交叉所促进,时至今日,在物理学教学中关于其产生的历史过程与物理内涵的论述与第一和第二定律相比较为缺乏。多数教材在讲述这部分内容时是直接交代物理结论。这不仅淡化了该定律诞生背后过程中丰富的科学史的内容,同时也经常会导致读者忽视热力学第三定律背后的一些关键物理内涵,如它所蕴含的“量子性”。在仅有的极少部分关于热力学第三定律的科学史研究中,虽然有不少关于能斯特定理产生过程的梳理与总结,却主要围绕着能斯特的本人经历展开与定理发现过程进行描绘。显然,热力学第三定律作为被爱因斯坦称为有“永恒”魅力的理论定律¹⁹⁰,其产生过程背后的自然科学学科发展的规律更值得推敲是更为深远的。

基于这个考虑,在本小节,我们对热力学第三定律的产生过程进行相对全面的介绍,重点讲述从十九世纪下半叶开始人们利用热力学理论对化学反应的研究,以及热力学第三定律的内涵。由于热力学第三定律讨论的是一个系统在低温下的性质,低温实验技术的发展,按逻辑是与之密切相关的。但实际上,在热力学第三定律按能斯特定理的形式被提出的过程中(两个关键步骤,一个是1902年理

¹⁸⁹ 虽然理查兹在1902年提出化学反应的焓变与自由能变化在绝对零度时有相等的趋势时,其基于的实验数据并不完全是自己的,而多数来自文献,但不可否认的是正是因为有了类似精确测量技术,才有了这些实验数据。具体到1902年理查兹的文章引用的数据,与焓变相关的来自量热法,与自由能变化相关的来自电化学实验的输出功。

¹⁹⁰ 爱因斯坦的原话是: A theory is the more impressive the greater the simplicity of its premises, the more different kinds of things it relates, and the more extended its area of applicability. Therefore, the deep impression that classical thermodynamics made upon me. It is the only physical theory of universal content which I am convinced will never be overthrown, within the framework of applicability of its basic concepts.

查兹的文章，一个是 1906 年能斯特的文章)，1902 与 1906 年的文章都没有依赖低温化学反应的数据得出结论。换句话说，理查兹与能斯特是基于温和温度 (Moderate temperatures) 下的数据进行的外推或理论分析后的猜测开展的工作。但在热力学第三定律被确认的过程中，低温化学实验的数据就不可或缺了。因为这个原因，在澄清这个事实的基础上，我们将本节的讨论按：十九世纪下半叶低温实验技术的发展、十九世纪末的热力学理论、热力学在化学反应研究中的应用及热力学第三定律的发现，三部分展开。本节的多数内容，摘自笔者与邓妙怡博士在《物理》杂志发表的一篇漫谈的文章【邓妙怡、李新征，2024】。考虑到本书讲到这个地方，还是经典理论。因此，热力学第三定律的量子力学内涵我们就不在这一小节进行涵盖了。感兴趣的同学可以参考文献【邓妙怡、李新征，2024】来进行理解。

4.2.4.1 十九世纪下半叶低温实验技术的发展

我们先从低温技术的发展开讲，相关的实验是在十九世纪下半叶非常盛行的气体液化。与之伴随，人们也意识到可以通过液体汽化与节流膨胀的方式获得低温。但实际上，人们利用这个现象获得低温的尝试，是早于十九世纪下半叶的。早在十八世纪末，荷兰人马伦 (Martin van Marum, 1750–1837 年) 就通过这个方法，利用高压，获得了液态氨。十九世纪初，人们又基于类似方法，实现了二氧化硫、氯化氢、硫化氢等气体的液化。但对于氧气、氢气、氮气，类似方法却始终不奏效。当时，人们已经认识到了不同的化学物质是由不同的分子组成的，而

不同的分子又是由不同的原子通过一定的化学配比构成的¹⁹¹。但人们没有认识到为什么有些分子，比如 H_2O ，形成的物质在常温、常压下就是液体；而另一些分子，比如 H_2 、 O_2 ，在常温、常压下是气体。

在认识到这个现象背后的规律的过程中，法国人德拉托尔（Charles Cagniard de la Tour, 1777–1859 年）的一个关键发现发挥了重要的作用。1822 年，他把酒精密封在一个石英球枪管中，然后加热。结果，他发现在到达一定温度后，出现了一种现在我们称之为超临界的物质。简言之，就是气体与液体变得不可分辨。也就是说他发现了超临界现象。这个现象背后蕴藏的道理，实际上是分子凝聚时，会有一个临界点。在这个临界点以上，此分子完全汽化。以下，才会有所谓的气-液相变。这个临界点的存在，是在 1869 年由爱尔兰科学家安德鲁斯（Thomas Andrews, 1813–1885）确定的。不同分子的临界温度不同。像当时已经实现液化的分子，普遍临界温度比较高。这样，它们在常温、常压下已经液化（比如水，临界点为 647.3 K、22.1MPa，温度高于室温），或者比较容易通过某些操作到达临界点一下的温度，实现气体的液化（比如 CO_2 ，临界点为 304.1 K、7.4 MPa）。它们的相图的示意如图 4.12。而像 H_2 、 O_2 ，因为临界温度比较低，实现液化就比较难。当时，人们甚至认为它们是永久气体。

¹⁹¹ 虽然当时人们并不能直接看到原子结构，原子论被人们完全接受也要等到二十世纪初，X 射线被应用到晶体结构测量之后，也就是劳厄、布拉格父子的工作被承认之后。关于这一点，我们在 9.1 节会有更详细的介绍。

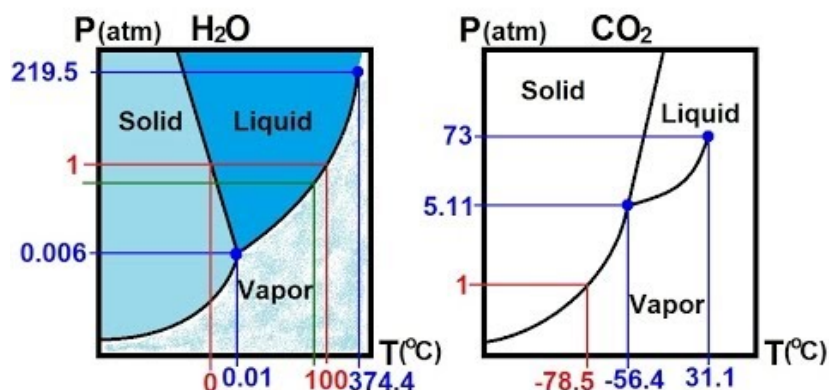


图 4.12 水和 CO_2 的相图的示意图。它们的临界点都是比较容易达到的。因此，在技术上，也比较容易实现液化。

当然，实验方面的努力一直没有停歇，持续到二十世纪初。1908 年，来自荷兰莱顿大学的昂纳斯（Heike Kamerlingh Onnes，1853–1926 年）对最具挑战性的氦气实现了液化。这也为他几年后发现超导现象奠定了实验技术的基础。理论层面，我们需要指出的是在超临界现象发现的时候（1822 年），人们甚至还没有推出理想气体的状态方程（克拉帕隆方程，1834 年）。即使后来克拉帕隆方程出现，理想气体模型还是无法给出气体分子凝聚进而形成液体或固体的理论结果。理论上，只有在范德华引入了范德华模型后，人们才可以描述简单的物质存在形式的转变。这个方面蕴含的两个重要的物理概念是物质的态与物，感兴趣的老师和同学可以参考文献【[欧阳霄宇, 2023](#)】进行扩展阅读。

另外，对低温技术的专业介绍，也请读者参考林熙老师的教材【[林熙, 2025](#)】。这里，我们先将讨论的落脚点放在一个事实，就是十九世纪末人们在实验室通过气体液化与相关技术实现了低温。基于这个技术人们可以研究低温下的物性或化学过程。这些低温技术，后来在确认能斯特定理为真（之后将其逻辑地位进行了提升并命名为热力学第三定律）的过程中是必须发挥作用的。

4.2.4.2 十九世纪末的热力学理论

热力学第三定律的完整表述为：当热力学温度趋近于绝对零度($T=0\text{ K}$)时，热力学系统的熵趋于定值。对“熵”的认识作为热力学第二定律的核心内容，是第三定律的逻辑基础。换句话说，第三定律是在第二定律的基础上提出的。它们的区别是第二定律关注的是平衡态热力学过程中的“熵变”，而非某热力学平衡态下的“熵”值。热力学第三定律关注的是某系统在“绝对零度”下的“熵”值。

在 4.2.3 节，我们对人们认识到热力学第二定律的过程进行了简单的回顾，落脚点是公式 4.26。这个时间节点是十九世纪六十年。从此时间节点之后到十九世纪末，人们利用热力学第二定律对热力学平衡态描述的基本理论在此基础上还是取得了非常大的进步的。为了讲解热力学第三定律，我们先将这些理论进行一些回顾。它们主要来自吉布斯 (Josiah Willard Gibbs, 1839–1903 年) 与亥姆霍兹 (Hermann von Helmholtz, 1821–1894 年)。其中，吉布斯的背景是理论物理与理论化学，他的理论由三个工作共计四篇文章组成【Gibbs, 1873a】【Gibbs, 1873b】【Gibbs, 1875】【Gibbs, 1877】。亥姆霍兹则是医学背景（后期转到了电化学与热力学的研究）。二人所提出的理论很类似，尽管亥姆霍兹的理论提出时间比吉布斯晚十年左右，但两者具备独立性。主要区别在于，亥姆霍兹的理论针对等温等容的体系，而吉布斯则针对等温等压体系。这也造成了两者的自由能差异，分别是 $U - TS$ 与 $U + PV - TS$ 。

1873 年，吉布斯第一篇经典之作发表。他在克劳修斯 (Rudolf Julius Emanuel Clausius, 1822–1888 年) 的工作基础上，对简单液体的平衡态热力学性质展开讨论。文章题目是 “Graphical Methods in the Thermodynamics of Fluids” 【Gibbs, 1873a】。这里的关键词是 Graphical Methods，他将：

$$dU = dQ + dW$$

公式 4.27

改写为：

$$dU = TdS - PdV$$

公式 4.28

此改动背后的物理思想是深刻的。正如美国数学史专家 M·克莱因 (Morris Kline, 1908–1992 年) 所说, 吉布斯从热力学基础中剔除了热和功, 用态函数取而代之, 从而使热力学成为平衡态物质特性的理论。基于此, 吉布斯提出用几何方法来描述流体热力学的特性, 即基于 S 、 V 等热力学状态函数, 用图的形式来描述一个热力学系统的热力学状态的变化¹⁹²。

在这篇文章基础上, 吉布斯在同年发表的第二篇文章 (题为 “A Method of Geometrical Representation of the Thermodynamic Properties of Substances by Means of Surfaces”) 中引入 U 作为第三个维度【Gibbs, 1873b】。以 U 为 z 轴, S 、 V 等热力学状态函数为 x - y 平面, 这时系统的热力学状态便可以描述为曲面。这篇文章提出了由曲面几何描述物质热力学性质的思想¹⁹³。在这个三维空间、二维曲面形成的图像中, 公式 4.28 中的温度 T 、压强 P 等于：

$$T = \left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_V$$

公式 4.29

$$P = - \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_S$$

公式 4.30

¹⁹² 对应的就是现在的相图, 虽然“相”的概念是吉布斯在探讨混合液体的平衡时才引入。关于相的详细讨论可以参考文献【Gibbs, 1875】【Gibbs, 1876】。

¹⁹³ 文章题目 “A Method of Geometrical Representation of the Thermodynamic Properties of Substances by Means of Surfaces” 正体现了这一思想。这里, 关键词为 Geometrical Representation。

同时，他将

$$G = U + PV - TS$$

公式 4.31

定义为自由能 (Free Energy)。并指出它描述的是一个等温等压热力学系统对外做非体积功的能力。可以看到，热力学第二定律中的熵在自由能定义式中已有体现。

从科学史的视角回溯，自由能概念的引入意义非凡，它是热力学第三定律发现过程中的关键物理量。第三定律发现的实验基础（理查兹的工作），正是围绕自由能这一核心物理量展开。最后需要说明的是，除了上述 (U, S, V) ，即用 S 、 V 这样的热力学状态函数描述热力学势 U 形成三维图像的组合，通过勒让德变换，人们还可以得到 (H, S, P) 与 (G, T, P) 。若将公式 4.31 的吉布斯自由能改为亥姆霍兹自由能 ($F = U - TS$)，也可以得到 (F, T, V) 。其微分关系为：

$$dF = -SdT - PdV$$

公式 4.32

$$dG = -SdT + VdP$$

公式 4.33

则有：

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = -\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_P$$

公式 4.34

$$P = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T$$

公式 4.35

$$V = \left(\frac{\partial G}{\partial P}\right)_T$$

公式 4.36

这为系统热力学状态的表征提供了便利(通过可观测量的微分描述不可观测量)。

基于上述两项工作,描述一个热力学系统的图形化工具便已具备。1875–1878年,吉布斯又针对混合液体,完成了被称为“吉布斯热力学三部曲”第三篇工作《论复相物质平衡》(On the Equilibrium of Heterogeneous Substances) [【Gibbs, 1875】](#)[【Gibbs, 1877】](#)。论文的主体是关于复相体系(包括单元复相与多元复相)热平衡的讨论。文章的关键词是 Equilibrium 和 Heterogeneous Substances。化学势在描述其平衡过程中扮演了重要的角色。“相”的概念也在这个工作中被正式提出(关于相的详细讨论可参考文献[【刘川, 2022】](#)第二至第四章)¹⁹⁴。这篇论文分两次发表出来,被认为是化学史上最重要的论文之一,奠定了化学热力学的基础。

上述吉布斯的若干工作,指出了自由能可以用来描述一个热力学系统对外做非体积功的能力,化学反应也都会向着自由能降低的方向进行。然而,受历史因素影响,吉布斯的观点真正为欧洲主流学界所接受却是在十年后,即亥姆霍兹的系列工作发表之后。为了明确自由能是可以做功的能量,亥姆霍兹还引入了 Bound Energy 的概念¹⁹⁵,对应 G 或者 F 中的 TS 项,它是不能被转换为功的。至此,人们可以将一个热力学系统对外做功与其自由能变化联系起来,将其吸收或放出

¹⁹⁴ 之前人们用“态”来描述物质存在形式,比如液态、气态、固态。在混合液体的研究中,吉布斯意识到同样是液态,内部物质的存在形式也不同。因此要引入“相”的概念来加以区别。不同的液体相混合,整体都是液态,但在这个液态内部,有“相”之间的平衡。更多讨论见文献[【欧阳宇, 2023】](#)。

¹⁹⁵ 这个 Bound Energy 被翻译为束缚能或许并不合适,因为束缚能经常被指代 Binding Energy(有时也叫结合能),也就是两个粒子形成束缚态的时候系统能量的降低。有时,束缚能又被理解为从原子中剥离一个电子所需能量。这里,亥姆霍兹的意思是这个能量不能被“自由”地转化为功,它是相对于自由能(Free Energy)来说的。

热量与其焓变联系起来¹⁹⁶。这也为下一步人们基于对化学反应的热力学研究发现热力学第三定律奠定了坚实的理论基础¹⁹⁷。

4.2.4.3 化学反应中的热力学研究及第三定律的发现

如前所述,热力学第三定律的内容是当热力学温度趋近于绝对零度($T = 0\text{ K}$)时,热力学系统的熵趋于定值。言下之意,是指一个系统在有限温度下,它可以有两个平衡热力学状态 A 和 B, A 与 B 的熵会不同。但在绝对零度时, A 与 B 的熵一定相等。用公式的形式表达,就是:

$$\lim_{T \rightarrow 0} [\Delta S] = 0$$

公式 4.37

Δ 是一个温度 T 下这个系统的两个热力学平衡态的熵的差。具体定义为:

$$\Delta S = S_B - S_A$$

公式 4.38

相应地有:

$$\Delta G = G_B - G_A$$

公式 4.39

$$\Delta H = H_B - H_A$$

公式 4.40

¹⁹⁶ 十九世纪末人们已经很清楚地认识到了焓与热的关系。我们现在使用的 Enthalpy 这个词,是 1909 年由荷兰物理学家昂内斯 (Heike Kamerlingh Onnes, 1853-1926 年) 给出的。它来源于希腊语,意思是 warm within。

¹⁹⁷ 历史上,虽然人们在利用热力学描述化学反应的时候多数人用的并不是吉布斯的语言,但他们的语言与吉布斯的语言有等价关系。比如范特霍夫 (又译作范托夫, Jacobus Henricus van 't Hoff, 1852-1911 年,第一届诺贝尔化学奖得主),他不用熵,但熵与范特霍夫用的负的自由能对温度的偏微分,是等价的。

如此，为了得到公式 4.37，对同一个系统在温度 T 下的两个热力学平衡态的表征就是关键。化学反应恰恰提供了这样一个平台。在恒定温度 T 下，如果可以对一个热力学系统在化学反应的反应态（状态 A）与生成态（状态 B）的热力学量的差值（如 ΔG 、 ΔH ）进行定量测量，得到公式 4.37 的结论便不难理解了。

也是因为上面的原因，我们可以说十九世纪末至二十世纪初学界通过热力学对化学反应的研究是热力学第三定律诞生的重要基础。 ΔG 与化学反应做功有关， ΔH 与热有关¹⁹⁸。正是基于实验上对 ΔG 、 ΔH 等关键热力学量的测量，理查兹和能斯特先后发现了它们在低温下的一些特殊性质¹⁹⁹。1902 年，理查兹通过收集文献中关于化学反应的自由能变化以及焓变的数据，将其画成温度的函数，如图 4.13 所示【Richards, 1902】。需要说明的是，这些反应都是电化学反应，已有实验数据都在 0°C 以上。低温下的图像完全是通过外推得到的。由图可得：

$$\lim_{T \rightarrow 0} [\Delta G - \Delta H] = 0$$

公式 4.41

这是热力学第三定律发现过程中关键的第一步。之后，由于恒温化学反应的 ΔG 、

¹⁹⁸当时人们测量 ΔG 有两种方式。一种是利用化学反应平衡常数，这类实验非常枯燥且难度极高。另一种是对电化学反应，直接测量电压从输出功求得，这类实验要方便很多。或许是因为这个原因，1902 年理查兹的文章主要采用的电化学实验数据。 ΔH 的测量主要通过反应热，理查兹也是前面提到的化学反应的量热法方面的专家。

¹⁹⁹这里需要提一句的是有些文献会强调丹麦化学家汤姆森（Julius Thomsen, 1826–1909 年）和法国化学家贝特洛（Marcellin Berthelot, 1827–1907 年）认为的化学反应向着放热方向进行的经验总结，也就是 Thomsen-Berthelot Principle 对热力学第三定律发现的贡献。我们可以强调一下正是由于人们发现这个 principle 并不是对所有的化学反应都成立（有吸热反应），才让人们认识到了熵的贡献，进而总结出化学反应应该是向着自由能降低的方向进行，这样一个规律。自由能降低相比于放热，引入的因素恰恰是熵。而理查兹和能斯特关注的焓变与自由能变化的差，也是温度乘以熵变。从这个意义上来说，Thomsen-Berthelot Principle 是个被证伪的经验总结。正是因为其被证伪，使得人们意识到熵变在描述化学反应方向时的重要性，进而对其进行定量研究，才导致了热力学第三定律被发现。

ΔH 、 ΔS 满足：

$$\Delta G = \Delta H - T\Delta S$$

公式 4.42

结合公式 4.41，可得：

$$\lim_{T \rightarrow 0} [-T\Delta S] = 0$$

公式 4.43

公式 4.41-4.43 的示意图如图 4.14 所示。在趋近绝对零度时， ΔG 、 ΔH 的趋近行为可能不同。对这个趋近行为的描述促成了热力学第三定律发现过程中最关键的第二步。

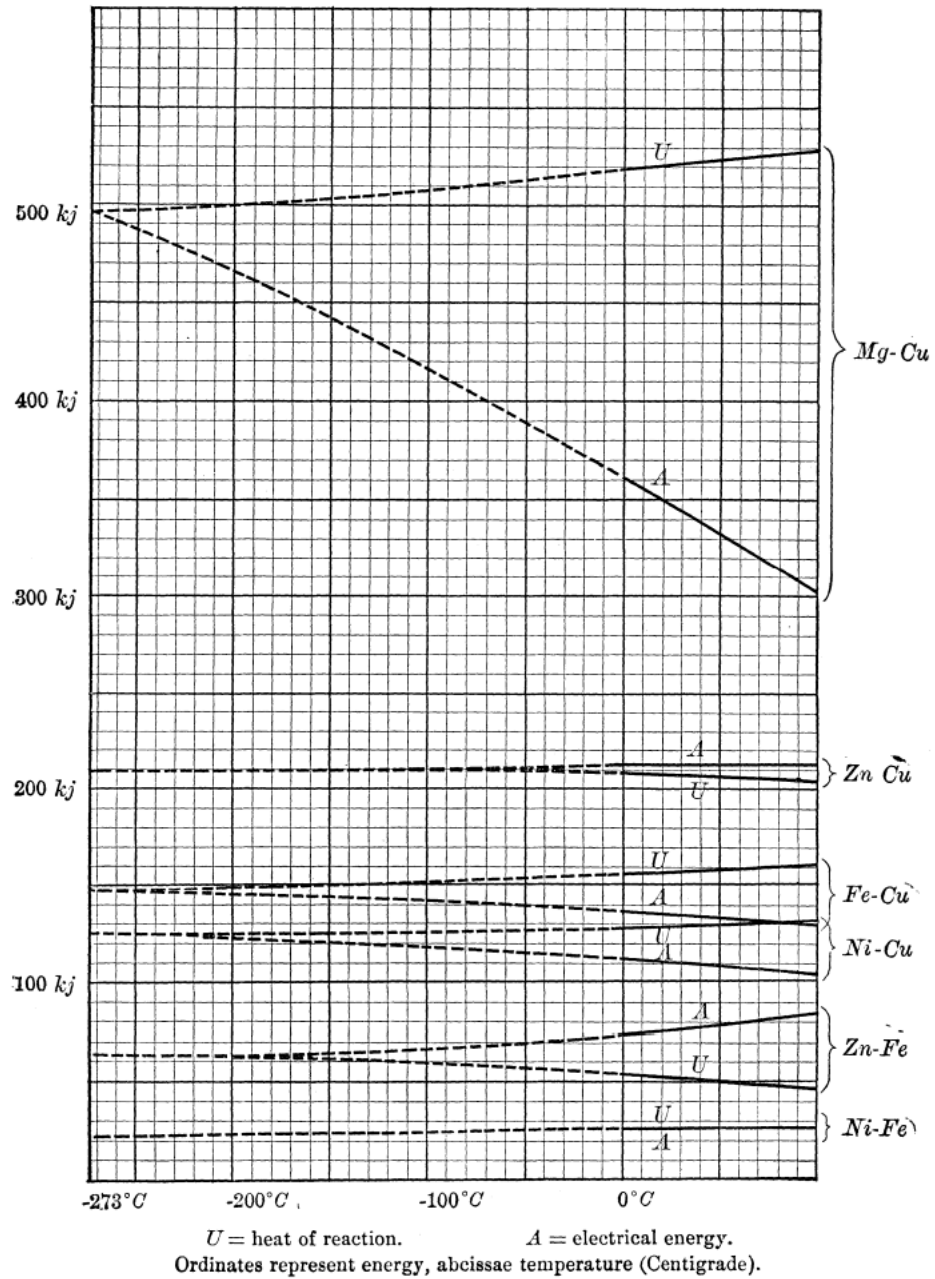


图 4.13 文献【Richards, 1902】中理查兹的数据原图。图中 heat of reaction（图中是 U ）与 electrical energy（图中是 A ）分别对应化学反应焓变 ΔH 与自由能变化 ΔG 。前者对应 ΔH 是因为焓的意义就是热；后者对应 ΔG 是因为电化学反应的有用功均以电能的形式输出。实线为由实验数据所支持的部分，虚线为理查兹进行的外推。（数据对应的实验温度都在 0°C 以上）

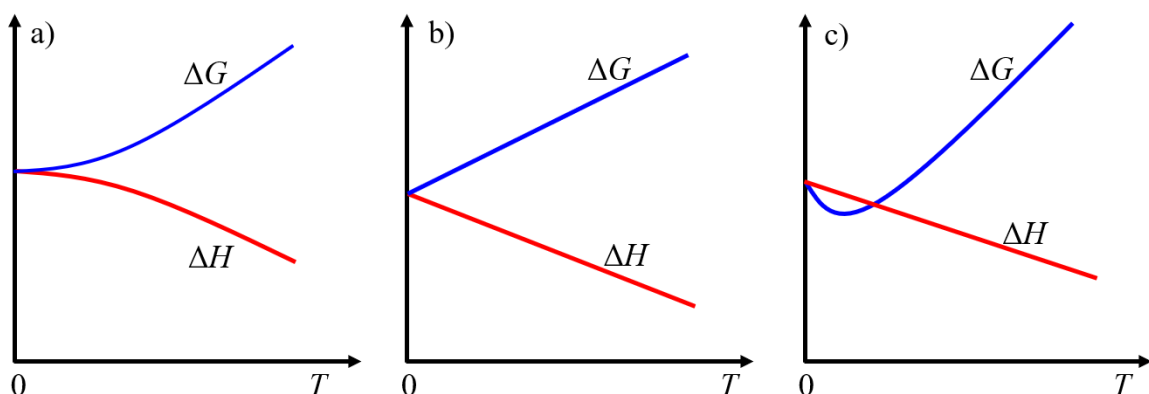


图 4.14 在趋近绝对零度时, ΔG 、 ΔH 的趋近行为可能不同的几个例子。

在能斯特之前, 哈伯 (Fritz Haber, 1868–1934 年)、范德霍特 (Jacobus Henricus van 't Hoff, 1852–1911 年) 在 1904 与 1905 年也关注过这个问题。遗憾的是, 他们对这个趋近行为的理解是定性错误的, 从而错过了发现热力学第三定律的机会。以范德霍特为例, 他认为化学反应的焓变在温度趋近于绝对零度是呈线性依赖温度的变化【Coffey, 2006】。与他们不同, 1906 年, 能斯特提出 ΔH 与 ΔG 对温度的斜率在趋近绝对零度时为 0【Nernst, 1906】, 即:

$$\lim_{T \rightarrow 0} \left(\frac{\partial \Delta H}{\partial T} \right)_P = \lim_{T \rightarrow 0} \left(\frac{\partial \Delta G}{\partial T} \right)_P = 0$$

公式 4.44

该式子有两个涵义。第一个涵义来自 $(\partial \Delta H / \partial T)_P = 0$ 。其中 $\Delta H = H_B - H_A$, 而 $(\partial H / \partial T)_P$ 与等压热容 C_P 存在如下关系²⁰⁰:

$$C_P^A = \left(\frac{\partial H_A}{\partial T} \right)_P$$

公式 4.45

$$C_P^B = \left(\frac{\partial H_B}{\partial T} \right)_P$$

²⁰⁰ 见参考文献【刘川, 2022】的第 29 页。

因此

$$\lim_{T \rightarrow 0} \left(\frac{\partial \Delta H}{\partial T} \right)_P = \lim_{T \rightarrow 0} [C_P^B - C_P^A] = 0$$

公式 4.47

这意味着化学反应体系处在生成物状态时相对于处在反应物状态时, 比热不发生变化。

第二个涵义, 来自 $(\partial \Delta G / \partial T)_P = 0$ 。其中 $\Delta G = G_B - G_A$, 结合 $(\partial G / \partial T)_P$ 与 S 的关系²⁰¹, 即:

$$S_A = \left(\frac{\partial G_A}{\partial T} \right)_P$$

公式 4.48

$$S_B = \left(\frac{\partial G_B}{\partial T} \right)_P$$

公式 4.49

有:

$$\lim_{T \rightarrow 0} \left(\frac{\partial \Delta G}{\partial T} \right)_P = \lim_{T \rightarrow 0} [S_B - S_A] = \lim_{T \rightarrow 0} [\Delta S] = 0$$

公式 4.50

这意味着化学反应体系处在生成物状态时相对于处在反应物状态时, 熵也不发生变化。

如果进一步把公式 4.50 (也是公式 4.37) 的结论扩展到这个系统的任何两个热力学平衡态之间的熵差在温度趋近于绝对零度时为零²⁰², 就是热力学第三定律的表述了。它等价于: 当热力学系统趋于绝对零度时, 熵趋于定值。这样的话,

²⁰¹ 文献[6]第 28 页。

²⁰² 公式 18 到公式 24 讨论的是化学反应的生成物状态与反应物状态之间的差别。

它也可以用“一个热力学系统的温度无法通过有限次操作降至绝对零度”来进行表述（图 4.15）。需要说明的是，公式 4.37 是以公式 4.44 为出发点导出的，但此出发点在热力学理论框架下是一个不能被证明的假设（尽管能斯特做过很多努力）。因此，公式 4.37 早期被称为能斯特热定理。后期，人们意识到它应该被赋予独立的、基础的逻辑地位，即定律（Law）的地位，才终被称为热力学第三定律。1905 年 12 月、1906 年 12 月，能斯特分别在哥廷根和柏林的两个会议上提交了文章来报道这些工作²⁰³，人们将热力学第三定律的发现主要归功于能斯特。

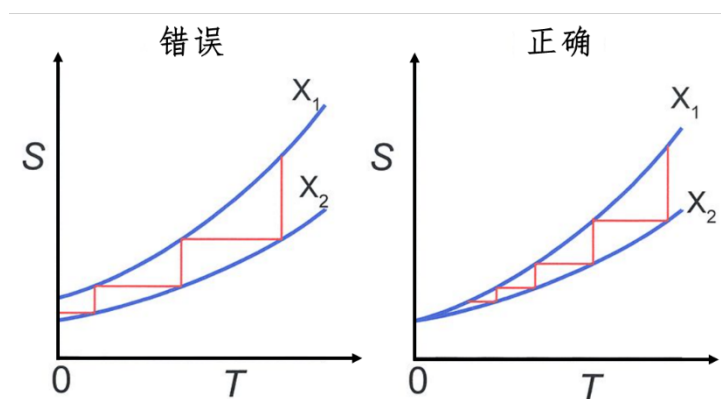


图 4.15 如果绝对零度时热力学系统的熵趋于一个定值（公式 4.37，或者公式 4.50 最右边的等号），则两种不同的热力学平衡态（对应化学反应，就是反应物状态、生成物状态，在热力学第三定律中，这个结论推广至任意两个热力学平衡态）的熵如右图所示。这是，有限次的恒温与恒熵操作（红线）无法让一个热力学系统到达绝对零度。反之，如果公式 4.37 不成立，则两个热力学平衡态的熵则如左图所示。这时，可以通过有限次恒温与恒熵操作让一个热力学系统到达绝对零度。

4.2.5 热力学第零定律

在热力学三大定律确定后，经典的热力学理论的框架已经形成。但逻辑上，所有这些讨论的一个基础还没有被澄清，就是热平衡以及温度的定义。为了弥补

²⁰³ 在这个时间节点他也正处在从哥廷根大学转聘至柏林大学工作的过程中。

这个缺陷，英国物理学家拉尔夫·福勒（Ralph Howard Fowler, 1889–1944 年）于 1939 年提出热力学第零定律。这个时间点比热力学第一定律和热力学第二定律的提出晚了八十余年。热力学第零定律的具体内容可表述为：若两个热力学系统均与第三个系统处于热平衡状态，此两个系统也必互相处于热平衡。

基于此表述，温度，这个描述热力学平衡状态的最基本的物理量，成为了一个良定义的热力学状态函数。在温度被良定义的基础上，由热力学第一到第三定律构成的热力学经典理论也彻底成型。

4.2.6 统计力学的发展以及热学相关课程的设置

热学经典理论这部分最后，我们讲一下热学、热力学、统计力学之间的关系。首先，我们需要指出热力学所包含的微观的力学理论的内容几乎没有，虽然它叫热力学。在热力学理论的提出过程中，一些抽象的概念，比如热量、能量、熵起到了重要的作用。类似概念的形成与三大由实验得到的定律相比，早期具有一定的形而上的特征。这和原子论在当时所面临的情况很相似。后来，随着热力学的深入，人们越来越认识到其客观性，并建立了相应的微观理论。以麦克斯韦、吉布斯、玻尔兹曼为代表的一批物理学家基于统计学方法、概率论，发展了一套微观物理理论。我们把这套理论称为统计力学。

统计力学的内容包括且远远大于我们在序言中提到的分子动力学。早期的统计力学理论关心的都是平衡体系的热力学问题。进入二十世纪后，一方面统计力学的发展与量子力学的发展产生了错综复杂的交叠。另一方面，人们也开始关注微扰下的非平衡统计物理，并发展了相应的线性响应理论。二十世纪中后期，人们的研究兴趣更是转移到更一般的非平衡体系。这是一个循序渐进的过程。研究

的问题，也越来越真实。现在，统计物理也是物理学的基础课程中少有的在我们可以预见的时间尺度内，还有很大发展空间的一门课程！

在国内，与热相关的物理类教科书包括《热学》(thermophysics)、《热力学》(thermodynamics)、《统计力学》(statistical mechanics，或《统计物理》statistical physics)三大类。有时，它们也会被合并为《热学与热力学》、《热力学与统计物理》。但不管怎样，没有《热学与统计物理》这样的课程。三者的关注点由现象向微观机理过渡，热力学位居其中，联系着最外层的热学与最注重微观机制的统计物理。

4.3 经典的光学理论

与力学、热学类似，人类对光学现象的认识与利用也可以追溯到人类文明的早期。按现在多数文献中人们基本形成的共识，在公元前七百年之前，在最早的两个文明中（美索不达米亚、古埃及），人们已经开始研磨与使用棱镜了。大致相同的时期，在东方，我们国家的阳燧也是一个具有这种功能的器件。它本质上就是一个聚光生火的凹面镜。按 1995 年 4 月陕西省扶风县黄堆村出土的器件来推断，距今也有约 3000 年的历史。

基于对光学现象的初步的认识进而制作实用器件的过程中以及之后，自然是需要理论的。这个不管是在西方，还是在我们中国，都是类似的。当然，同样类似的还有一个特征，就是这些早期的光学理论仅仅与光路的最简单的几何性质有关。比如，我们中学课本接触的墨子在《墨经》中利用小孔成像实验描述的现象背后蕴藏的光的直线传播原理，以及古希腊欧几里得在《光学》中描述的入射角等于反射角这样一个规律。在古希腊，还存在一些光的本质在哲学层面的思考，

比如在描述视觉产生这个现象时，有进入说与发射说的争论。中世纪后，在阿拉伯世界，伴随着政治的稳定与经济的繁荣，类似的光学理论得到了进一步的发展。比如，十世纪后期，为巴格达宫廷效劳的波斯学者伊本·沙尔（Ibn Sahl，约公元940–1000年）在专著《论点火镜子与透镜》（<On Burning Mirrors and Lenses>）里最先正确地表述出折射定律。再往后，到了中世纪的后期，玻璃制造工艺在威尼斯得到了极大程度的改良²⁰⁴。它透明、具有一定折射率、且可以被制造为任何形状，这在极大程度上加速了光学的发展。

当文艺复兴的影响从意大利传到荷兰与英国，这些工艺上的进展更是进化为更为精细的实验技术方面的发明与创新，比如复合显微镜、反射望远镜的发明。理论层面，也涌现出像笛卡尔（Rene Descartes，1596–1650年）、费马（Pierre de Fermat，1607–1665年）、惠更斯（Christiaan Huygens，1629–1695年）、牛顿（Isaac Newton，1642–1727年）这样的发展出了更为系统的理论的大科学家。作为一个重点关注科普性读物，下面，我们将从这个时间节点出发，分几何光学、波动光学两个部分来介绍光学的经典理论。这也是我国大学的物理教育里，《光学》课程的核心内容。十九世纪中后期，随着电动力学的发展，光的电磁波本质被揭示。二十世纪初，量子力学、量子电动力学的发展更是将光学研究推向了量子理论的层面。这些十九世纪中期之后的进展我们都不列入本节（经典光学理论）讨论的范畴。感兴趣的读者可在本书的第4.5.3小节、第八章、第九章寻求拓展。

4.3.1 几何光学

关于几何光学的讨论我们从十六世纪末、十七世纪初的荷兰开始。当时，很多哲学家、数学家、思想家有些是为了逃避国内来自天主教或其它传统势力的迫

²⁰⁴ 现在大家去威尼斯旅游的话，参观玻璃制造也是一个特色项目。

害，像霍布斯 (Thomas Hobbes, 1588–1679 年)、洛克 (John Locke, 1632–1704 年)，有些是为了单纯追求更为自由的环境，像笛卡尔 (Rene Descartes, 1596–1650 年)，都会选择来荷兰这个新教国家长期定居。与这个政治环境对应，物理学最新的一些进展在这个国家也是最活跃的，包括力学部分我们提到的笛卡尔、费马、惠更斯这些人。他们在早期几何光学的研究中同样发挥了重要的作用。促成这一切的基础，是前面提到的显微镜与望远镜的发明。实用性的器件会促使人们深入理解其原理，这导致了折射定律的发现。加上之前人们已经认识到的直线传播定律与反射定律，几何光学得以建立。下面，我们简单回顾这个过程。

十六世纪末、十七世纪初，荷兰人延森 (Zacharias Janssen, 1580 或 1585–1632 或 1638 年) 发明了显微镜。1608 年，他曾经的邻居，同样是荷兰人的利伯希 (Hans Lipperhey, 1570–1619 年) 向政府提交了折射望远镜的专利申请。望远镜的发明直接刺激了伽利略。1609 年，他发明自己的天文望远镜。通过观测太阳系当时已知的五大行星运动 (水、金、火、木、土) 以及月亮与太阳的运动，伽利略成为哥白尼的日心说最忠实的拥趸。之后，约 1611 年，开普勒发表了《折射光学》(<Dioptrice>) 一书，最早提出了光线和光束的表示法，并阐述了近代望远镜理论。他把伽利略望远镜的凹透镜目镜改成小凸透镜，这种望远镜被称为开普勒望远镜。这种设计大幅提高了开普勒实验的精度，也为其第三定律的提出奠定了重要的基础。

1621 年，基于一系列实验，斯涅尔 (Willebrord Snellius, 1580–1626 年) 提出了折射定律的数学表达。但这个结果在其有生之年并没有发表。1637 年，笛卡尔在其论文《光学》(<La dioptrique>) 给出了一束光从空气射入介质中，入射角与折射角关系的表达：

$$\sin i = n \sin r$$

公式 4.51

其中 r 代表折射角大小， i 代表入射角大小。对于任意两种介质，我们只需要把上式左边缺省的 1 用入射介质的实际折射率 n_1 替代，将其右边的 n 用发射折射的介质的折射率 n_2 替代，调整为：

$$n_1 \sin i = n_2 \sin r$$

公式 4.52

即可。这个定律有时人们称为斯涅尔定律 (the Snell law)，有时称为斯涅尔-笛卡尔 (the Snell-Descartes law) 定律，有时为了纪念中世纪在研究类似折射现象过程中做出过杰出贡献的波斯学者也称为伊本·沙尔定律 (the ibn-Sahl law)。

之后，为了给这个定律一个理论解释，1662 年，年迈的费马提出了一个在物理学研究中具有里程碑意义的原理：费马原理。它的基础，是费马的一个发现：光在两个点之间的传播会选取光程最短的那条。这里，光程并不等于路程，而等于其旅行所需时间乘上真空中的光速。换句话说，就是在两点传播所需时间最短的那条。但是当时，人们并不知道光的传播有多大。或许这也是费马在其表述中使用光程的一个原因。他把这个发现当作一个原理提出。很显然，它具有极值的特质。利用这条原理，费马很清晰地解释了光地直线传播定律、反射定律、折射定律 (图 4.16)。1788 年，拉格朗日扩展了这个想法，提出粒子传播的最小作用量原理。这个升级后的版本深度影响了之后物理学的发展，直到今天。比如，十九世纪人们研究的电路中电流如何分配的问题 (尤其是存在并联的时候)，最终方案就具备让电流功率最小这样一个特质。到了二十世纪中期，在阐述量子力学基本原理的过程中，费曼 (Richard Phillips Feynman, 1918–1988 年) 提出了路径积分的方法，也是这个思路下的物理学研究的进一步演化。

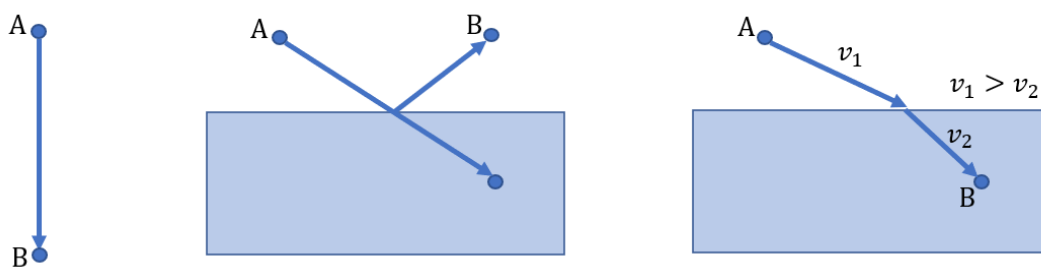


图 4.16 费马原理可以根据最小光程这个判据，从左至右，解释光的直线传播、反射、折射三个定律。

有了直线传播定律、反射定律、折射定律，几何光学的基本原则就确立了。基于这两个原则，人们可以构造各种光学器件，比如反射望远镜、折射望远镜。光路设计中的多数问题就都可以被解决了。如果介质不是均匀介质（某种介质内部的折射率在不同位置有变化），人们也可以根据费马原理，利用变分求极值的方法，找到具体的光路。

就光的本质而言，在这个时期，以牛顿为代表的微粒说和以惠更斯为代表的波动说处在一种相互竞争的状态。微粒说在解释光的直线传播、反射定律的时候是比较直接的。但对折射定律，牛顿用了一些比较拗口的方式，并不能很让人信服。同时，牛顿还在一个凸透镜与平面的边界发现了牛顿环。这是光的波动性的很好的证明。但是由于牛顿在《原理》出版后远远超出其他人的学术地位以及他的强势，微粒说在学界的影响还是占据上风的。现在回顾这段历史，除了这两条原因，另外一条不能被忽视的原因还是人们当时设计的光路都比较大，而光的波长很小，在百纳米的量级。这就导致这些光路在百纳米的空间尺度不会有变化，因此光波的波动特性也不容易被显示出来。这就造成了对微粒说提出挑战的实验结果的不足这样一个事实。类似现象在十八世纪末、十九世纪初（牛顿去世大概一百年的时候）得到了极大改变，这也导致了波动光学理论在十九世纪的兴起。

4.3.2 波动光学

在光的波动理论的发展过程中扮演了重要角色的一个人物是来自英国的托马斯·杨 (Thomas Young, 1773–1829 年)。在 4.1.4 节, 我们曾经提到过他。当时的说法是牛顿的强势致使英伦三岛在十八世纪在顶尖的理论物理与数学方面的人才产出上相较于法国表现出明显的颓势。一定程度上, 甚至出现了断档, 直到托马斯·杨的出现。

托马斯·杨年轻的时候有留学欧洲大陆的经历, 在哥廷根大学获得了医学博士, 之后回到英国。在剑桥大学呆过一段时间之后, 他成为了伦敦的一名医生。1799 年, 卡文迪许等人建立了一个叫做皇家研究所的机构 (Royal Institution)²⁰⁵, 杨于 1801 年加入。在这里, 杨从事的研究多于物理相关, 包括著名的双缝干涉实验。笔者记得高中时的老师在做这个实验的时候, 就是用一把锋利的剃须刀片在一张纸上对着一个地方连划两道。这样做的目的是为了让两个缝隙尽量近。当这个距离达到与可见光的波长可比拟的时候, 纸片后面就会出现干涉条纹。现在的高中或许实验条件比较好, 笔者在上课时问过一些同学, 他们多说用的是现成的仪器。这让笔者不由感慨在有些时候原始的、粗糙的设置会让人更加深刻的理解其中的物理。至少直到现在, 笔者都对高中的这个场景 (三十年前) 记忆犹新。

基于波动理论, 杨为其双峰干涉实验提供了令人信服的解释。当然, 这个学说也会受到微粒说的支持者的反对。十多年后, 来自法国菲涅耳 (Augustin-Jean Fresnel, 1788–1827 年) 重复了杨的双缝干涉实验, 并基于惠更斯的波动理论开

²⁰⁵ 这个不是我们常说的英国皇家学会 (Royal Society)。皇家学会是 17 世纪中期, 由波义耳等人建的。现在我们常说的皇家学会会士 (Fellow of Royal Society, FRS), 对应的是皇家学会 (Royal Society)。这里的 Royal Institution 是另外一个机构, 比 Royal Society 晚一个半世纪。当然, 因为杨的学术地位, 他同样在很年轻的时候就被选为 FRS。

始研究衍射问题。1817 年，法兰西科学院公布“衍射理论”为 1819 年数理科学的悬奖课题应该说是一个很好的推进器。菲涅耳积极地回应了这个课题，并在次年在惠更斯原理(波的每个波点的点都可以被当作一个新的波源来描述波的传播)的基础上用更加美妙的数学方法处理了干涉问题，提出了光的衍射的子波解释。改进后的惠更斯原理被称为惠更斯-菲涅耳原理。基于此，他可以很好的解释光的直线传播、干涉、以及衍射问题。

此论文投出后，虽然评委中多为光的微粒说的支持者，比如泊松 (Siméon Denis Poisson, 1781–1842 年)、毕奥 (Jean-Baptiste Biot, 1774–1862 年)、拉普拉斯 (Pierre-Simon Laplace, 1749–1827 年)，但此理论还是让评委会无法割舍。在最终产生之前，泊松提出了一个异议，因为他根据这个理论，可以预言当平行光照射一个圆板的时候，在这个圆板后面因为衍射效应，会出现一个亮斑。这是非常反常识的一个结果，之前也没有被实验报道过。他提出这个异议的初衷或许是为了为难菲涅耳，但有趣的是菲涅耳与他最有力的支持者阿拉戈 (François Arago, 1786–1853 年) 共同设计了一个实验。这个实验由阿拉戈完成，结果成功地显示出泊松的理论预测 (图 4.17)。后来，人们把这个亮斑称为泊松斑。这个问题解决后，菲涅耳顺利地获得法兰西科学院 1819 年地数理科学奖。光的波动理论也迎来了一个新的篇章。

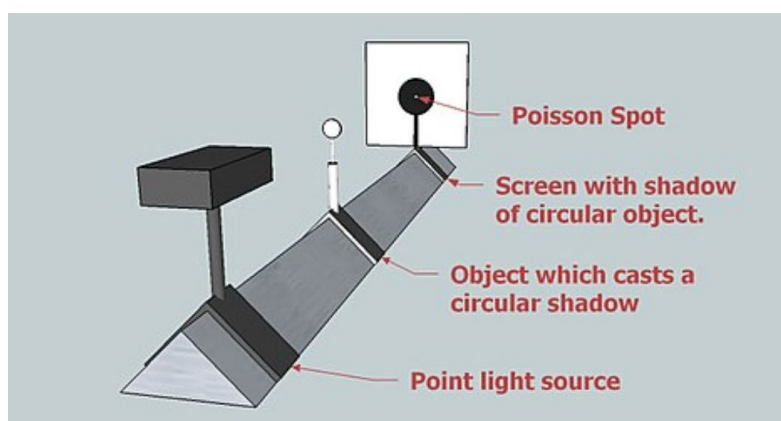


图 4.17 泊松斑的实验示意图。

既然是波，那么就要明确它是横波还是纵波。这一点，实际上早在菲涅耳的理论提出之前，就由托马斯·杨给出了回答。1808 年，法国科学家马吕斯 (Etienne Louis Malus, 1786–1853 年) 发现了光的偏振现象。但他也不是波动理论的支持者。托马斯·杨意识到需要用横波取代纵波来解释这个现象。

至此，光作为一个经典波所需明确的多数性质基本都得到了落实，剩下一点就是其传播速度的测量了。因为光速相对于人类的感知速度而言实在太快了，应用光来研究各种现象的过程中，我们需要弄清的第一个关键问题就是光速到底是有限大还是无限大？这个问题的答案在历史上最早是由丹麦天文学家罗默 (Ole Rømer, 1644–1710 年) 给出的。1676 年，他在木星卫星的运动观测中发现由于木星的掩盖耳形成的其卫星蚀的时间间隔具有不规则性。其唯一解释就是地球与木星的相对位置会事实变化，而光速有限，进而带来其卫星蚀时间间隔的不规律。基于罗默的实验观测结果，惠更斯预测光速为 2×10^8 米/秒，这在数量级上是正确的，精度在当时的条件下也是可以接受的。为了让读者有个直观的认识，下面我们借助图 4.19 进行一个说明。

木卫一是伽利略在 1610 年发现的木星的四颗卫星中最接近木星的一个。它大约每 42.5 小时绕木星旋转一周。由于它的轨道平面和地球绕太阳的轨道非常接近，在这一周内，总有一段时间它是处在木星的阴影里面的。这种现象称为木卫一蚀。由于地球距木星的距离远远大于木卫一的轨道半径，木卫一进入木星的阴影时间，总是一样的。这在图 4.19 中，对应的就是右上角展示の木卫一走入阴影与走出阴影的时间差。对于地球处在 C、D 这个区域里完成的第一次观测，与处在 E、F 这个区域里完成的第二次观测，这个走入、走出阴影的时间差是一样

的。这在图 4.18 下面对应两次观测的两个方框中，对应的都是 A、B 两个事件的时间差是相等的。这是，我们可以想象如果光速是无限大，那么在木卫一进入和走出阴影的那一刻我们地球上的人就知道。这时，对于地球上的观测者，木卫一蚀的周期就一定会是不变的，不管在哪个时刻观测。

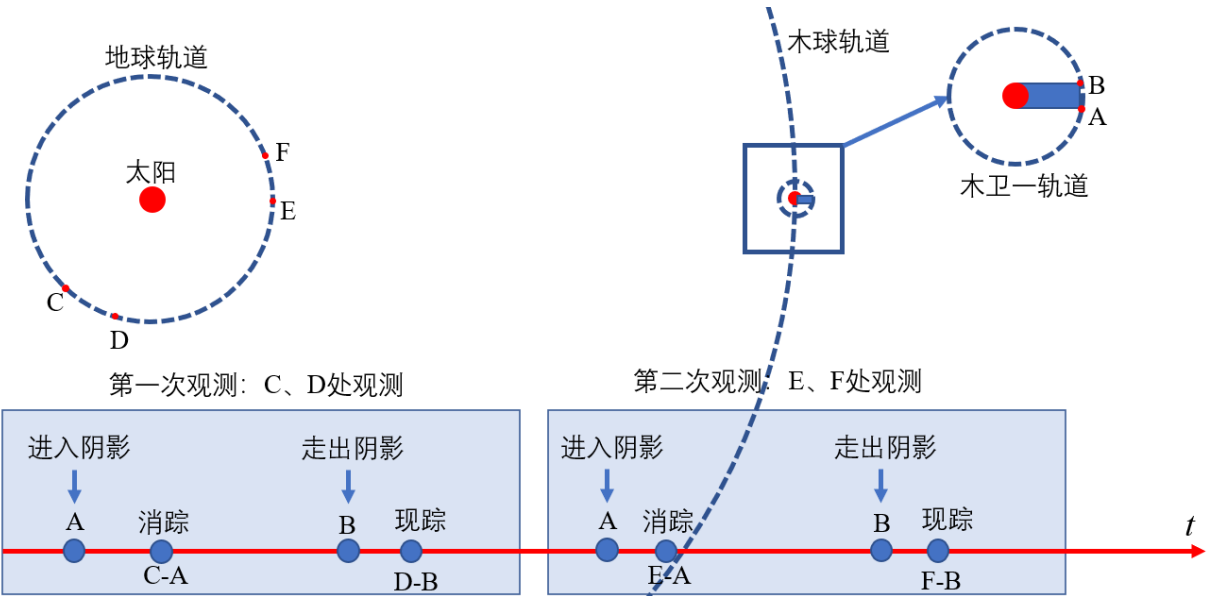


图 4.18 利用木卫一蚀的观测来测量光速的原理示意图。

但罗默发现的是两次观测的木卫一蚀的周期是会变化的。为了解释这个矛盾，他只能假设光的运动速度是有限的。这时，在木卫一进入阴影后，这个信息要传回地球，需要经历的时间就是 C、A 两个事件的距离除上光速。当地球上的观测者接到进入阴影的信息之后，他才能确认木卫一蚀这个事件开始了。在图 4.19 的第一次观测中，我们将其标记为消踪 C-A。对于木卫一走出阴影，会有观测者接受到信号这个事件，我们将其标记为现踪 D-B。实际观测到的木卫一蚀的周期，就是 C-A 与 D-B 的时间差。对于第二次观测，这个周期就是下面这个轴上 E-A 与 F-B 之间的时间差。由于第一次观测中 C 与 A 的距离与 D 与 B 的距离的差，与第二次观测中 E 与 A 的距离与 F 与 B 的距离差是不一样的，这就

造成了实际观测出的木卫一蚀的周期不同，这样一个结果。根据这样一个图像，因为地球、木星、木卫一运行轨道数据在当时已经具备，人们就可以根据观测实际位置的差别来计算光速了。

在罗默的研究之后，测量光速的技术又进行了多次改进。比如，英国天文学家布拉德雷（James Bradley，1693–1762 年）在 1725 到 1728 年之间利用恒星在一年中不同时间传到地球需要的时间的变化所带来的恒星位置的变化，测出光速约为 3.1×10^8 米/秒。这与 1973 年的国际标准值 299792458 米/秒相比已经非常接近。1748 年，他被授予科普利奖（Copley Medal）²⁰⁶，获奖理由是：On account of his very curious and wonderful discoveries in the apparent motion of the Fixed Stars, and the causes of such apparent motion（因为他关于恒星看起来变化的位置的发现，以及对这种位置变化的分析）²⁰⁷。十九世纪中期，法国实验物理学家索菲（Armand Hippolyte Louis Fizeau，1819–1896 年）与傅科（Jean Bernard Léon Foucault，1819–1868 年）摆脱天体，在地球上实现了光速的测量。他们分别利用齿轮、结合光路开展研究，最终将光速更正为 2.98×10^8 米/秒。

十九世纪末、二十世纪初，迈克尔逊（Albert Abraham Michelson，1852–1931 年）在 40 年间又先后几次改进傅科的实验方案，最终将光速定在 $2.99796 \pm 0.00004 \times 10^8$ 米/秒。1907 年，迈克尔逊因为精密测量方面的工作，同时获得科普利奖与诺贝尔物理奖。其诺奖的获奖理由是：for his optical precision instruments

²⁰⁶前面在介绍吉布斯的时候我们提到过，科普利奖也是诺奖设立之前科技界的最重要奖项，获奖名单的分量是要高于诺奖的。

²⁰⁷实际上正是因为光的传播速度有限，才使得对于地球上的观测者来说，恒星的位置会出现一些不易察觉但可以观测到的变化。布拉德雷正是因为发现了这种不易观测到的变化，理解了这种现象背后的原因，才基于此现象测量了光速。

and the spectroscopic and metrological investigations carried out with their aid (因为他的光学设备, 以及基于这些设备进行的光谱与计量研究)。

除了光的波动性的确定、光速的测量, 十九世纪在波动光学方面重要的进展还包括磁光效应的发现以及关于光谱的研究。最早的磁光效应是由法拉第在 1845 年发现的。其具体内容指的是线偏振光在透过放置磁场中的透明介质并沿着磁场方向传播时, 光的偏振面发生旋转。1847 年, 法拉第基于这个发现, 提出光是某种高频的电磁波这样一个观点。这个观点深深地启发了麦克斯韦, 也在很大程度上促成了十多年后统一的电动力学理论的诞生。而关于光谱的研究中, 值得一提的是德国物理学家夫琅和费 (Joseph von Fraunhofer, 1787–1826 年) 在 1814–1815 年之间展示的太阳光谱中的黑线。十九世纪中期, 基尔霍夫 (Gustav Robert Kirchhoff, 1824–1877 年) 和本生 (Robert Wilhelm Eberhard Bunsen, 1811–1899 年) 开始引领光谱分析这个领域, 并基于这些黑线与化学元素的对应, 将利用光谱分析鉴定化学元素发展成为一种人们广泛使用的科学手段。这些发现也会后期量子力学的发展奠定了基础。本节, 我们将经典几何光学的讨论止步于此。关于这些内容的更多细节, 后续内容中我们会适当展开。

4.4 经典的声学理论

声学是关于声音的科学。英语中 acoustic 这个词来自于希腊语的 $\alpha\kappa\upsilon\sigma\tau\iota\kappa\acute{o}\varsigma$, 意思是与“听”相关的东西。从这个词根上开来, 声学与光学是很像的, 后者在早期就是与“看”相关的东西。实际上, 我们在本章将经典物理学按力、热、光、声、电磁来总结, 也是基于这些现象与我们的感知最相关这样一个原因。按前面提到的来自冯友兰先生的“思想人生之思想”这样一个关于哲学的说法, 以人为

主体研究自然的时候，一定是从这些现象开始的。

后来，人们认识到人耳能感知的声音仅仅是声的一部分，就像可见光只是电磁波的一部分一样。同时，两者都具有波的属性。这些都是声学与光学类似的地方。但区别，也是很大的。前者是机械波，传播速度比较小，在一个大气压下约为 340 米/秒；而后者是电磁波，传播速度是光速，比它大六个数量级。同时，前者需要介质，而后者在真空中即可传播。因此，两者对应的物理，有很大差别。在理解声学现象时，不太需要相对论的知识。同时，光子与电子以及其它粒子之间的耦合更普遍。这就造成了从近一百多年的发展来看，光学的研究中的新物理相对更丰富一些。当然，近几十年，像声子晶体、拓扑声学等领域也都为我们带来了许多新的物理知识。这里，我们仅从科普的角度，相对于光学的内容先进行一个类比与对比。

中文里与“听”相关的词还是比较多的，比如声、音、乐、响。它们侧重点不同，但都与听觉有关，因此也都与声学有关。其中，有趣的是，不论是东方还是西方，最早与声学研究工作都主要集中在“音乐”或者叫“乐律”方面。这或许与美学也是哲学最早的一个分支相关，毕竟“乐律”和“美”都是人类比较容易意识到的与我们的生活密切相关的重要东西。在古希腊，毕德格拉斯在公元前六世纪就企图用正整数的比值（正有理数）来理解乐律。而在中国，公元前三世纪的《吕氏春秋》中也有“黄帝令伶伦取竹作律，增损长短成十二律；伏羲作琴，三分损益成十三音”的记载。这两者不管是时间还是内容上，都有很强的相似性。除了音律，在关于声音的本质问题上，公元前三世纪，亚里士多德指出它是由挤压气体的挤压与扩张引起的。在我国，关于共振现象，在《庄子·徐无鬼》中，也有“鼓宫宫动，鼓角角动，音律同矣”的记载。

先秦与古希腊之后，关于声学的研究持续进展，但略显缓慢。在公元前 25 年，在古罗马建筑师维特鲁威（Marcus Vitruvius Pollio，约 80 B. C.—约 25 B. C.）出版的《建筑十书》（<De Architectura>）中，有建筑声学的内容。公元六世纪，我国南朝时期的梁朝，周兴嗣将自己收集到的前朝王羲之书写的一千多个单字编做《千字文》。其中，也有“空谷传声，虚堂习听”的句子，对应的是回声和混响的现象。十一世纪，宋朝的沈括在研究声源形状与声音的关系时发现扁形的钟“声短则节”，圆形的钟“声长则曲”，两者发声之后振幅衰减程度存在差异。同时，在《梦溪笔谈》中，他也有利用共振现象制造某种仪器的记录，见“先调诸弦令声和，乃剪纸人加弦上，鼓其应弦，则纸人跃，他弦即不动。声律高下苟同，虽在他琴鼓之，应弦亦震，此之谓正声”。但整体而言，在这一千多年间，由于科学整体发展缓慢，声学的进展相对于古希腊与先秦，以及科学革命和科学革命之后的时间，是缓慢的。

具有相对严格的科学属性的声学研究，与前面提到的力学和热学一样，也是从伽利略开始的。在《两个世界的对话》中（全称是《关于托勒密和哥白尼两大世界体系的对话》，<Dialogue Concerning the Two Chief World Systems>，有时也简称《对话》），他在研究单摆和弦的运动时特别强调了频率的重要性。与声音相关的振动相对光波的振动来说，很容易被感知。因此，声音与振动相关这样一个概念，在当时就已经很流行了。与《对话》出版差不多同时，来自法国的伽桑狄（Pierre Gassendi，1592 – 1655 年）就利用枪声测量了声音的传播速度。他的假设是发枪是产生的火花人可以瞬时看到，但声音需要一定时间才能传到远处的人的耳朵里。这和我们先看到闪电再听到雷声，以及跑 200 米的时候先看到发令枪的烟再听到枪声是一个道理。同时期，来自法国的梅森（Marin Mersenne，1588 – 1648 年）也

用类似实验测量了声速。同时，梅森在 1636 年还出版了一本声学方面的专著《和声书》(<Harmonicorum Libri>), 系统讨论了振动与声音之间的关系。因此, 他也被称为声学之父。当时声速的测量值都为四百多米每秒。之后, 经过几百年测量技术的改进, 人们知道的一个标准大气压下的声速约为 331.45 ± 0.05 米/秒。

伽利略与梅森之后, 牛顿也对声学进行了系统的研究。在《原理》中, 他就借助于自己发展的力学, 推导出声速等于压力与密度之比的平方根。基于这个公式, 可以得出声速约为 298 米/秒。这比现在我们知道的准确值要小, 比当时人们的测量值小得更多。为了解决这个问题, 1816 年, 拉普拉斯把声音在理想气体中的传播当作一个热力学绝热过程(前面提到过, 也就是体系与外界没有热量传递), 而不是牛顿认为的等温过程(也就是体系的温度保持恒定)。这样, 就会有一个定压比热与定容比热的比值所贡献的修正项。修正后的结果就与实验观测比较接近了。

除了声速, 比牛顿稍微晚一些, 法国物理学家索沃尔 (Joseph Sauveur, 1653 – 1716 年) 对频率和音高之间的关系以及拉伸弦中的波也进行了详细研究。我们需要指出的是从牛顿和索沃尔的研究(十七、十八世纪之交)到拉普拉斯提出的修正(1816 年)这一百多年间, 以法国为中心在整个十八世纪蓬勃发展的连续介质力学、流体力学为声学的发展提供了强力支持。其中, 欧拉、达朗贝尔、拉格朗日、拉普拉斯都发挥了重要的作用。比如, 声波的波动方程在一维情况下是有通解的, 这个通解在 1747 年由达朗贝尔给出。它为人们研究一维体系中各种波的传播提供了便利。声音在连续介质模型与液体与气体中的传播, 更是离不开连续介质力学与流体力学。而达朗贝尔提出的一维系统中弦振动与波传播问题, 也可以推广至二维系统(比如膜振动)、三维系统(比如电磁波、声波在体材的传播)。

在给定初始条件与边界条件的情况下，人们利用微分方法，对声学问题进行了系统的研究。但整体而言，十八世纪的声学研究还是集中在人耳可以感知的频率范围内。

进入十九世纪，来自法国的萨伐尔（Félix Savart, 1791 – 1841 年）利用风机和旋转齿轮在 1830 年做了一系列研究，确定人耳对声音的感知频率为 8 到 24000 赫兹²⁰⁸。人们产生这些认识的一个理论基础（也可以说是理性思考方面的基础）是傅里叶（Jean-Baptiste Joseph Fourier, 1768 – 1830 年）发展的频谱分析方法。之后，声学研究进入成熟期。十九世纪五十年代，美国科学家勒孔特（John LeConte, 1818 – 1891 年）发起了关于超声波的研究。当时，他使用的是气体火焰来探测超声波的存在。1863 年，亥姆霍兹（Hermann von Helmholtz, 1821 – 1894 年）发表了其在声学研究中的代表作《论音调感觉作为音乐理论的生理基础》（<On the Sensations of Tone as a Physiological Basis for the Theory of Music>），不光利用物理，还利用心理与解剖学对声的本质进行了系统的研究。1877 年，瑞利爵士（John William Strutt, 3rd Baron Rayleigh, 1842 – 1919 年）将之前 300 年人们关于声学的研究进行了系统的总结，完成了两卷《声学原理》（<The Theory of Sound>）。这两部著作在目前的声学原理研究中，依然扮演着重要的角色。

声波探测方面，1880 年，法国的皮埃尔·居里（Pierre Curie, 1859–1906 年）和他的哥哥雅克·居里（Jacques Curie, 1856–1941 年）发现压电效应（对某类晶体施加机械压力，可以在其表面上得到电荷）。这项技术很快被应用到声波的探测中。二十世纪初，电子振荡器与放大器的出现，又使得声波技术得到了迅猛的

²⁰⁸ 当时用的单位是振动每秒，等同于我们现在用的赫兹，但当时赫兹（Heinrich Rudolf Hertz, 1857–1894 年）还没有出生。

发展。之后，声学研究和物理相关的原理性的东西相对成熟，研究重点也逐步转向应用，特别是与军事、医学、音乐、水文与地学研究相关的应用，相关领域包括：水声学、固体声学、环境声学、检测声学、功率超声、超声电子学、音频工程、生物医学超声工程、语言听觉和音乐声学等。就物理学的基础理论研究而言，与力、热、光、电磁等现象略有不同的是与声音相关的物理在二十世纪初的物理学革命者没有扮演同样重要的作用。但物理学革命之后的物理学研究中，与声学相关的新物理依然存在并保持活跃，比如声子晶体、声子拓扑学等。近年来，随着物理学研究中像凝聚态物理这种学科所能描述的体系向着更加真实的方向的发展，我们也期待声学研究为我们带来更多物理上的惊喜。

4.5 经典的电磁学理论、电动力学

力、热、光、声之后，与我们人类对身边的物理现象的感知直接相关的就剩下电和磁了。在时间轴上，虽说古希腊的时候就有泰勒斯关于用琥珀摩擦布会吸引羽毛这样的现象的记录，我国的四大发明也包含司南（指南针，与磁学密切相关），但电学与磁学的系统研究开展地整体还是比较晚的（比力学和光学要晚，和热学差不多同时）。十八世纪末，相对系统的学说开始出现，之前更多的是定性的观察与琐碎的知识。但这些理论开始发展后，迅速成熟，并在十九世纪六十年代以麦克斯韦方程组这种统一的、力学的理论形式呈现。在本节，我们对十九世纪末、二十世纪初之前的电磁经典理论的回顾整体将按：电与磁的各种现象与学说、电磁转换、电动力学三小节来展开。

4.5.1 电与磁的各种现象与学说

在人们对电学现象的认识过程中，摩擦起电机发挥了重要的作用。十七世纪六十年代，在力学研究中设计并进行了重要的马德堡半球实验的德国科学家冯·格里克（Otto von Guericke, 1602–1686 年）基于一个可以绕某固定轴旋转的硫磺球，制造了第一台摩擦起电机。利用这种摩擦起电机，人们可以产生稳定的静电，并利用它进行系统的实验。这大大加速了电学研究的发展。1720 年，来自英国的格雷（Stephen Gray, 1666–1736 年）在研究电的传导现象的时候，发现在传导电荷时，有两种物质的表现完全不同。它们分别对应我们现在知道的导体与绝缘体。之后，他又系统地研究了带点体靠近一个物体时这个物体的响应，发现了电感应现象（图 4.19）。

1733 年，法国化学家杜菲（Charles François de Cisternay du Fay, 1698–1739 年）经过实验区分出两种电荷。他将其称为松脂电和玻璃电。这是我们现在说的负电与正电。同时，他还总结出同性相斥、异性相吸的规律。这两个发现再往后，大约在 1745–1746 年，来自德国的牧师克莱斯特（Ewald Georg von Kleist, 1700–1748 年）与来自荷兰莱顿大学的科学家穆森布洛克（Pieter van Musschenbroek, 1692–1761 年）分别地发明了一种储存静电核的瓶子。这个瓶子后来被人们称为莱顿瓶。莱顿瓶与摩擦起电机一样意义重大，也为电的实验研究提供了便利。再往后几年，1752 年，来自美国的富兰克林（Benjamin Franklin, 1705 或 1706–1790 年）对放电现象进行了研究。他冒着生命危险做了著名的风筝实验，发明了避雷针。至此，人们对电荷、电荷转移以及与之相关的自然现象的初步研究告一段落。下一步很自然，就是更为定量的描述电学现象的系统性的理论的发展。

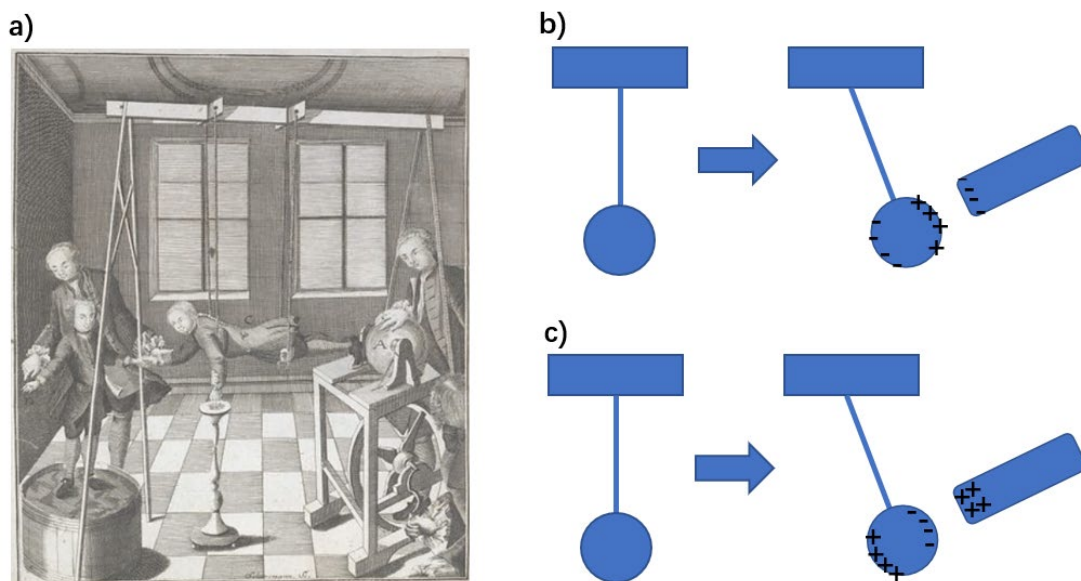


图 4.19 a) Flying boy 的演示实验示意图，b) 这个演示实验对应的物理机制，当带电物体带负电的时候；c) 这个演示实验对应的物理机制，当带电物体带正电的时候。在 a) 中，一个小男孩被用丝线悬挂于空中，丝线的目的是为了绝缘。他的脚连接着摩擦发电机。因此，当摩擦发电机工作的时候，小男孩被充电。为了增加节目效果，这个小孩还会用手拉着另一个站在木桶上的小孩。这个小孩站在木桶上也是为了防止电荷被导到地下。第一个小孩被充的电荷在他们拉手时，会被传到第二个小孩。第二个小孩这时会把手靠近一个羽毛、纸屑等物。在他不接触这些东西的时候，这些东西也会因为静电作用力产生运动。b) 和 c) 对应的是其物理机制。

在描述电荷之间相互作用的学说中，法国物理学家库仑 (Charles-Augustin de Coulomb, 1736–1805 年) 提出的库仑定律是最为成功的一个。十八世纪七十年代，他在研究毛发与金属丝的扭转弹性的过程中发明了扭称。基于这个发明，在 1785 到 1786 年间，他测量了电荷之间的相互作用，并且从牛顿的万有引力定律得到启发，用类比的方法得到电荷之间相互作用力与距离的平方成反比、与电荷大小成正比的规律。这个规律后来被称为库仑定律，形式如下：

$$\mathbf{F} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \mathbf{e}_r$$

公式 4.53

其中 $\mathbf{e}_r$ 为两个电荷之间连线的受力方向外的单位向量。在此之前，有说法是丹尼尔·伯努利（Daniel Bernoulli, 1700–1782 年）提出过静电作用力与距离成反比的思想、卡文迪许（Henry Cavendish, 1731–1810 年）也对静电力的规律做过类似测量。如果大家对力学部分的介绍有印象，卡文迪许（Henry Cavendish, 1731–1810 年）之后也有过类似工作，也就是对万有引力常数的测量。那个实验是在 1798 年，也是基于这个扭称完成的。因为万有引力相对更弱，对精度的要求要更高一些、实验在技术层面的挑战也更大一些、完成的时间节点也晚一些。

有了静电的产生与存储、有了静电间相互作用力，下一步电学研究的进展是从静电到电流。这方面最重要的代表人物就是伏特（Alessandro Giuseppe Antonio Anastasio Volta, 1745–1827 年）。在他之前，生物学家伽伐尼（Aloysius Galvani, 1737–1798 年）在一次偶然的解剖青蛙的实验中（约 1780 年）发现电火花可以诱发已经死去的青蛙腿的痉挛。基于此，他做了一系列的实验，并借鉴 1772 年英国科学家华尔士（John Walsh, 1726 – 1795 年）在研究电鳗的时候发现的其发的电是来自于体内的发现²⁰⁹，引入动物电（同样来自体内）的概念来解释动物的肌肉运动。这些实验深度影响了比他略微年轻的伏特。他认真重复了伽伐尼的实验。但与伽伐尼不同，伏特将莱顿瓶存储经青蛙的身体进行释放，发现青蛙也发生了痉挛。也就是说来自外部的电流也可以诱发肌肉的运动。为此，伏特与伽伐尼进行了长期的论战。在这个论战过程中，伏特发明了伏特电堆、伏特电池。这些发明为人类研究电学现象提供了稳定的电流，为人类了解电流的规律和电流可以产生的各种效应了基础。电学研究也进入了一个飞速发展期。1794 年，伏特同样获得科普利奖的奖励。

²⁰⁹ 华尔士也因此获得 1773 年的科普利奖（Copley Medal），这个奖的分量我们前面提到过。

4.5.2 电磁转换

在研究电流的过程中，电流本身的规律与电流所诱发的各种效应的发现应该说是交叠产生的。这个时间节点集中在十九世纪初。比如，来自德国的物理学家欧姆（Georg Simon Ohm, 1789–1854 年）在 1827 年发表的《直流电路的数学研究》（<Die galvanische Kette, mathematisch bearbeitet>）中报道了著名的欧姆定律，给出了电流、电压及电阻之间的基本关系²¹⁰。而在此之前，1820 年，来自挪威的物理学家奥斯特（Hans Christian Ørsted, 1777–1851 年）就意外地发现载流导线的电流会作用于旁边的磁针，使磁针改变方向。这个发现的意义是如此的巨大以至于当年他就被授予科普利奖，获奖理由是“*For his Electro-magnetic Discoveries*”。

奥斯特的这个发现传到巴黎，立刻引起了法国物理学家安培（André-Marie Ampère, 1775–1836 年）的注意。安培从力的角度思考了这个问题，提出了著名的安培右手定则。同时，他利用这个定则与实验，研究了两个平行的导线之间的受力情况以及螺丝管导线产生的磁性。基于这些系统的实验研究，1822 年，安培以严谨的数学变数了电流产生磁力的基本定律，即安培定律。同时，他还提出了极其超前的环状分子电流假说（图 4.20）。该假说认为磁铁的磁力从本质上讲和电流产生的磁力是一样的。对于宏观物体，内部实际上是由微粒组成的。每个微粒都有一个环状电流，它们的作用就是一个小磁针。当这些小磁针无序排列的时候，系统没有宏观磁性。当它们有序排列的时候，系统体现出宏观磁性。如果我们考虑电子是在这个假说提出七十多年之后才被发现，以及这个假说提出一百年之后楞次（Wilhelm Lenz, 1888–1957 年）和伊辛（Ernst Ising, 1900–1998 年）才

²¹⁰这个工作受到了法国物理学家傅立叶（Joseph Fourier, 1768-1830）关于热流研究的巨大启发（导热杆的热流正比于两端的温度差，将温度差类比于电压）。1841 年，欧姆也因为这些工作获得了科普利奖。

提出了我们现在说的 Lenz-Ising 模型来解释磁性与相变,我们真的不得不感慨这个假说的前瞻性!

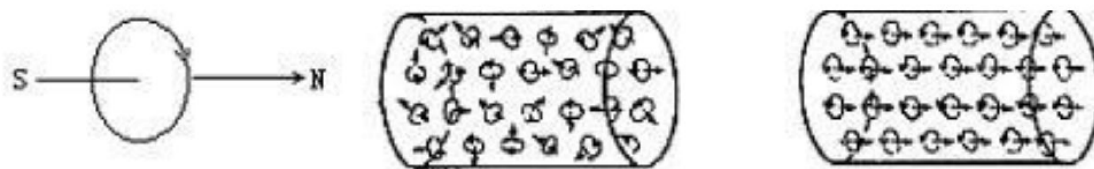


图 4.20 安培的环状分子电流假说的示意图。微观电流产生磁场（左），当微观磁场无序排布时系统不体现出宏观磁性（中），微观磁场有序排布时系统体现出宏观磁性（右）。

同时，既然电流可以产生磁场，磁场是否也可以产生电流？紧跟着奥斯特，针对这个问题，不少人也做了很多实验。其中英国物理学家法拉第（Michael Faraday, 1791-1867 年）与美国物理学家亨利（Joseph Henry, 1797-1878 年）的贡献尤为突出，特别是法拉第。法拉第是一位伟大的实验物理学家，他提出了著名的法拉第电磁感应定律，用磁通的变化解释了感应电动势。这为后来人类大规模利用电力提供了基础。人们也利用这个理论发明出感应发电机。相应地，西方的工业社会也从蒸汽时代进入了电气时代。同时，他还利用铁粉实验，形象地证明了磁力线地存在。他指出这些磁力线不仅仅是几何的，而且是一种物理性质的客观存在。电荷或者磁极周围并不是想人们之前想象的那样一无所有的，或者虚空，而是存在着力线与场的。这种理解也为后来麦克斯韦（James Clerk Maxwell, 1831-1879）提出麦克斯韦方程组打下了坚实的基础。

4.5.3 电动力学

在前面提到的这些实验现象与理论的基础上，到了十九世纪中期，人们就开始像当年牛顿寻求力学的统一理论那样寻求一个电、磁学的统一理论了。这个过

程中，前面提到的安培、法拉第、高斯（Carl Friedrich Gauss，1777–1855 年）²¹¹、威廉·汤姆孙（后来的开尔文爵士，William Thomson, 1st Baron Kelvin，1824–1907 年）、麦克斯韦都发挥了重要的作用。我们这里简单讲一下法拉第、威廉·汤姆孙、麦克斯韦的贡献。

首先是法拉第。除了前面提到的电磁感应定律，1845 年，他还发现了一种磁光效应。具体而言，就是在介质内对于线偏振光而言由于光波与外磁场的相互作用光的偏振平面会旋转，其旋转角与磁场沿光波传播方向的分量呈线性正比关系这样一个实验发现。这个发现意味着除了之前人们知道的电流、磁场之间的相互关系，光也具备电磁场的本质。它的一个寓意是光学研究可以与电磁研究结合，这也是电动力学这个统一理论的产生的一个哲学层面的基础。

除此之外，从 1839 年开始到 1855 年，法拉第将自己进行的电磁学实验进行汇总，出版了三卷《电学实验研究》。由于他出身相对贫寒，幼年并没有接受非常系统的数学训练，在他的著作中，他总会想尽办法借助图形与简单的语言来表达高深的物理规律。这也使得他的实验报告非常易读，并且能够为人们带来很多深思。比如，他会非常形象地用力线来描述电磁作用，认为电荷和磁极旁边充满了电力线与磁力线。通过电力线与磁力线，人们可以很直观得理解电与磁之间的耦合以及场的存在。在研究电介质对电力的影响时，他指出电力不可能是超距作用，而是通过某种场的状态的变化传播的。

在这些表述中，图像化的部分能够解释一些人们已经知道的基本方程，比如高斯定律（电力线的散度等于电荷数），它后来也演化为麦克斯韦方程组最终表达的四个方程中间的一个。高斯定律蕴含了电势的概念，其梯度直接对应电场强

²¹¹ 高斯定理实际上已经对应了现代形式的麦克斯韦方程组中四个方程的一个。

度。这个势以场的形式弥漫与整个空间，既深刻，又直观。但同时，法拉第也意识到还有一个很重要的量，他把它为电紧张态，这个量会在电磁转换中扮演重要角色，却一直缺乏明确定义。在《电学实验研究》中，法拉第甚至前后使用了多个名词来描述这一性质，包括：奇特态 (peculiar state)、张力态 (state of tension)、奇异状态 (peculiar condition) 等。正如杨振宁先生在《晨曦录》中所言：直到 1854 年时法拉第 63 岁，此后他不在编写《电学实验研究》，但是直到那时，他的几何直觉——所谓电紧张态，还缺乏明确定义，显得难以捉摸【杨振宁、翁帆，2018】。

在人们对这个量的认识过程中，威廉·汤姆孙与麦克斯韦均扮演了重要的角色。首先是威廉·汤姆孙，他于 1851 年提出了矢量势的概念，并将磁场表达为它的旋度。麦克斯韦深受启发，通过三篇文章建立了电动力学。第一篇文章名为《法拉第的电紧张态》，发表于 1856 年。这里，他指出威廉·汤姆孙提出的矢量势就是法拉第之讲的电紧张态。同时，他将电场强度与矢量势的瞬时变化联系了起来。这样，基于之前威廉·汤姆孙提出的：

$$\vec{H} = \nabla \times \vec{A}$$

公式 4.54

以及麦克斯韦在这篇文章中提出的：

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

公式 4.55

人们很容易得到：

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

公式 4.56

这对应的就是法拉第定律。有了矢量势、标量势，电磁现象利用场来进行统一的

描述就有了基础。

之后，1861–1862 年之间，他又发表了名为《分子涡流理论应用于静电学》的文章。这篇文章给出了一系列重要的结论，包括安培定律的场的表述，以及光是某种媒质的横向波动而这种媒质正是产生电磁现象的同一媒质。第三篇文章发表于 1865 年，给出了最早的麦克斯韦方程组，具体如图 4.21 所示。其中，前六个如果写成分量的形式将有 18 个方程，最后两个是单独的。因此，当时的方程有 20 个。十九世纪末期，亥维赛 (Oliver Heaviside, 1850–1925 年)、吉布斯 (Josiah Willard Gibbs, 1839–1903 年)、赫兹 (Heinrich Rudolf Hertz, 1857–1894 年) 对其进行了整理。整理后的方程组中矢势 $\vec{A}$ 可以被消去。整个方程也简化为四个，并展示出高度的对称性，具体如图 4.22 所示。因此这个历史原因，这四个方程形成的方程组有时也被称为 Hertz – Heaviside 方程组或 Maxwell – Hertz 方程组。但更多的时候，人们还是直接讲其称为麦克斯韦方程组。

(A) The law of total currents	$\mathbf{J}_{\text{tot}} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$
(B) The equation of magnetic force	$\mu \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}$
(C) Ampère's circuital law	$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_{\text{tot}}$
(D) Electromotive force created by convection, induction, and by static electricity. (This is in effect the Lorentz force)	$\mathbf{E} = \mu \mathbf{v} \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi$
(E) The electric elasticity equation	$\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon} \mathbf{D}$
(F) Ohm's law	$\mathbf{E} = \frac{1}{\sigma} \mathbf{J}$
(G) Gauss's law	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$
(H) Equation of continuity	$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ or $\nabla \cdot \mathbf{J}_{\text{tot}} = 0$

图 4.21 麦克斯韦方程组最初的形式。这些方程中，前六个如果写成分量的形式，将有 18 个方程。最后两个是单独的。因此，当时有 20 个。

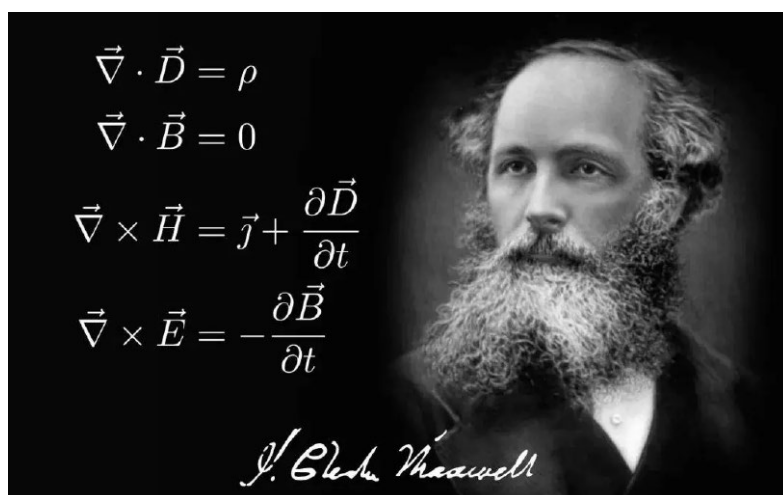


图 4.22 现代的麦克斯韦方程组。

除了统一了当时的电磁理论与光理论,麦克斯韦方程组另一个极其重要的意义在于它第一次清晰的阐明了场论的概念基础:能量储藏在场中。1886 年,赫兹从实验上证实了麦克斯韦方程组的一个重要结论:电磁波可以被一个电流回路激发并被另一个电流回路检测到。也正是因为这些深刻的物理内涵(对物质世界的本质的认识的加深),麦克斯韦成为继牛顿之后最伟大的物理学家。当然,后期会被爱因斯坦超过。在物理学革命那一章,我们会更加详细的介绍。

第五章 一些关键的数学进展

回顾完经典物理学理论的发展，按照物理学理论发展的时间顺序，我们下一步我们就应该讲十九世纪末、二十世纪初的物理学革命了。但考虑到介绍物理学革命的教材已经很多，并且很多教材讲得也非常专业、非常细，出于创新性的考虑，我们想尝试从另一个角度来审视物理学的这个关键进展。

我们采取的角度是在讲这段关键的历史之前，先总结一下人们在数学与哲学上取得的成就，因为这是他们需要的知识储备²¹²。同时，我们也会讨论一下十九世纪的欧洲大学，因为这是在物理学革命中做出贡献的科学家们工作的场所。这些，应该说都是物理学完成由经典理论向量子力学、相对论转变(即物理学革命)的关键的准备。在前言部分，我们提到过笔者对《今日物理》课程三要素的总结是：物理学史、物理学的哲学属性，以及今日的前沿物理学研究的介绍，我们也强调物理学是有一定的人文特质的。这里，我们在讲物理学革命前进行这些准备，应该说也是尊重物理学史、物理学的哲学属性、物理学的人文特质这样一个整体思路的一个体现。在本章，我们首先从数学说起。后面两章，再讲哲学与大学这样的学术环境的营造。

自然的语言是数学。因此，在牛顿建立经典力学的过程中，他寻求的也是自然哲学的数学原理。在牛顿之前，数学已经完成了一些关键的发展与转变，比如

²¹²就像 8.4.2 小节我们会介绍到的，海森堡把他那边关键的文章送给他当时的导师玻恩。玻恩在把它寄出之后的 1925 年 7 月 10 日的早上，忽然意识到海森堡在描述他所提倡的新的“运动学”的时候使用的运算规则，恰恰就是自己在布雷斯劳读大学的基础课的时候自己的数学老师罗萨内斯给他讲的矩阵。这里，罗萨内斯绝对不是一个在数学史上很重要的人物，但他所掌握的十九世纪的新数学（线性代数）很合适地影响了矩阵力学的建立。

算术、几何、代数、解析几何都已建立²¹³。牛顿与莱布尼茨的贡献是同时提出了微积分的思想。在牛顿之后的十八世纪，微积分理论逐步完善、偏微分方程与变分原理、泛函方法也得到了关键的发展，而分析手段也开始发展并在十九世纪下半叶彻底成熟。比这些数学理论再抽象一些，线性代数、群论（主要是有限群理论）、非欧几何在十九世纪得到了迅猛的发展。在十九世纪下半叶，微分几何、李群李代数、拓扑学方法也逐渐起步。进入二十世纪，这些理论相互之间由开始融合，李群李代数建立在几十年后更是成为物理学理论研究中不可或缺的方法。

这些内容，我们在很多教材上都接触过。但需要指出的是，数学的发展史整体遵循的是理论方法从简单到抽象的规律。而我们的课程学习，由于多数时间关注的是知识点的传授，经常会忽略这一点。在笔者看来，这是要反复向学生强调的。以微积分与线性代数为例，它们都是我们进入大一的时候就必须学习的课程，后面的很多课程的学习都需要用到。但我们必须知道这两门课最核心的思想是在完全不同的时间节点成熟的！微积分最核心的思想是微分与积分属互逆操作，这个是牛顿与莱布尼茨在 1680 年左右提出的。虽然我们总说微积分严格化需要等到十九世纪末数学分析这个学科彻底成熟的时候，但微积分核心思想的提出的时间节点就是十七世纪末。当时，基于笛卡尔在更早一些（十七世纪上半叶）建立的解析几何，再引入微分方法来分析太阳系的行星绕太阳运动时切线与径向的速度与加速度，牛顿方程建立所需要的数学基础就已经完备了。

相比于微积分，线性代数则要抽象很多，虽然从莱布尼茨开始人们就有解线性方程组的尝试。在十八世纪，贝祖（Étienne Bézout, 1730 – 1783 年）、范德蒙德（Alexandre-Théophile Vandermonde, 1735 – 1796 年）、拉普拉斯（Pierre-Simon

²¹³ 这些整体对应的是我们进入大学之前学习的数学。

Laplace, 1749–1827 年) 系统地发展了行列式理论, 但线性代数的核心思想“矩阵”则是直到十九世纪中叶才由西尔韦斯特 (James Joseph Sylvester, 1814 – 1897 年) 提出的。之后, 他的朋友凯莱 (Arthur Cayley, 1821 – 1895 年) 定义了行列式表示法、矩阵加法、数乘、乘法、次方、单位矩阵、零矩阵和逆矩阵。矩阵理论这个线性代数的核心才得以完成, 它是二十世纪发展起来的量子力学的数学基础。

从数学方法的抽象性来讲, 线性代数和有限群理论是一个层级的, 比微积分要抽象很多。

之后, 从十九世纪中叶开始, 矩阵理论、非欧几何、微分集合、李群李代数、拓扑学这些数学方法的建立, 到二十世纪初物理学革命的完成, 大家应该一方面能体会数学方法的发展对物理学发展的重要性, 另一方面也能体会数学理论就抽象性而言的层级的进一步提高。这些, 都是笔者在作为一个学生在进行物理学专业的学习的时候没有意识到。作为一个结果, 在面临一些数学课程的学习的时候, 要么完全不知道这门课是怎么来的, 可以做什么? 要么就被吓得完全不敢学了。笔者到了现在这个年纪, 想起这些, 都会觉得非常的遗憾。因此, 我们也会在本章特别强调这些“非知识点的观点性”的内容。

基于上述考虑, 笔者将从: 1) 几何学、代数学的发展及解析几何的建立; 2) 微积分、常微分方程、偏微分方程、泛函 (变分) 方法、复变函数理论的发展及其在物理学研究中的应用; 3) 线性代数、群论的发展及其对后期物理学的影响; 4) 非欧几何、微分几何、李群李代数、拓扑学的发展及其对后期物理学的影响, 四个部分展开本章的讨论。最后, 在第五节, 我们会强调一下传承在数学的发展过程中发挥的重要作用。实际上, 包括我们物理学、我们的兄弟学科化学在内的很多自然科学的分支学科也都有这个的性质。由于数学的基础性, 本章涉

及的很多人物大家在基础教育阶段应该都听说过。这是由数学的基础性决定的。借助这个优势，笔者也希望我们完成了高中学习即将进入大学的那部分读者能够初步体会一下人类文明史的画卷，不要考完试就把之前花了很大经历学到的东西丢掉。在今后的学习、工作、生活中，脑子里面有这样一个画卷总是一件有用且美好的事情。

5.1 算术、几何、三角、代数的发展以及解析几何的建立

5.1.1 算术、几何、三角

从一开始，数学就是人类描述自然的语言。它的发展，一直是也是遵循由简单到复杂、由直观到抽象、由片面到系统的规律来进行的。最早，人们认识到的就是简单的数。像两河流域、古埃及、古希腊，还有我们的先民，都有结绳计数、算筹这样的发明。有理数，也在很早的时候就出现了，它与分配相关。这些数学内容对应的数学形式是算术（Arithmetic）。它们研究的，是数的性质及其运算规则。把数和数的性质、数和数之间的四则运算在应用过程中的经验累计起来，并加以整理，数学中最古老的一门分支就很自然地建立了。

因为简单与基础，算术这个分支也支撑了自然哲学中人类对自然的最早的认识。数学上所有之后的理论都是以算术为基础的。在小学时代，我们的数学课也叫算术课，这个和我们人类对数学的认识过程都是对应的²¹⁴。1946年，当第一台电子计算机ENIAC诞生后，像冯·诺伊曼（John von Neumann，1903–1957年）这种伟大的逻辑学家瞬间认识到的也是电子计算机在算术计算中远超人类的能力。

²¹⁴之后，才是几何、代数、解析几何、微积分、概率论等等。相信很多读者在孩提时代，都有爸妈辅导自己理解加、减、乘、除这些算术运算的美好记忆。

力。进而，开始积极提倡利用其解决数学问题。我们在科学研究中利用计算机，一般也会经历一个建立代数方程（Algebra）、写出算法（Algorithm）、实现程序（Programming）的过程。其中的后两部，就是讲一个代数问题简化为算术问题，再交给计算机。所有这些，无不彰显着算术这个数学上最古来的分支在其中的基础地位。

后来，随着文明的发展，人类进入农业社会。在农业文明中，由于粮食的产量正比于土地的面积，土地丈量也成为了非常实际的需求。相应的，在数学上，除了相对简单的算术，几何也得到发展。需要指出的是，关于图的研究与关于数的研究从开始就是相互促进的。比如，正方形对角线长度的测量带来了无理数。除了丈量土地，天文、航海、以及这些应用中相关理论的提出也极大地促进了几何的发展。最初的几何，就是将规则的点、线、面、体的关系规定住。这些我们在第二章都有介绍。圆、椭圆、抛物线、各种多边形，在当时都是很难处理的几何问题。针对这些问题，人们发展出穷竭法，这是最早的极限的概念【布雷苏，2022】。希腊的城邦文明后期，衔接泛希腊化时期，在地中海区域，一批数学家以埃及的亚历山大城为中心活动，系统性的几何理论被欧几里得（Euclid，生活在公元前 300 年左右）总结为《几何原本》。这是人类历史上第一次从几条公设出发完成的一个系统的理论。它的影响是如此的巨大，以至于科学革命中像牛顿这样的人在写作《自然科学的数学原理》的时候，也是以《几何原本》为榜样来进行构思的。除了《几何原本》，阿波罗尼奥斯（Apollonius of Perga，约公元前 262-190 年）的《圆锥曲线论》也是极具影响力的著作【Lloyd, 2021】。

泛希腊化时代之后，罗马帝国统治了地中海区域，古希腊文明逐渐衰退，欧洲历史进入罗马帝国时期。公元四世纪，基督教在罗马帝国被定为国教，古希腊

式的学校开始逐渐荒废，数学也开始衰落。像帕普斯 (Pappus, 约 300–350 年)、塞翁 (Theon of Alexandria, 335–405 年)、希帕蒂娅 (Hypatia, 约 350–370 年出生, 415 年去世) 基本上就是最后几个具有广泛影响力的数学家。如果人们总结古希腊、古罗马时期算术、几何的发展的话，下面四个特点应该说是比较明显的：

1. 数学在这个时期已经成为了一门抽象的、独立的学科；
2. 一种先进的论证模式，即演绎证明，被建立；
3. 算术规则基本搞清，几何学、三角学基本成型；
4. 一些萌芽中的高等数学的概念，比如极限，也已经出现。

西罗马帝国灭亡后，欧洲进入了中世纪。在中世纪欧洲的学校里讲的数学，基本也就是这些内容。

5.1.2 代数的发展、解析结合的建立

中世纪欧洲的衰落伴随的是他们的邻居中东的阿拉伯世界的兴起。从八世纪开始，阿拉伯世界通过翻译各文明的古典作品，在巴格达建立了一个可以取代埃及的亚历山大图书馆的世界数学中心。波斯人花刺子米 (Al-Khowarizmi, 780–850 年) 就是在这个背景下产生的杰出数学家。他主要有两部著作。一部是《印度的计算术》，主要介绍印度的数与计算法。另一部是《代数学》，系统性地解决了一元一次、一元二次方程的求解问题。这里，花刺子米使用“还原” (al-jabr) 和“平衡 (有时也称为对消)” (al-muqābala) 的方法把平方的系数区分，进而使任意方程可还原为六种标准格式中的一种。这些方法，后来也成了我们在求解方程的时候使用的基本方法。其中，al-jabr 这个词后来演化为代数 (algebra) 这个词。而花刺子米的名字的拉丁文 (algorithm)，也演化为算法这个单词。

花刺子米之后，欧洲、伊斯兰世界的数学进展整体不大。到了公元十六世纪中叶（1540 年左右），文艺复兴后期，来自意大利的卡丹（Girolamo Cardano, 1501–1576）、冯塔纳（Niccolo Fontana, 1499–1557）、费拉里（Lodovico Ferrari, 1522–1565）解决了一元三次、一元四次方程的根式解问题。再之后，人们在寻求五次方程的根式解的过程中发明了群论，这是后话。这里，我们可以将这些数学上的进步总结为：通过代数，人们就可以不再追求解决一些具体问题，而是基于原始项的组合通过方程来描述数学问题，其核心是将具体的问题抽象化进而寻求普适解。这是数学上的一次巨大的进步。

除了代数，古希腊开始，因为天文观测的结果分析以及航海的需要，三角学也得到了很大的发展。三角函数及其变换规则于文艺复兴后期由法国数学家韦达（Franciscus Vieta, 1540–1603 年）系统化。在他的著作《应用于三角形的数学定律》（<Mathematical Laws Applied to Triangles>, 1579 年出版）中，有解直角三角形、斜三角形的详述，还有正切定理、余弦定理等。他还发展了利用全部六种三角函数求解各种平面与球面三角形的方法。同时，在他的另一部著作《新代数》（<New Algebra>）中，他还引入了使用字母为符号的代数方法，并开始使用代数来研究集合。这都为数学上的下一个飞跃（解析几何的诞生）奠定了基础。

解析几何的特点就是使用代数的工具，也就是抽象化的方程，来解决几何问题。它具有系统性的优点。在解析几何产生之前，人们关于几何的研究都是针对具体的图形来画具体的图，进而解决问题。而在解析几何建立之后，人们可以使用一种形式的方程，同通过变换参数，来描述一类曲线。历史上，这是几何与代数的第一次结合。在解析几何的产生过程中，最重要的两个代表人物是笛卡尔（Rene Descartes, 1596–1650 年）和费马（Pierre de Fermat, 1607–1665 年）。我们

按时间顺序介绍。

笛卡尔首先是一名哲学家，他是唯理论的奠基人，西方近代哲学也从他开始【赵敦华，2012】【邓晓芒、赵林，2014】。数学对他而言，或许也是他理性的工具。在笛卡尔活跃的年代，韦达已经去世，但韦达的思想却深深地影响了他的这位晚辈。文艺复兴的一个结果是欧洲人在哲学上开始全面系统地发展古希腊的数学与物理学，并开始系统地使用数学来描述物体运动，进而寻求宇宙运动的数学描述。除了圆和直线，在与圆锥相关的其它曲线（椭圆、抛物线、双曲线）的描述上，早期的希腊文明虽然有了像阿波罗尼奥斯这种人的积淀【Lloyd, 2021】，但这些方法在数学上的表达还过于繁琐。这都为数学从研究常量的“初等数学”向“研究变量的相对高等的数学”的发展提供了条件²¹⁵。

1637年，笛卡尔发表了他理性主义的奠基作《谈谈方法》。《几何学》是作为一个附录（解决几何问题的方法）分三卷在《谈谈方法》中出现的。在第一卷里，笛卡尔引入尺规作图，运用代数方程研究几何对象的性质，把代数与几何建立了初步联系。在第二卷中，他将解析几何的两个基本思想完全表现了出来：将平面上的点与一个数对 (x,y) 联系起来，并指出曲线是任何具体代数方程的轨迹。进而，基于其重点讲述一些曲线的性质。在第三卷里，他讨论了关于代数方程的一些理论。有了变数（变量），运动就可以被很方便地进行解析表达。同时，代数与几何结合，也大大扩展了数学本身。从笛卡尔开始，人们开始用一对实数来描述平面上的点，并用方程表示曲线。用方程描述出的曲线相比于人们之前通过几何方法得到的曲线，因为代数方法的普适性，要丰富很多。同时，人们也意识到了可以通过代数方程将曲线分类。这样，人类对几何的研究与认识也向前迈了一

²¹⁵利用变量（Variable）来研究数学问题，是从笛卡尔开始的。

大步。

像微积分诞生过程中有牛顿与莱布尼茨关于优先权的争议一样,在解析几何的诞生过程中,笛卡尔与费马的贡献同样存在一定争议。这也是科学发展到一个特定阶段进入攻城拔寨关键期时常见的情况。费马的主业是一名律师,但他对数学在多方面都有贡献,如解析几何、微积分、概率论。他对解析几何的兴趣是从力图恢复阿波罗尼奥斯关于平面上轨迹的研究开始的。为此,他在 1629 年出版了一本叫做《论平面和立体的轨迹引论》的著作。1636 年,在与当时著名的数学家罗贝瓦尔 (G. P. Roberval, 1602–1675 年) 的通信中,他提及了解析几何的思想。这里,费马发现了一个可以用代数方程表示曲线的方法。具体步骤,如图 5.1 所示。我们可以取一条水平的直线作为轴,并在此轴上固定一个点 O 为原点。这样,对于任意曲线和它上面的一个点 M,它的位置都可以用两个字母 A 和 E 来确定(假设 A 与 E 代表的线段夹角固定,为 α)。其中, A 代表 O 与 Z 的距离, E 代表 Z 到 M 的距离。这种表述方式等价于直角坐标系中的 x 、 y 。基于此,他说出了只要方程里有两个未知量,我们就可以得到一个轨迹这种普适的定律。

看似合理,但比起笛卡尔,费马所说的内容更像是一些核心思想的表述。在系统性上,他的理论与笛卡尔的理论还有一定的差距。也正是因为这个原因,谈及解析几何,人们一般还是会把笛卡尔当作最重要的奠基人。用变量来描述曲线,人们在这个时期,在数学上为微积分的诞生奠定了基础。在物理上,这当然也为牛顿力学的诞生提供了条件。

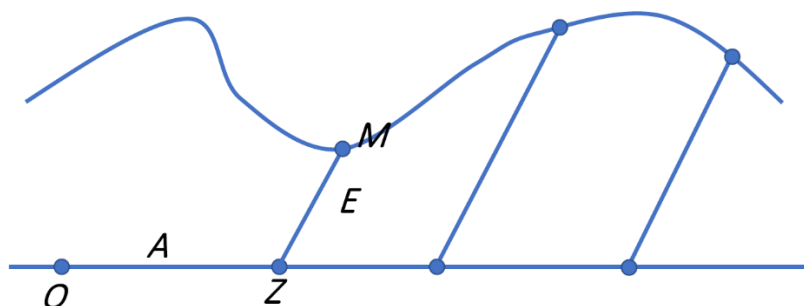


图 5.1 费马对曲线的解析描述示意图。

5.2 微积分、常微分方程、偏微分方程、泛函（变分）方法、复变函数理论的发展及其在物理学研究中的应用

5.2.1 微积分

解析几何的下一步是微积分。前面提到过，它有四个核心理念，分别是：极限、导数、积分、级数。现在，人们一般都会知道微积分诞生的时间节点是在十七世纪晚期。但同时，人们也往往会忽视它的定型要等到十九世纪下半叶。在正常的大学一年级《高等数学》课程的教学，人们一般会按照上面的顺序来讲解已经定型后的微积分的内容。这样的好处是它可以给学生一个具有很好的实用性的微积分使用手册，也方便理解成熟后的微积分的核心思想。但如果回到知识产生的逻辑来讲的话，按历史进程，这四个概念出现的顺序则是：积分、导数、级数、极限。本着这本书一直以来的写作习惯，我们按这个历史顺序来讲解这个问题，以期还原知识产生的历史逻辑。

第一个出现的是积分。早在古希腊，阿基米德在求圆的面积与球的体积的时候就多次使用这个思想。十七世纪初，开普勒发现行星运动的面积定律（第二定律）的时候，也是利用小量求和的思想来求解曲边形的面积的。第二个概念是导数。关键点，就是牛顿与莱布尼茨相互独立地意识到累计问题和变化率问题是互

逆的，曲线的变化率能用切线的方式来处理。再往后，是级数。最具代表性的就是泰勒（Brook Taylor, 1685–1731 年）。这个的时间点是十八世纪初，已经是在牛顿与莱布尼茨的活跃期之后了。最后，是极限。这个要等到十九世纪。我们需求强调的是从逻辑上来讲，积分与导数这两个概念都是建立在极限的基础之上的。导数的定义相对简单，但积分的定义是比较复杂的，它牵扯到级数的累计。但历史上，人类是按照一个由浅入深的方式，一步一步意识到并解决这些问题的。而不是一步就位的产生最合理的逻辑的。

历史上，上述四个理念的产生顺序与当数学问题彻底清楚后的逻辑顺序的不一致也带来过一些实际问题。比如，在十七世纪末、十八世纪初，微积分的不严谨性所带来的逻辑漏洞也会成为人们攻击微积分的理由，最著名的就是贝克莱（George Berkeley, 1685–1753 年）悖论²¹⁶。它可以表述为：实际应用中，无穷小量一会儿为零一会儿不为零，在欧洲传统的形式逻辑中这个无疑是一个矛盾。关于这些概念的精确阐述，一直要等到十九世纪下半叶分析学的建立才得以彻底解决。中间，有两个人物的贡献很重要。首先是柯西（Augustin-Louis Cauchy, 1789–1857 年），他把无穷小量定义为变量，引入了极限的概念。之后是维尔斯特拉斯（Karl Theodor Wilhelm Weierstraß, 1815–1897 年），他将极限的概念严格化，进而彻底解决了像贝克莱悖论这种问题。至此，现代意义上的微积分彻底建立。

5.2.2 常微分方程、偏微分方程

与微积分理论的严格化同时，十八世纪的数学家们也在致力于将牛顿力学应

²¹⁶这个贝克莱，与洛克（John Locke, 1632—1704 年）和休谟（David Hume, 1711–1776 年）一起，是近代英国经验主义哲学的代表人物。他的名言是：存在就是被感知。他的哲学一直很有影响。1868 建立的加州大学伯克利分校（UC Berkeley），就是鉴于他的影响，以他的名字命名的。

用于各种实际问题。这也催生出三个学科方向：常微分方程、偏微分方程、变分法。前两者统称微分方程，它指的是含有未知函数及其导数的方程。其中，常微分方程理论发展地早一些，萌芽于十七世纪，建立于十八世纪。它针对的，是只包含单变量微分（或导数）的微分方程。这类方程的一般形式如下：

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

公式 5.1

这里， n 称为常微分方程的阶。

在十八世纪牛顿力学的应用中，诞生了如单摆、弹性理论、以及一些天体的运动等一系列经典的力学问题。这些问题的运动方程，很多可以化为类似常微分方程。在整个十八世纪，以欧拉（Leonhard Euler, 1707–1782 年）、克莱罗（Alexis Claude Clairaut, 1713 – 1765 年）、达朗贝尔（Jean le Rond d'Alembert, 1717–1783 年）、拉格朗日（Joseph–Louis Lagrange, 1736–1813 年）、拉普拉斯（Pierre–Simon Laplace, 1749–1827 年）为代表的一批法国数学家针对不同情况下的此类问题，发展了多种的理论。作为一个结果，在十八世纪下半叶，常微分方程也发展成为一个独立的数学分支。

除了常微分方程，在更多的力学问题（比如波动、热传导）理论研究中，人们需要求解的是多元函数。这些问题中的经典力学方程也演化为偏微分方程。以单弦的振动为例，如果将位移当作时间以及弦上点的位置的函数，相应的力学方程就已经是一个偏微分方程了。1747 年，达朗贝尔针对此问题，以《张紧的弦振动时形成的曲线研究》为题目，提出了下面这个方程：

$$\frac{d^2u}{dt^2} = c \frac{d^2u}{dx^2}$$

公式 5.2

并给出了通解。这个工作也被认为是偏微分方程这个学科的开端。后面，我们在 8.4.3 小节讲到 1926 年薛定谔是如何提出薛定谔方程的时候，也会强调这个方程是扮演了一个重要角色的。从 1747 到 1926，将近 200 年的时间，物理学与数学中关键问题的结合与传承始终贯穿在我们学科的发展之中。

公式 5.2 是简单的一维情况。达朗贝尔之后，欧拉、丹尼尔·伯努利又把它推广至二维与三维的情况，并将此方法推广至弹性力学、流体等问题中。比他们再晚一些，傅里叶 (Jean Baptiste Joseph Fourier, 1768–1830 年) 在热流的研究中也系统地使用了偏微分方程的方法。在他的《热的解析理论》中，傅里叶提出的三维空间的热方程 (除了三个空间坐标，还有温度、压强、时间) 也是典型的偏微分方程。应该说热学问题的研究对当时偏微分方程的发展是一个促进，而偏微分方程的发展又反过来帮助人们解决了热学与电动力学中的关键问题。

就数学理论而言，我们这里需要说明的是：不管是常微分方程还是偏微分方程，早期人们的关注点往往都是各种类型的问题及其孤立技巧的汇总。进入十九世纪，相关数学理论的研究进入了系统化的阶段。数学研究的关注点，也转向初值问题、解的稳定性问题、以及解析理论和定性理论的发展。其中，代表人物包括柯西、刘维尔 (Joseph Liouville, 1809–1882 年)、魏尔斯特拉斯、庞加莱 (Henri Poincaré, 1854–1912 年)、李亚普诺夫 (Aleksandr Mikhailovich Lyapunov, 1857–1918 年)。进入二十世纪，微分方程在更多的物理学、化学、力学的实际问题中被广泛深入研究。比如，它在无线电、飞机飞行、导弹飞行、化学反应速率的描述等方面都发挥着极其重要的作用。这些应用进一步也会促进微分方程理论的发展。像动力系统、泛函微分方程、奇异摄动方程、复数域上的定性理论，也都成为了在传统微分方程的基础上发展起来的新的学科方向。

5.2.3 变分法

十八世纪,与微分方程方法同时发展的还有一个泛函(或者叫变分)方法²¹⁷。

它的背后,隐藏着一个非常重要的物理学中的原理:最小作用量原理。这里最重要的数学工具与函数不同,是泛函。在我们已经比较熟悉的函数中,输入往往是一个或多个变量的值,是一个或多个数。输出,是函数在这些变量的这些具体取值下的值,是一个数。它比较适合被用来描述几何轨道。而泛函的输入是一个函数,输出是一个数,它比较适合来描述物理学中的“场”。

从数学表达上,泛函可以被写成:

$$I[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} F \, dx$$

公式 5.3

其中, F 是被积函数,也称为拉格朗日函数。早期,人们往往会把被积函数对应为一个轨道,然后通过最大化或者最小化泛函 I 的值来针对其进行优化。物理学革命之后,当量子力学、统计物理成为我们科研中的必备工具时,人们又意识到当被积函数由经典力学中的轨道转变为量子力学中的几率分布函数的时候,这个公式在量子力学中的应用同样自然。因此,我们也可以说泛函从根上就是一个适合量子理论的数学工具。

作为一个简单的例子,我们可以假设公式 5.3 中的拉格朗日量仅仅依赖于 $y(x)$ 这个函数和它的一阶导数函数以及 x ,把 $y(x)$ 直接写成 y 、把它的一阶导数写为 y' 。这样,这个泛函就可以写为:

$$I[y] = \int_{x_1}^{x_2} F(y, y', x) \, dx$$

²¹⁷变分方法这部分讨论大量参考了知乎上 Dr. Stein 与晴风两位网友分享的材料。特此感谢!

我们基于这个简单的情况来讨论一个应用。历史上，泛函（变分）方法的发展和极值问题的求解密切相关的。对应的问题，是最速降线问题，它是 1696 年约翰 I·伯努利（丹尼尔·伯努利的父亲）在写给他哥哥雅可比 I·伯努利的一封信中提出的。它可表述为：设 A 和 B 是竖直平面上不在同一垂线上的两点，在所有连接 A 和 B 的平面曲线中，求出一条曲线，使仅受重力作用且初速度为零的质点从 A 点到 B 点沿这条曲线运动时所需时间最短（如图 5.2）。

对这个问题，我们使用公式 5.4 的数学表达是足够的。我们要做的事情就是在公式 5.4 中对 $y(x)$ 这个函数做个很小的变化 $\delta y(x)$ ，看相应的 I 的变化 δI 。它等于：

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right] dx$$

其中，右边第二项又等于：

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' dx &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{d\delta y}{dx} dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'} d\delta y \\ &= \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \delta y \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) dx \end{aligned}$$

这样，公式 5.5 就可化为：

$$\delta I = \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \Big|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \delta y dx$$

这样一个形式。

对公式 5.7, 在曲线变化过程中 A 和 B 两点是固定的, 因此 $\delta y(x_1) = \delta y(x_2) = 0$ 。这样, 公式 5.7 右边第一项为零。而 I 取极值, 就意味着对这个轨道附近的任意的 $\delta y(x)$ 的函数形式的变化, δI 都为零。这就意味着对于取极值的轨道, 有:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0$$

公式 5.8

对任意的 $x_1 \leq x \leq x_2$ 都成立这样一个要求。公式 5.8 就是人们常说的欧拉-拉格朗日方程。人们可以基于欧拉-拉格朗日方程对很多曲线的极值问题进行求解, 比如两点之间直线最短这个几何问题, 以及约翰 I·伯努利提出的这个最速降线问题为例。

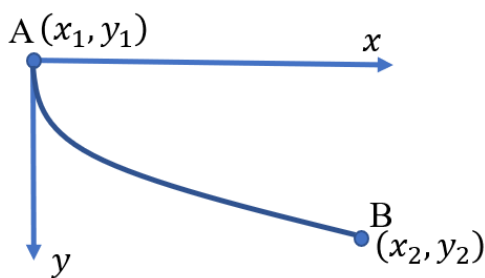


图 5.2 最速下降问题的图示。

先看简单的几何问题, 两点之间直线最短。在上面提供的理论框架下, 我们可以把它理解为图 5.3 所示的路径长度的积分。每一小段, 有:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

公式 5.9

这样的话总的路径长度就是:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

公式 5.10

对照公式 5.4，这意味着 $F = \sqrt{1 + (y')^2}$ 。将这个 F 代入欧拉-拉格朗日方程（公式 5.8），就有：

$$\frac{2y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} = \text{Constant}$$

公式 5.11

对任意的 $x_1 \leq x \leq x_2$ 成立这样一个解。这就意味着 y' 必须是一个定值，很显然对应的就是连接两点的直线了。

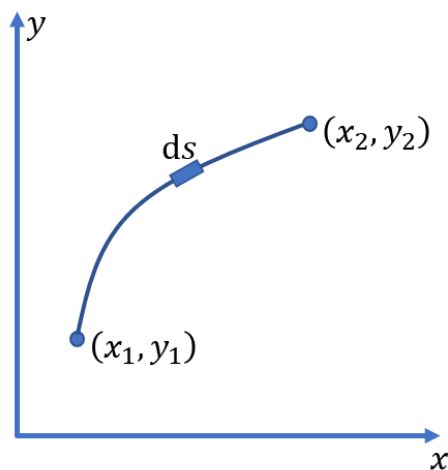


图 5.3 二维平面上曲线路径长度积分示意图。最短的路线是直线。

其次，我们看最速下降问题。我们这里积分的是时间，因为要求是整体运动的时间最短。由于机械能守恒，在曲线上任何一点，取 A 点为原点， y 轴向下，这点的瞬时沿曲线切线方向的速率就等于 $\sqrt{2gy}$ 。进而，要积分的时间就等于：

$$dt = \frac{ds}{v} = \frac{\sqrt{1 + (y')^2} dx}{\sqrt{2gy}}$$

公式 5.12

这样，总的时间就等于：

$$T = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{2gy}} dx$$

公式 5.13

对照公式 5.4，这意味着：

$$F = \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{2gy}}$$

公式 5.14

这个 F 如果直接代入公式 5.8（欧拉-拉格朗日方程），貌似还不太好处理。这个时候，我们可以把公式 5.8 做个变形，形势就会明朗。

这个变形需要考虑下面这个性质：

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{dy'}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{dy'}{dx}$$

公式 5.15

这样的话对于 $\frac{d}{dx} \left(y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right)$ ，就有：

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right) &= y' \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) + \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{dy'}{dx} \\ &= y' \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) + \frac{dF}{dx} - \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} y' \\ &= y' \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} \right] + \frac{dF}{dx} - \frac{\partial F}{\partial x} \end{aligned}$$

公式 5.16

这时，利用公式 5.8，基于上式就可继续推出：

$$\frac{d}{dx} \left(y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = \frac{dF}{dx} - \frac{\partial F}{\partial x}$$

公式 5.17

进而有：

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dx} \left(F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0$$

公式 5.18

这个式子也称为欧拉-拉格朗日方程的第二种表达。

由于最速下降问题中的 F 不显含 x ，这个问题对应的解就是：

$$F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = \text{constant}$$

公式 5.19

这时，把公式 5.14 的 F 代入公式 5.19，就有：

$$\frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{2gy}} - y' \frac{y'}{\sqrt{2gy}\sqrt{1 + (y')^2}} = \text{constant}$$

公式 5.20

进而：

$$\frac{1}{\sqrt{2gy}\sqrt{1 + (y')^2}} = \text{constant}$$

公式 5.21

取这个 $\sqrt{2g}$ 乘上公式 5.21 中的 constant 这个常数为 $1/\sqrt{k}$ ，就有：

$$y[1 + (y')^2] = k$$

公式 5.22

进而：

$$y' = \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{k}{y} - 1} = \sqrt{\frac{k - y}{y}}$$

公式 5.23

这是一个典型的常微分方程，它的解可以通过换元积分法得到。

公式 5.23 中， y 的取值范围是 $[0, k]$ ，这样可以取其为：

$$y = \frac{k}{2}(1 - \cos \theta)$$

公式 5.24

这样就有：

$$dy = \frac{k}{2} \sin \theta d\theta$$

公式 5.25

以及：

$$\sqrt{\frac{k-y}{y}} = \sqrt{\frac{\frac{k}{2}(1+\cos\theta)}{\frac{k}{2}(1-\cos\theta)}} = \sqrt{\frac{(1+\cos\theta)}{(1-\cos\theta)}}$$

公式 5.26

而同时，公式 5.23 左边等于：

$$\frac{\frac{k}{2}\sin\theta d\theta}{dx} = \frac{\frac{k}{2}\sqrt{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}d\theta}{dx}$$

公式 5.27

这样就有：

$$\frac{\frac{k}{2}\sqrt{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}d\theta}{dx} = \sqrt{\frac{(1+\cos\theta)}{(1-\cos\theta)}}$$

公式 5.28

进而：

$$dx = \frac{k}{2}(1-\cos\theta) d\theta$$

公式 5.29

这个方程两部积分可以得到：

$$x = \frac{k}{2}(\theta + \sin\theta) + \text{constant}$$

公式 5.30

这个时候再利用边界条件 $x_1 = 0$ 、 $y_1 = 0$ ，就有关于轨道的解：

$$\begin{aligned} x &= \frac{k}{2}(\theta + \sin\theta) \\ y &= \frac{k}{2}(1 - \cos\theta) \end{aligned}$$

公式 5.31

至此，最速下降曲线得以确认。

从这个例子，读者应该也可以感受到在十八世纪像欧拉、拉格朗日这样的数学家、物理学家在将牛顿的经典力学用到实际问题的研究中的时候，变分法、微分方程方法的发展得到了极大的作用。

当然，变分方法的内涵绝不是一个简单的最速下降问题可以包含的。其背后的最小作用量原理在物理学的研究中扮演着更重要的作用。其中蕴含的“场”思想，在现代物理学更是发挥了核心的作用【曹天予, 2024】。实际上，像牛顿第二定律这样的基本的力学方程都可以从最小作用量原理中得到。前面我们在光学部分讲到的费马原理（最小传播时间原理）也是最小作用量原理在光学领域的一个应用，它可以被用来解释折射现象。十九世纪之后，最小作用量原理在电动力学、量子力学领域也被广泛使用。现在，我们会认为它是物理学中最基本的原理之一，并利用它为物理定律寻求普适表达。这个背后，用到的数学方法都是变分法。这个方法应该说也是欧拉与拉格朗日这对师徒在物理学史中占据那么重要的地位的一个重要原因。

5.2.4 复变函数

本节最后要讨论的一个数学方法是复变函数。它是一个自变量是复数且在一个映射关系下对应的因变量也是复数的函数。与前面提到的微分方程方法、变分法一样，在人们认识到复数的重要性的过程中，欧拉也起到了至关重要的作用。在他之前，虽然卡丹在 1543 年给出一元三次方程根式解的过程中就用到了虚数，但直到一百多年后，笛卡尔的时代，虚数还是被多数数学家排斥。

实际上，虚数 (Imaginary number) 这个名字也是笛卡尔起的，他的意思就是这些数不是真实的数 (Real number, 即实数)。而十八世纪的欧拉，则是以 1 和 i

为生成元，构成了复数的集合。欧拉之前，有泰勒，他的泰勒展开可以给人们如下知识：

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 - \dots$$

公式 5.32

以及：

$$\begin{aligned}\sin x &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \dots \\ \cos x &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \dots\end{aligned}$$

公式 5.33

这样的话，如果取 $x = i\theta$ ，那么很显然对 $e^{i\theta}$ 就有：

$$\begin{aligned}e^{i\theta} &= 1 + i\theta + \frac{1}{2!}(i\theta)^2 + \frac{1}{3!}(i\theta)^3 + \frac{1}{4!}(i\theta)^4 + \frac{1}{5!}(i\theta)^5 + \dots \\ &= \left(1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 - \dots\right) + i\left(\theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 - \dots\right) \\ &= \cos \theta + i \sin \theta\end{aligned}$$

公式 5.34

在简谐振动中，运动是由三角函数表达的。因此，引入虚部，人们可以高效地描述简谐振动。这样，这个看似“多余”的数学工具也就有了直接的物理对应。

基于这些认识，高斯于 1811 年确定性地引入了复变函数的概念。同时，他也鼓励自己的学生黎曼用复变函数为题目完成自己的博士论文。在前言中，我们提到过的他后来还鼓励黎曼以非欧几何作为教授资格考试论文的题目，进而彻底打开了人类系统性研究非欧几何的大门。因此，应该说黎曼很遇到高斯这样的导师是很庆幸的，他也很出色的完成了这两项开创性的工作。

回到复变函数，在黎曼之前，柯西与拉普拉斯有过利用分析的方法开展的研究。黎曼之后，维尔斯特拉斯更是引入了解析延拓的概念，将复变函数发展为一个成熟的数学理论。今天，复变函数在物理学的各个角落，比如电路理论、量子

力学、场论、统计力学等多个领域都发挥着不可替代的作用【吴崇试、高春媛，2024】【Yang, 1952】【Lee, 1952】。

5.3 线性代数、有限群理论的发展及其对后期物理学发展的影响

前面谈到的解析几何、微积分、微分方程、泛函、复变函数这些数学工具在经典的物理学理论的发展过程中发挥了重要的作用，相关应用涵盖了力学、热学与热力学、电动力学等多个领域。在这些数学方法的发展过程中，也会伴随着一些其它的数学分支的产生。这些新产生的数学分支在早期的物理学研究中有些能够被直接应用，有些则需要等待很长时间才能体现出价值。但我们必须去承认的一个事实是历史不停地告诉我们数学最神奇的地方就在于它作为人类描述自然的语言它的实用性。在出现的时候，很多并不对应真实的世界，但随着物理学的发展，却总会在一个时刻发挥出作用。本章下面两节要讲的内容就都具备这样的特征。我们从大学的理工科教育中大学一年级便开始学习的线性代数讲起。

5.3.1 线性代数

线性代数起源于人们对线性方程组的求解。比如，莱布尼茨（Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646–1716 年）就开创过用指标体系来表示线性方程组的方法，并提出了行列式的概念。跟他大致同一个时期，日本数学家关孝和（Seki Takakazu, 1642–1708 年）也提出了行列式的概念。1750 年，瑞士数学家克莱默（Gabriel Cramer, 1704–1752 年）提出了基于行列式的求解线性方程组的具体方法，称为克莱默法则²¹⁸。之后，法国数学家贝祖（Étienne Bézout, 1730 – 1783 年）简化了他的法则，并证明了行列式等于零是 n 元齐次线性方程组有非零解的充要条件，这就让问题

²¹⁸ 但这个法则因为太麻烦，人们后来基本不用。

简化了很多。

再往后，法国数学家范德蒙德 (Alexandre-Théophile Vandermonde, 1735 – 1796 年) 以行列式为独立的研究对象，对行列式理论进行了系统的阐述。因此，他也被称为行列式理论的奠基人。受到范德蒙德的影响，拉普拉斯提出了用 r 行中所含的子式和它们的余子式的集合来展开行列式的方法，这个方法被称为拉普拉斯展开。之后，德国数学家高斯 (Carl Friedrich Gauss, 1777–1855 年)、谢克 (Heinrich Ferdinand Scherk, 1798 – 1885 年)、雅可比 (Carl Gustav Jacob Jacobi, 1798 – 1885 年)、法国数学家柯西 (Augustin-Louis Cauchy, 1789 – 1857 年) 又对利用行列式求解线性方程组的方法进行了各种扩展与系统化。但整体而言，关注点都在行列式本身。

将行列式背后的矩阵作为一个独立的数学概念提出，发掘出其线性变换的本质及其背后的线性空间的意义，是线性代数发展过程中最重要的一次进步。这个进步的时间节点在十九世纪中叶。英国数学家西尔韦斯特 (James Joseph Sylvester, 1814 – 1897 年) 首先提出了矩阵 (matrix) 的概念。Matr 在英语中代表母性，matrix 的本意是母体、子宫。隐含的一个意思就是它是之前人们已经广泛研究的行列式的母体，同时它也可以包含更为复杂的数学结构。几年之后，他的挚友英国数学家凯莱 (Arthur Cayley, 1821 – 1895 年) 首次以矩阵的形式来表达线性方程组，一个强大的数学语言由此诞生。凯莱定义了今天的行列式表示法、矩阵加法、数乘、乘法、次方、单位矩阵、零矩阵和逆矩阵。他也因此被称为矩阵理论的创立者。

再往后，柯西在研究行列式的时候提出的特征值与特征分解这些概念被爱尔兰数学家与物理学家哈密顿 (William Rowan Hamilton, 1805 – 1865 年)、德国数

学家弗罗贝尼乌斯 (Ferdinand Georg Frobenius, 1849 – 1917 年) 推广。弗罗贝尼乌斯还提出了矩阵的秩的概念, 关于矩阵的理论得以系统化。十九世纪末, 意大利数学家皮亚诺 (Giuseppe Peano, 1858 – 1932 年) 又给出了向量空间的公理化定义。德国数学家托普利茨 (Otto Toeplitz, 1881 – 1940 年) 将线性代数的主要定理推广到任意体上的最一般的向量空间中。至此, 矩阵蕴藏的线性变换的概念及其背后的线性空间的概念逐渐清晰。这些理论在后期的量子力学发展过程中起到了至关重要的作用。

5.3.2 有限群理论

和线性代数类似, 群论 (本节先关注有限群理论, 下一节是李群为例关注连续群) 也是一个产生于解代数方程的理论。在笔者之前出版的《群论及其在凝聚态物理中的应用》的前言中, 笔者曾将这个过程做了一个解释【李新征, 2024】。这里, 我们把那个解释搬过来, 供大家了解基本情况。

代数方程, 大家都知道, 一元一次的是 $ax+b=0$, 一元二次的是 $ax^2+bx+c=0$ 。它们的解析根式解我们在中学的时候就学过。一元三次方程和一元四次方程有没有和它们类似的根式解?

答案: 有。

对一元三次和四次方程, 早期人们是可以利用配方和换元的方法把它们变成低次方程来求解的。比方说 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 这样一个式子, $a \neq 0$ 。人们怎么做呢?

先换元, 取 $y = x + \frac{b}{3a}$, 把它代入上式, 企图把 x 的一般的一元三次方程变成 y 的一元三次方程。而这个 y 的一元三次方程, 不再是一个一般的一元三次方程, 而是具有特殊形式的一元三次方程。过程如下:

$$\begin{aligned}
& a\left(y - \frac{b}{3a}\right)^3 + b\left(y - \frac{b}{3a}\right)^2 + c\left(y - \frac{b}{3a}\right) + d = 0 \\
& a\left(y^3 - \frac{b}{a}y^2 + \frac{b^2}{3a^2}y - \frac{b^3}{27a^3}\right) + b\left(y^2 - \frac{2b}{3a}y + \frac{b^2}{9a^2}\right) + c\left(y - \frac{b}{3a}\right) + d = 0 \\
& ay^3 + \left(c - \frac{b^2}{3a}\right)y + \left(d + \frac{2b^2}{27a^2} - \frac{bc}{3a}\right) = 0
\end{aligned}$$

公式 5.35

这样，二次项就不见了，一元三次方程变成了 $y^3 + py + q = 0$ ，这里 p 、 q 都是由 a 、 b 、 c 、 d 确定的常数。而这个特殊形式的一元三次方程，是有根式解的。

历史上，有个故事与其相关，时间是十六世纪，地点是意大利。当时在欧洲的数学界，去寻求一元三次方程的解在数学界是一种时尚，就像我们现在物理学界对高温超导机制的研究一样²¹⁹。因为当时的历史背景是文艺复兴(Renaissance)，所以在学术上最活跃的地区很自然的就是意大利²²⁰。代表人物有两个，分别是冯塔纳(Niccolo Fontana, 1499 – 1557 年)和卡丹(Girolamo Cardano, 也称卡尔达诺, 1501 – 1576 年)。

传说第一个想出这个特殊方程根式解是冯塔纳，但他比较喜欢通过故弄玄虚来显示自己的聪明，不把话说明。因此，虽然当时有很多人相信他会解这个方程，但没有任何文献记录。而卡丹呢，则低调务实。传说中他跟冯塔纳讨教过，冯塔纳用很隐晦的语言进行了提示，他认为以卡丹理解不了。但事实却是卡丹在他的著作《大术》(<Ars Magna>, 1545 出版)中给了一些详细的解释。因为这个原因，现在我们在讨论一元三次方程的根式解的时候，提到的第一个人物往往是卡

²¹⁹ 当时人们经常针对类似问题进行数学比武。

²²⁰ 以哥白尼、布鲁诺、伽利略这三个科学革命中的先锋人物为例，两个意大利人(布鲁诺、伽利略)。哥白尼是波兰人，但早年在意大利接受的大学教育。

丹。上面那个特殊的一元三次方程的解，人们也称为卡丹公式：

$$y_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$y_2 = \omega \cdot \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \omega^2 \cdot \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$y_3 = \omega^2 \cdot \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \omega \cdot \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

这个里面 $\omega = -1 + \sqrt{3}i$ 。他已经用了虚数。前面也提到过，100 年之后，笛卡尔依然不认可虚数的意义。

这个是关于一元三次方程根式解的故事。一元四次方程，人们又用相似方法做了努力，由卡丹的学生费拉里（Lodovico Ferrari，1522 – 1565 年）给出了根式解，这个结果也是在卡丹的那本 1545 年的《Ars Magna》里面展示。之后，五次、六次及其以上又是什么情况呢？同样，在 1545 年以后也继续成为欧洲数学界的时尚。但两百年过去了，却始终没有任何进展（图 5.4）。

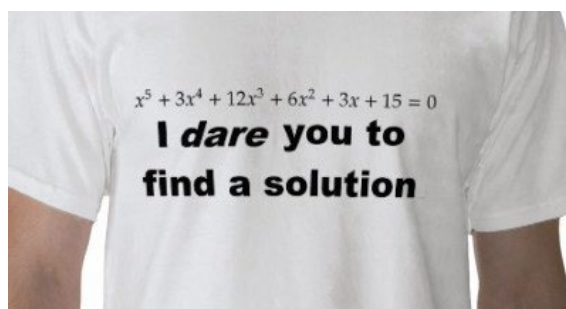


图 5.4 一元高次方程根式解

当这个问题有下一步进展的时候，也就到了我们《群论》作为一门学科出现的时候了。这个前后发展的时间有一百多年，从 1770 年代开始，到十九世纪末

结束。其中的代表人物包括拉格朗日、鲁菲尼 (Paolo Ruffini, 1765-1822 年)、伽罗瓦 (Évariste Galois, 1811 - 1832 年)、阿贝尔 (Niels Henrik Abel, 1802 - 1829 年)、凯莱、弗罗贝尼乌斯、勃恩赛德 (William Burnside, 1852 - 1927 年)、舒尔 (Friedrich Heinrich Schur, 1856 - 1932 年)、李 (Marius Sophus Lie, 1842 - 1899 年) 等。其中前面这些人 (到阿贝尔), 他们工作的初衷是求一元五次方程的解, 但结果是建立了群论。而后面这些人, 从凯莱开始, 他们的主要工作, 就是完善这个由前人提出的理论了。这些名字以及与他们相关的定理, 在《群论》的学习中我们一般都会接触到【李新征, 2024】。

怎么把解一元五次方程和《群论》这门学科联系起来, 背后的道理其实很简单。前面我们提到了, 在费拉里之后, 两百多年, 欧洲各位顶级的数学家都尝试着利用配方、换元这些数学手段去求四次以上方程的根式解, 但都没成功。这种情况下, 按科学规律而言, 传统思维肯定就不行了。这个就像我们把自己关在一个屋子里找东西, 你的前辈科学家, 各个聪明绝顶, 他们把这个屋子的每个角落都进行了仔细的搜寻, 都没有找到。这个时候你应该去意识到是不是这个屋子有另外一个维度你并不知道? 你需要打破传统思维去找到这个维度。

在五次及其以上一元方程根式解的问题上, 认识到这一点的最早的人物是拉格朗日。他实际上是看到了一种新的数学结构。从他开始, 到鲁菲尼, 到伽罗瓦与阿贝尔, 他们做的事情是开始从群的结构, 也就是常说的群论的角度去考虑这些问题了。具体而言, 如果把一个一元 n 次方程的根式解作为变换对象, 那么它就会对应一个 n 次置换群。其中拉格朗日、鲁菲尼干的事情是利用置换的概念, 去理解了三次和四次方程为什么有解。之后就是伽罗瓦和阿贝尔了, 他们干的事情是彻底地在代数方程的可解性与其对应的置换群之间建立了联系, 指出了 n 次

方程有解的充要条件，以及说明一般的五次方程没有根式解。

一个 n 阶置换群是可解群的条件，是它的不变子群形成的不变子群列具有一个特殊的性质。就是前一个不变子群对后一个不变子群的商群，都是阿贝尔群。对于置换群而言，前四个都有这个性质。第五个及其以上，没有。因此，一元五次及其以上方程没有根式解。这部分大家不用理解细节，只需要知道大致逻辑即可。

这就是数学的魅力！它与哲学一样，对应的都是一些最基本的智慧。由哲学中的自然哲学发展出的诸多自然科学的分支中，物理学也具备这样的特质。这也是我们常说的物理学最能代表自然哲学的根本原因。在拉格朗日、鲁菲尼、伽罗瓦、阿贝尔这四个人里面，前面两个是奠定基础的，伽罗瓦与阿贝尔是真正利用群这个概念去解决这个问题的。我们现在会把后两个当作是《群论》这门学科的奠基人²²¹。与线性代数类似但略有区别的是，群论在二十世纪量子力学成型后，为量子力学理论的成熟也贡献了重要的力量（线性代数是在其建立过程中提供了

²²¹建议大家查一下这两个少年天才的生平。笔者在课上尽量介绍每个科学家的生平，就是希望我们在学习科学的同时，不要脱离科学家本身所处的时代背景。科学上重大进步的产生，都是以由科学家本身的时代背景、学科背景综合起来诱发的。学生时代应尽量了解这些，这样你才会对你的学科发展的规律产生一定的理解。只有理解了每个发现背后那些让人热血沸腾的故事与逻辑，你才能真正理解教科书上那些冷冰冰的文字背后的内涵。伽罗瓦被认为是浪漫主义天才的代表。传说他在 1830 年左右曾经投稿三次，第一次的审稿人是柯西，柯西让他把论文写的好懂一些。他将论文进行了修改之后再投，这次的审稿人是傅立叶，但可惜的是傅里叶还没有来得及审阅他的文章就去世了。第三次投稿（据说审稿人有泊松与另外一名数学家），审稿人依然没有理解这篇论文。之后，伽罗瓦在决斗中去世。这个文章随之沉睡多年。1846 年，在其朋友的帮助下，得到了刘维尔的肯定后最终发表。从这些审稿人，我们应该可以感受到十九世纪法国数学的强大。阿贝尔生平最大的标签，除了天才，就是贫穷。他是挪威人，挪威在当时欧洲科学的版图中可以说是彻底的边缘。他自己本身很优秀，但找教职一直不顺。27 岁死于贫困与疾病，死后收到了柏林大学的聘书，令人唏嘘。

数学基础)。现在，人们会认为对称性是物质世界的一个基本属性，在物理学的研究中广泛使用群论。

5.4 非欧几何、微分几何、李群李代数、拓扑学理论的发展及其对后期物理学的影响

前一节说的主要是代数方面的进展。其中，像线性空间这些概念已经包含了几何的内容了。它是对传统的欧式几何所描述的空间的重要的扩展。实际上，从解析几何开始，代数与几何就不可分割。当然，各自还是各自的特征。本节关心的是物理学革命前几何学的新进展。和线性代数、有限群理论一样，它们也为二十世纪物理学变革型的新理论的提出提供了数学基础。它们的特点也是抽象，但抽象背后，依然是理性。一定程度上，我们也可以把十九世纪以非欧几何的诞生为起点的新几何、以群论的诞生为标志的新代数的发展以及它们的结合当作是几何与代数在历史上的第二次结合。如果说它们的第一次结合导致的解析几何的诞生催生出了以牛顿力学为代表的经典物理的话，那么它们在十九世纪的第二次结合无疑又催生出量子力学与相对论，导致了物理学革命的发生。

本着易读的原则，我们还是先从非欧几何说起。非欧几何指的就是曲面上的几何。由于笔者之前出版的《群论及其在凝聚态物理中的应用》第二版的第七章曾经覆盖过这部分内容【李新征，2024】，和上节将群论的时候一样，我们又从那里拿了一部分内容过来加以修改，供读者参考。由于我们的基础教育（甚至包含多数高等教育）并不包含非欧几何的内容，我们往往会觉得与之相关的一些名词（比如本节后面要提到的拓扑空间与微分流形）非常的高深与抽象。为了将读者带入，我们从一些简单的关于空间的概念出发来展开介绍。

我们首先想再次强调的就是类似看起来复杂与高深的学术成就的诞生都是符合最直观、最简单的逻辑的。比如,我们都知道早期欧氏几何描述的是均匀的、可以无限扩展的三维空间的性质。而在古希腊的多数自然哲学体系中,人们认为地球是处在中心宇宙这个同心球体的中心的。比如,在亚里士多德的宇宙模型中,连续的、无限的直线运动是不被允许的,匀速圆周运动才是完美的【赵敦华,2012】。这样,就不可避免地会带来一个逻辑上比较简单但非常值得思考的问题:当我们站到地面上的一点我们看到的是欧氏空间,但当我们把自己放在上帝视角去看这个同心球模型中的地球我们会意识到地球上的某个人看到的欧氏空间是无法通过无限延展覆盖整个地球的球面的²²²。考虑到这一点,后来人们对欧氏几何提出质疑就不足为奇了。

此质疑过程中比较有代表性的是 1826 年俄罗斯数学家 Nikolai Ivanovich Lobachevsky (罗巴切夫斯基, 1792-1856), 他在喀山的一个数学家会议中宣读的自己关于非欧几何的论文《几何学原理及平行线定理严格证明的摘要》。这里, 他提出如果将欧氏几何中的第五条公设去除²²³, 基于前面的几条公设还是可以构建一个几何体系。但遗憾的是此理论在当时并没有被人们接受。1853 年, 哥廷根大学数学系教授高斯建议他的学生黎曼在其教授资格考试 (Habilitation) 中以非欧几何为题目完成资格考试论文。基于此建议, 黎曼将此论文题目定为《On

²²² 虽然地球是个球形的直接验证一直要等到 16 世纪初麦哲伦的环球航行, 但考虑到早期人们航海时首先看到船帆这个生活经验、月球是圆的这个观测、以及球形在古希腊哲学中占据的重要位置, 我们可以想象在很早的时候人们就有了地球是个球形这样一种认识。在很多古希腊的宇宙模型中, 这点也都可以得到体现。

²²³ 欧氏几何是一个由五条公设 (postulates)、五条公理 (common notions) 出发建立的几何理论体系。

the hypotheses which underlie geometry》²²⁴。此后，非欧几何正式在主流学界被广泛接受。

黎曼的主要研究对象是椭球球面，在这个过程中，他引入了流形（英文是 manifold，意思是多褶皱，江泽涵先生按“天地有正气，杂然赋流形”进行翻译，信达雅兼顾）的概念，来描述类似基于曲面的几何。在描述这个曲面的几何时，平行线公设是不需要的。就像图 5.5 中的地球，如果我们画一个很大的三角形，则在局域的视角我们认为相互平行的两条经线，在全局视角看来是可以相交的。图中这个三角形的内角和也不是 180 度。黎曼几何很好地利用了欧氏空间的性质，把复杂的曲面分成很多封闭的区域的集合。类似封闭的区域的集合称为图卡（Atlas，有时也翻译为坐标图卡、图集、图汇）²²⁵。每个区域对应的局部空间（开集），与欧氏空间这种完全没有扭曲的空间的开集在结构上对应²²⁶。因此，可以用欧氏空间中的微分工具来描述其结构。而相邻的区域，有重叠部分。在这些重叠的部分，又可以通过微分性质的连续性，保证完美地拼接起来。这种拼接允许空间扭曲，而类似空间的扭曲会带来与欧氏几何完全不一样的性质。

后来，大家都知道这套基于数学家对空间概念的探索而引入的数学语言诞生

²²⁴对德国学者，在其学术生涯中正常情况下是要完成两个论文的。一个是其博士学位论文，一个是其教授资格考试论文。

²²⁵这里要感谢北京大学数学学院的周珍楠教授。之前笔者一直找不到合适的翻译，他给了一个很全面的回答。

²²⁶这种对应被称为 mapping。其词根，与大地测量中的 map 是相关的。按周彬老师线上课程的讲述，在十九世纪上半叶，高斯因为接到一个画地图的任务，便开始对这方面的问题进行思考了。笔者认同此说法，因此这里写下来供读者参考。

半个世纪后，在爱因斯坦发展的广义相对论中发挥了至关重要的作用²²⁷。这个背后，实际上就是上一段提到的本质上很简单的图像。同时，我们也要指出本章要讲的很多看似高深、看似复杂的概念，都与这个简单的图像相关。

当我们以曲面为对象来研究几何的时候，曲面的宏观结构就形成了拓扑，如 5.5 右下角的克莱因瓶所示。数学上，为了理解这些概念，我们需要先从拓扑空间出发引入一套基本语言来描述空间的拓扑性。之后，作为拓扑空间中一个例子，我们取可以利用微分方程来分析的豪斯道夫空间下手，引入微分流形。之后，这部分内容与群论结合，可以产生李群、李代数。它们描述的是不同曲面之间可以通过变换联系起来的性质。要想理解这些，还是需要花很大精力的。这里我们只是从历史的角度讲解其简单逻辑。

这个历史逻辑可以体现在克莱因 (Felix Klein, 1849 – 1925 年) 是黎曼之后加入哥廷根大学数学系的。之前，高斯与黎曼对这些晚辈的德国数学家肯定会产生影响。同时，在加入哥廷根大学之前，克莱因曾是爱尔兰根大学的教授，上述思想也是他在加入爱尔兰根大学时的入职演讲 (史称爱尔兰根纲领) 中的主要思想。此纲领的作用，是把当时人们研究的不同几何学综合到一起成为关于空间之在变换群下不变性的研究。其几何根本，是由保其度规的变换群所表示的。在这个纲领中，克莱因也特别提到了李 (Sophus Lie, 1842 – 1899 年) 的贡献。

在哥廷根期间，除了担任《数学年刊》²²⁸，他还独具慧眼地将希尔伯特请到

²²⁷ 广义相对论中的关键点就是时空扭曲。这也就不难理解为什么我们说他去哥廷根大学讲完报告后，看到希尔伯特所提的问题为何那么地紧张了。现在，我们描述宇宙的结构是有限无边，也是基于类似的几何图像。

²²⁸ <Annals of Mathematics>，但并不是现在由普林斯顿负责的那个，而是 1868 年在德国由 Rudolf Friedrich Alfred Clebsch (1833 – 1872 年) 和 Carl Gottfried Neumann (1832 – 1925 年) 创刊的那个德国数学杂志。这个杂志对当时的数学发展起到了非常重要的推进作用。

哥廷根，这使得哥廷根的数学系直至二战结束前都能够一直引领世界。同时，其数学地位也使得这所学校在十九世纪末、二十世纪初的物理学革命中扮演了不可替代的角色。二十世纪二十年代末，量子力学建立之后，外尔（Hermann Klaus Hugo Weyl, 1885–1955）接替了希尔伯特在哥廷根大学数学系的位置，开始系统地研究规范在物理学中的作用。这些，一定程度上也是本节所总结的传承的反映。与之相应的更为抽象与高端的数学工具，即李群李代数，在二十世纪中后期逐渐称为学习理论物理的必需。

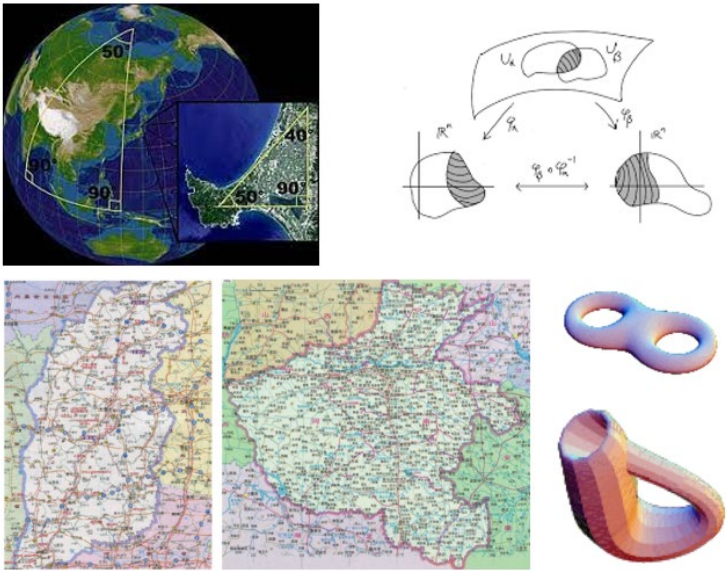


图 5.5 非欧几何中的一些概念。左上角是地球，很显然，其表面是一个球面。在地球表面画一个无限大的三角形，内角和显然并不为零。为了描述其表面，需要通过相互交叠的开集（右上）引入图卡（左下）的概念。这些都是非欧几何中的基本语言。它是描述右下曲面的理想工具。从这些图也可以看出，拓扑的概念与非欧几何也密切相关。右下角的瓶子被称为克莱因瓶。

5.5 传承在数学发展中的作用

最后，我们讲一下传承在数学发展中的作用。前面提到过，这一点在很多学

科中都是类似的。在面向大众针对这一点进行讲解的时候，数学与物理与科学的其它分支略有不同。它们（这两个学科）是如此的基础（特别是数学），以至于可以举得例子中牵扯到的人物我们多数都耳熟能详。因此，我们把这节当成是一个对科学的这个属性进行详细说明的机会。我们会以数学的发展为例，把这个规律呈现出来，供读者体会。这个规律是适用于科学的其它分支的。

在前面我们讲惠更斯的时候我们已经提到过，他深受韦达 (Franciscus Vieta, 1540–1603 年)、笛卡尔 (Rene Descartes, 1596–1650 年)、费马 (Pierre de Fermat, 1607–1665 年) 的影响，特别是笛卡尔。他虽然并不以数学成就著称，但莱布尼茨能够取得那么大的学术成就（包括数学成就），很大程度上得益于通过他处在笛卡尔这一脉上，并对这一脉的理性传统进行了充分的继承。莱布尼茨往后，他一个重要的学生是雅可比 I·伯努利 (Jacob Bernoulli, 1655–1705 年)。雅可比 I·伯努利带出了自己的弟弟约翰 I·伯努利 (Johann Bernoulli, 1667–1748 年)。约翰 I·伯努利有四个儿子，其中丹尼尔 I·伯努利 (Daniel Bernoulli, 1700–1782 年) 学术成就最大。他是流体力学中伯努利方程的提出者。同时，他还有一个好朋友欧拉 (Leonhard Euler, 1707–1782 年)。他们一起，引领了牛顿力学在 18 世纪的发展。也将法国、俄罗斯建成了世界数学的中心。

欧拉再往后，有个很有影响力的学生拉格朗日 (Joseph-Louis Lagrange, 1736–1813 年)。同时，虽然在直接传承上不能体现，但像笛卡尔、莱布尼茨、伯努利家族、欧拉这种人对法国数学的影响，也使得法国能够独立地涌现出达朗贝尔 (Jean le Rond d'Alembert, 1717–1783 年) 这样的数学大师。达朗贝尔的一个学生叫拉普拉斯 (Pierre-Simon Laplace, 1749–1827)。当法国数学、物理学的旗帜传承到拉格朗日、拉普拉斯的手中的时候，时间已经到了十八世纪末。法国的启蒙

运动也已结束。之后，拉格朗日与拉普拉斯以巴黎高工、巴黎高师为基地，培养出一批法国数学家，包括傅立叶（Joseph Fourier, 1768–1830 年，拉格朗日的学生）、泊松（Siméon Denis Poisson, 1781–1840 年，拉格朗日与拉普拉斯共同的学生）、阿拉贡（François Arago, 1786–1853 年，受益于拉普拉斯与泊松）、安培（André-Marie Ampère, 1775–1836 年，阿拉贡的合作者）、卡诺（Nicolas Léonard Sadi Carnot, 1796 – 1832 年）、柯西（Augustin-Louis Cauchy, 1789–1857）、伽罗瓦（Évariste Galois, 1811 – 1832 年）等一批又一批我们无法一一列举的杰出的数学家。现在，数学教育也是法国高校的特色。

同样的故事也发生在德国、英国、俄罗斯，我们仅以德国为例展开说明。在本书的前言部分，我们已经提到他们的科学发展是经历了一个从哲学、数学（这两个刚好也是最基础的学科），到实验物理学，到理论物理学，再到各个学科的系统渐进的逐步绽放过程的。这里我们可以略微转换关注点，从数学发展的角度来进行一个重新审视。这一切还是要从莱布尼茨说起。在莱布尼茨生活的年代，德国还没有统一，各个独立的王国相对于法国还很落后，更别说和英国对比了。但是之后的十八世纪，德国经历了古典哲学发展的黄金期。

前面提到过，黑格尔（Georg Wilhelm Friedrich Hegel, 1770–1831 年）比高斯（Carl Friedrich Gauss, 1777–1855 年）只大七岁。高斯是不世出的天才。德国的数学在他之后崛起，其中传承也起到了极其重要的作用。在这个传承过程中，哥廷根大学、柏林大学也扮演了极其重要的角色。高斯的学生辈中比较出色的是黎曼（Bernhard Riemann, 1826–1866 年）和莫比乌斯（August Ferdinand Möbius, 1790 – 1868 年），黎曼开创了非欧几何方面的系统研究，莫比乌斯的工作已经包含了拓扑的内容。在高斯的学生中，并不像黎曼、莫比乌斯这么著名，但也非常

出色的有古德曼 (Christoph Gudermann, 1798 – 1852 年)、格宁 (Christian Ludwig Gerling, 1788 – 1864 年)。其中, 古德曼有个极其著名的学生魏尔施特拉斯 (Karl Theodor Wilhelm Weierstrass 1815 – 1897 年), 是现代分析学的奠基人。格宁的学生普吕克 (Julius Plücker, 1801 – 1868 年) 又带出了克莱因 (Felix Klein, 1849–1925 年)。克莱因通过其学生林德曼 (Carl Louis Ferdinand von Lindemann, 1852 – 1939 年), 又影响了希尔伯特 (David Hilbert, 1862 – 1943 年)、闵可夫斯基 (Hermann Minkowski, 1864–1909 年)、索末菲 (Arnold Johannes Wilhelm Sommerfeld, 1868 – 1951 年) 这样的人物。他们在青年时代均在哥廷根大学学习, 之后有些也回到了哥廷根。因此, 用我们总是强调的“大学学科建设”的语言, 在这里我们可以说克莱因传承了高斯、黎曼, 将哥廷根大学发展为数学中心。

除了哥廷根大学, 还有柏林大学。魏尔施特拉斯, 对它的影响是巨大的。他带出了基灵 (Wilhelm Killing, 1847 – 1923 年)、康托尔 (Georg Cantor, 1845 – 1918 年)、弗罗贝尼乌斯 (Ferdinand Georg Frobenius, 1849 – 1917 年)、熊夫利 (Arthur Moritz Schoenflies, 1853 – 1928 年) 等人。在十九世纪末, 以哥廷根大学、柏林大学为基地, 再加上海德堡大学、慕尼黑大学、柯尼斯堡大学等其它高校的贡献, 德国的数学也迎来了巅峰。

最后, 笔者强调一下自己的专业是物理学中的凝聚态物理, 而非数学。本章的这些感慨也仅仅是自己在讲授《今日物理》课程的过程中, 体会到的我们需要学习的数学与我们在课本上或者各种读物中接触到的历史人物之间的联系, 进而挖掘这些人物之间的联系所总结出的一些个人感触。这里总结出来, 仅供参考。

第六章 与物理学相关的哲学思想的发展

第五章的主题是数学上的一些关键进步。它的作用，是为二十世纪初的物理学革命提供数学工具方面的支持。关于数学与物理之间的关系，我们在 1.3 节进行过介绍，大家在高中与大学的学习过程中也都会有比较深刻的认识。除了数学，哲学的进步对于物理学的发展同样重要。它的作用，是为物理学的发展提供哲学上的指导的（主要体现为形而上学、逻辑学方面的指导）。

哲学与数学一样是物理这个学科能够健康发展的基石。从我国目前大学物理教育的现在来看，对数学的关注是比较充分的，但对哲学的关注，却少之又少。产生这种现象的一个原因是科学革命之后，像物理学、化学、生物医学、地学先后独立。当这些学科独立后，形成了自身的一些特点。渐渐的，人们会将注意力集中在把专业做“精”。作为这个趋势附带的效果，这些学科与哲学的关系是会被忽视的。我国的现代大学教育开始于十九世纪末、二十世纪初。这个时候，科学革命早已结束。学科划分也已完成。因此，简单粗暴地参考当时西方高校的学科设置规划我们的学科，会让我们各个学科忽略其在哲学上面的根²²⁹。在向西方的好的高校学习的时候，或许我们需要把触角探得更深一些。同时，考虑到我们在高考招生与学科设置中习惯性地吧哲学划在文科这一大类，这个情况就会更加严重。

对于自然科学的所有分支来说，忽略其哲学的根儿都是不对的。对于物理学，这样做会尤其致命。实际上，在十九世纪末、二十世纪初物理学发展遇到瓶颈的时候，在物理学革命的进行过程中，那一批杰出的物理学家们在哲学层面对物理

²²⁹对于他们的高校，这种情况也有。这当然也是不对的。但毕竟他们比较好的自然哲学方面的积累，整体情况好一些。

学的学科属性的深度思考是在把物理学带出泥潭的过程中发挥了非常关键的作用的。但不得不说，目前不管是哲学专业的教材还是物理学专业的教材，在讨论物理学革命的时候，就哲学思想对物理学革命影响的讨论都很难看到。

本章企图在一定程度上对这个情况进行改善。笔者定的主题是“与物理学相关的哲学思想的发展”。需要说明的是哲学有太多的分支了，比如自然哲学、形而上学、逻辑学、政治学、伦理学、美学。其中，自然哲学演化出现代科学特别是物理学这一脉这个历史我们在前面的章节已经进行了足够多的介绍。本章主题，是从科学革命的时候开始的与物理学相关的哲学思想的发展。这主要体现在科学的形而上学的基础的建立上。正是因为有了这个基础，后期的科学（当然包括物理学）的发展才有了超越科学本身的方法论层面的指导²³⁰。

由于笔者并不是哲学专业，虽然最近四年为了讲课进行了大量阅读，但整体认识还停留在非专业的层面。作为物理学专业的老师，在讲义中讲太多与哲学相关的内容，在面向对这种讲法不感兴趣的学生和对这种做法不认同的同事的时候，也是会引起一定程度的争议的。笔者这两年从学生得到的反馈中，也有这样的内容。即便这样，在整理这个讲义的过程中，笔者还是非常坚持保留这一部分！笔者仅仅希望把这个当作一种非常理想化的教学尝试。就哲学方面的专业度而言，笔者也仅仅是希望把“与科学发展的哲学思想发展的脉络”理清，然后再面对一名大学一年级的新生把这个脉络给讲出来，为他/她进入大学后开展更为深入的阅读提供一些帮助。这样，本书作为一门通识教育的读物的目的就达到了。过于专业的哲学方面的细节，还是请大家一定去广泛地阅读哲学类的专业读物！

²³⁰ 这里大家可通过亚里士多德的《physics》与《metaphysics》（meta，在什么事情之后）之间的关系来进行一些体会。

我们的讨论将历史人物在时间上地前后顺序为主线展开。起点，是十六世纪中叶开始的科学革命。这个过程大致可分为两个阶段。

第一个阶段，主题是经验论与唯理论在欧洲大陆与英国的兴起与发展。代表人物，包括弗朗西斯·培根（Francis Bacon，1561–1626 年）、霍布斯（Thomas Hobbes，1588–1679 年）、笛卡尔（Rene Descartes，1596–1650 年）、斯宾诺莎（Baruch/Benedict Spinoza，1632–1677 年）、洛克（John Locke，1632–1704 年）、莱布尼茨（Gottfried Wilhelm Leibniz，1646–1716 年）、休谟（David Hume，1711–1776 年）。我们在这里把这两个方面（唯理论、经验论）的代表人物交叉罗列。这是因为在这个阶段的后期，这两部分哲学家的思想是会相互影响的。

我们首先强调的是在这个时期，哲学上人们关注的重点已经发生了从本体论到认识论的转移²³¹。与这个趋势相应，关于产生知识的背后的规律（即方法论）的研究也成为了哲学研究的主题。不过需要说明的是就哲学整体而言，在这个时期经验论与唯理论之间虽然相互影响，但它们的冲突还比较明显。成熟的、为多数人接受的学说并不存在。具体到本书关注的科学的发展，由伽利略提出的产生科学知识的方法虽然已经被人们广泛使用，基于这种方法人们也已经产生了很多确定性的知识，但这种研究方法背后的逻辑学与形而上学的基础也还非常稚嫩²³²。我们把这些略显零碎的思想放在一起，以唯理论与经验论为主题当作第一个阶段来讲。归纳法与演绎法的成熟应该说是这一阶段关键的成果。它们成为了人们获

²³¹也就是说从古希腊的时候关注世界的本源是什么，到从培根、笛卡尔开始关注如何获得知识，这样一个关注点的转移。甚至在与欧洲相距很远的东方发展起来的阳明心学也有类似的特点。笔者感觉“像卡尔·雅士培（Karl Jaspers，1883–1969 年）提出的公元前的轴心时代（axial age）的概念一样，在这个时期东西方的哲学又一次出现了神奇的同步”。

²³²人们在总结这段时间的哲学发展时，往往也会忽略伽利略而注重培根、笛卡尔及其晚辈们的贡献。这和伽利略本人是个科学家而非哲学家这一点是密切相关的。

取确定性知识所主要依赖的方法。但两个方法背后的形而上学的深度结合还需要在第二个阶段完成。

第二个阶段，主题是德国古典主义哲学的发展与成熟，时间上是从十八世纪下半叶到十九世纪四十年代左右。这个阶段哲学发展的中心在德国。代表人物，包括康德（Immanuel Kant，1724–1804 年）、费希特（Johann Gottlieb Fichte，1762–1814 年）、谢林（Friedrich Wilhelm Joseph Schelling，1775–1854 年）、黑格尔（Georg Wilhelm Friedrich Hegel，1770–1831 年）。其中，康德与黑格尔最为关键。前者为早期已经蓬勃发展但尚未建立牢固基础的哲学基础的科学提供了至今为止多数人还接受的、坚实的形而上学的基础。像先验时空、物自体、现象界这些概念，时至今日，依然是人们在进行科学探索时脑子里的形而上学思维框架。而后者的辩证逻辑，则在很大程度上规避了西方传统的形式逻辑的一元论的弊端。当然，他们的这些成就都受到了比他们早一些的法国启蒙运动中的哲学家的影响。考虑到我们并不是专门讨论哲学的发展，而是讨论与科学相关的哲学的发展，之前的像卢梭（Jean-Jacques Rousseau，1712–1778 年）这样的法国哲学家的贡献我们都掠过²³³。

应该说，德国古典主义哲学的成就在西方哲学史中的地位是分水岭式的。在后面我们要提到的物理学研究中，这些影响也多有体现。比如，时空这些概念在康德的形而上的哲学理论中被赋予先验的意义，这也为后期的电动力学、相对论的发展奠定了哲学方面的基础。再比如，当黑格尔的辩证法与传统的起源于古希腊的形式逻辑的手段结合后，像量子力学这样的二十世纪物理学类似于波粒二象性的新思想也拥有了哲学上的基础。因此，大家在理解这部分内容的时候，可以

²³³ 虽然卢梭深深地影响了康德。

把关键点放在“科学的形而上学的基础的建立”上。

在这两个阶段之后，科学革命不管是从哪个方面来讲都已经完成了。科学的形而上学的基础的建立，使得自然科学的各个分支学科都成熟起来并开始独立发展。科学获得了空前的成功，与哲学、神学并立一起支撑起人们的世界观与人生观【罗素，2022】。在很多语境中，科学甚至成为了正确的代名词。但我们需要承认的是，科学与哲学之间的关系没有改变。在科学发展陷入一定瓶颈的时候，如果从业人员具有一定的哲学素养，是可以在更深的层次反思他/她所处的这个学科在当时面临的基本问题的。这在二十世纪初物理学革命中扮演了重要角色的多位科学家身上是由非常充分的体现的。

基于上述考虑，我们在本章分：1) 经验论与唯理论；2) 德国古典主义哲学；3) 这些哲学思想对科学发展以及对（即将开始的）物理学革命的影响，三部分展开。最后，就像第五章开头部分所说，当数学上的准备（第五章）、哲学上的铺垫（本章）都已完成，十九世纪的欧洲大学又提供了很好的科学创新的平台之后（第七章），物理学革命（第八章）中新物理思想的提出，就会显得比较自然。

6.1 经验论与唯理论

按时间顺序，我们先从经验论方面的学说开始讲起。这也是与近代自然科学产生最为相关的哲学思想。在此之前，中世纪的哲学（也称为经院哲学）为神学服务的特征过于明显，以至于“确定性的知识产生”在哲学上并不是重点。

在经验论的道路上，虽说十三世纪来自英国的罗吉尔·培根（Roger Bacon，1214–1292 年）已经提出了“科学实验”的概念²³⁴，但此方法被系统的运用到自

²³⁴这个培根的哲学从时代和哲学特征上来看，实际上还是属于经院哲学的。

然哲学或者说是物理学的研究进而产生近代意义上的物理学却是要等到伽利略（Galileo Galilei, 1564–1642 年）的年代。和伽利略差不多同一个时期，来自英国的弗朗西斯·培根（Francis Bacon, 1561–1626 年）从哲学的角度表达了最早的近代科学观。由于伽利略的主要身份并不是一个哲学家，我们在本书的其它部分也已经给了他足够多的关注，这里从弗朗西斯·培根讲起。

6.1.1 弗朗西斯·培根与笛卡尔

弗朗西斯·培根的代表作是《新工具》²³⁵。在这本书里面，他系统地阐释了他眼中的科学的目的、性质，以及发展科学的正确途径。这些认识对于科学后来能够成为与哲学、神学并立的世界观起到了决定性的作用，这也是罗素在《西方哲学史》中的观点。这里，我们还可以引用玻恩的文集《我们这一代的物理学》中收录的他在 1921 年出版的《爱因斯坦的相对论》的导言中的一句来加深读者对这一观点的体会：当一个观念的主要内容成为大多数人的共同财富时，就产生了称为宗教信条、哲学学派和科学体系等精神活动。从弗朗西斯·培根，人们开始从哲学上关注如何构建系统的“科学知识体系”？这个进步，是划时代的！【玻恩，2015】

对于科学知识的产生，弗朗西斯·培根提出的方法叫“科学归纳法”。他强调人们不能像亚里士多德在他的《工具篇》中宣扬的，被中世纪经院哲学滥用的“演绎方法”，来获取知识。它有一个致命弱点：没有区分科学与逻辑。基于演绎逻辑，人们掌握的一切科学都是“证明科学”。由于人们采用的方法是依赖感

²³⁵这个著作对标的是亚里士多德的《工具论》。这是亚里士多德的传人们整理出的亚里士多德的六部关于逻辑的著作的集合。在科学的方法出现前，西方哲学以此为基础。这里，弗朗西斯·培根把它设定为目标，也意味着“认识论”将要完成的飞跃。

觉建立第一原则，然后由上往下推理，其产生的“科学知识”会有两个我们很容易理解的、明显的缺陷。第一，是演绎推理的基础，也就是我们常说的第一原则，往往是建立在少量不可靠的感觉之上，本身就不可靠。而它所包含的错误在演绎过程中是不可能被纠正的。因此，最终演绎出的结果自然会不可靠。第二，演绎过程是一个内部的过程。随着演绎的进行，结论与客观经验相距越来越远。因此，最后产生的知识也会没有实用价值。

针对这个问题，培根强调人们要基于“感觉经验”通过归纳来获取“有用的”知识。他所提出的方法叫“科学归纳法”。这个归纳是基于经验的，因此这个方法是经验性的方法。与亚里士多德的方法对比，基于实验的归纳法可以时上时下，产生的知识也可以反复检验。利用这个方法，人们就可以更便捷地产生新的确定性、具有实用性的知识。这对于传统的基于演绎演化出来的知识体系是非常重要的补充。

应该说，这个方法的提出是近代科学得以发展的基础。基于这样一个思想，人们可以设计科学实验。但需要说明的是由于科学知识可验证这样一个客观性²³⁶，很多时候我们会错误地认为经验论就是唯物主义、后面要讲到的唯理论就是唯心主义。实际上，它们之间并没有必然联系。首先，对于科学特别是物理学的发展而言，唯理论与经验论两种方法缺一不可。我们不能对立地看经验论与唯理论。其次，崇尚理性并不意味着不唯物、崇尚经验也不代表不唯心。当然，这些认识是被弗朗西斯·培根的后辈们逐渐完善的。在他的时代，经验论强调的是单纯地基于实验发现因果规律，进而产生客观性的知识体系。

²³⁶ 至少在当时，人们并没有认识到观测对实验结果的影响。物理学革命后，特别是在与量子力学相关的精密测量的进行过程中，人们会认识到这一点。

当然，弗朗西斯·培根的思想也有很明显的局限性，就是它对精神价值的作用在整体上是忽视的。这在一定程度上降低了科学作为一个“思想体系”的价值²³⁷。这一缺陷这对于一些针对具体问题的研究还好一些，但对物理学研究来说是非常致命的，因为物理学的一个终极目标就是建立一个统一的理论。这在一定程度上可以由笛卡尔（Rene Descartes，1596–1650 年）的唯理论来弥补。

笛卡尔比弗朗西斯·培根晚出生 35 年、比伽利略晚出生 32 年，罗吉尔·培根作为中世纪的哲学家，更是要比笛卡尔早几个世纪。因此，在笛卡尔的哲学中，我们是可以看到罗吉尔·培根、伽利略、弗朗西斯·培根这些人的思想的影响的。同时，在前面第三章与第五章我们提到过，笛卡尔也深受韦达这样的数学家的影响以及当时在欧洲最具代表性的系统性理论《几何原本》的影响。笛卡尔希望建立的，是一种与经院哲学不同的、具有确实可靠基础和实际效用的、系统的哲学理论。

关于这个理论的介绍，我们先从一点开始。这一点就是他的批评对象与培根是完全一致的，也是他认为完全无用的经院哲学。他认为利用他所倡导的确定性的知识，也就是现在我们说的科学知识，人们可以达到认识自然、支配自然、造福人生的目的。之后，我们想说明的是相对于弗朗西斯·培根，笛卡尔要想取得进步，一个更全面、更统一的科学观是一个自然的选项。笛卡尔采取了这个选项，并抓住的一个关键点：理性。这是他所提倡的人类认识和理解世界的方式。从理性出发，以他为代表的唯理论的哲学家们企图建立统一的科学观。按赵敦华老师在《西方哲学简史》第十三章开始的时候所言：笛卡尔坚持统一的科学观，（认

²³⁷基于经验去产生知识或许就会有这样的问题。

为)所有的科学门类都统一于哲学。他把哲学比作一棵大树,树根是形而上学,树干是物理学(自然哲学),树枝是医学、力学、伦理学等应用学科【赵敦华, 2012】。

基于这个认识,笛卡尔提出了一个与经验论可以并列的哲学方法:唯理论方法²³⁸。他认为数学方法是普遍适用的一般方法。这在形而上的层面为科学特别是物理学的发展指明了方向,也为后世的物理学研究与数学研究之间的关系奠定了基调。之后,以牛顿为代表的物理学家们也是沿着这个方向去发展物理学的。比如,牛顿在撰写《自然哲学之数学原理》的时候,参考的范本就是欧几里得的《几何原本》。它们的特征,都是基于一些抽象出来的定律或公理,推出一个统一的理论体系。然后,人类可以利用这个理论体系来认识和理解世界。

为了解释这个方法,在笛卡尔的代表作《谈谈方法》中,他提出了四条唯理的方法论的规则:

1. 决不接受我没有确定为真的东西;
2. 把每个我们面对的难题分解为若干部分;
3. 从最简单、最容易解决对象开始,逐步解决问题;
4. 最后,把一切情况尽量完整地列出来,综合、全面地解决问题,获得真理。

这四条用到的分析、综合的方法都是理性的方法。在这里,他并没有强调经验。

因此,笛卡尔崇尚的并不是经验归纳,而是用理性的方法构建哲学体系。这对弗朗西斯·培根的科学方法是极其重要的补充,深深地影响着后世。

²³⁸和二十世纪罗素那个年代人们对科学、哲学、神学之间的关系的认识不同,在科学革命的年代,直到黑格尔,人们都是企图把哲学做成科学的。因此,这里我们说笛卡尔坚信当时哲学首先要研究的是科学的方法。当然,后来人们认识到这样不行,哲学依然是哲学。

同时，我们也需要说明在上面的第一点中，笛卡尔强调怀疑。但如果怀疑一切，系统的、可靠的学说就彻底无法建立了。为了解决这个问题，笛卡尔提出了那句著名的“我思故我在（cogito ergo sum，在一些文献中被简称为 cogito）”，意思是即使当我把一切事物都想成虚假的时候，这个进行思维的“我”还是必然存在的。按罗素在其《西方哲学史》中所讲：我认识到“我思故我在”这条真理十分牢靠、十分确实，怀疑论者的所有最狂妄的假定都无法把它推翻，于是我断定我能够毫不犹豫地承认它是我探求地哲学中的第一原理【罗素，2022】。

基于“我思故我在”这一点，笛卡尔的哲学就可以立住了。但实际操作层面，针对笛卡尔在进行上面那四点判断的第一点，他还是需要采取可执行的原则的。为此，他的选择是“凡我们能够设想得很清晰、很判然的一切事物都是真的”。他的判据是思考中的真实的、可以信赖的我。因此，他可以杜绝早期的经院哲学对他的影响。但同时，他也承认做到这一点很难。为此，他需要引入“天赋观念”的概念。这个我们马上介绍。这一段，我们可以用这样一句话作为落脚点：所有这些合在一起，笛卡尔完成了“缔造了一个完整的哲学体系（的任务）。这是从亚里士多德以来未曾有得事，是科学的进展带来的新自信心的标志”²³⁹。

除了上面这些我们现在看来都非常进步的东西，我们也需要注意笛卡尔是生活在基督教社会的传统中的。我们在学习他的思想的时候不能超越当时的环境用现代人的认识去理解和判断的一些观点。比如，在牛顿之前，笛卡尔写过一本《宇宙论》。但是因为其中包含的地球自转和宇宙无限这两个异端学说很容易触及到教会敏感的神经，加上笛卡尔本身也是个懦弱胆小的人，针对伽利略的宗教审判

²³⁹这句话也来自罗素的《西方哲学史》。

对他产生了影响，这本巨著始终没有完整发表。在这个性格特点下，我们可以在一定程度上把他的“理性”理解为我相信上帝，但我不相信世俗神学的说教。这在当时，已经具有了极大的进步性了。基于这个，我们就可以理解前面提到的“天赋观念”了。

在建立唯理论的学术传统方面，笛卡尔认为人的观念可以分为三类：天赋的、外来的、虚构的。其中，只有天赋的观念是真实的。因为宗教的原因²⁴⁰，他的“天赋观念”也具备三个特征：来自上帝（天赋的）、明白清楚的、与实在相符的。这些天赋观念是真理的来源，而外部刺激造成的感觉则是不可靠的。这与经验论的思想形成了明显的冲突。基于天赋观念，人们可以通过理性的手段，获取可靠的知识。在他之后唯理论的哲学家们也都相信天赋观念。斯宾诺莎、莱布尼茨都把天赋观念当作人类知识的基础。当然，在斯宾诺莎那里，我们会解释他把这个上帝等价于自然界，而非传统宗教中的神。但整体而言，共同特征就是这部分观念不来自于人的经验。这一点，也逐渐演化为唯理论与经验论分歧的一个焦点。经验论的学者往往否认天赋观念，而认为经验是知识的唯一来源。这种分歧直到康德那个时候才得以改善。

6.1.2 霍布斯、斯宾诺莎、莱布尼茨与休谟

在弗朗西斯·培根与笛卡尔之后，德国的古典主义哲学成熟之前，经验论与唯理论在各自的道路上分别获得了很大的发展。这个过程中，有很多哲学家扮演

²⁴⁰我们在理解西方哲学家的时候，一定不能忽略这一点（在那个时期宗教对人的影响）。本节（6.1节）提到的哲学家中，除了斯宾诺莎，其他人对教廷的态度（或者说教廷对他们的态度）都是比较温和的。本书中，我们强调过好多次，在理解任何一个科学家、哲学家的时候，我们一定要把自己放到他/她当时的环境中去理解。

了重要的角色。这里，我们仅仅选出霍布斯（Thomas Hobbes，1588–1679 年）、斯宾诺莎（Baruch/Benedict Spinoza，1632–1677 年）、莱布尼茨（Gottfried Wilhelm Leibniz，1646–1716 年）、休谟（David Hume，1711–1776 年）做简单说明。其目的，不是为了完整的重现当时的哲学发展史，而是为了给很少关注哲学的物理学专业的同学或者是对物理学感兴趣的其它专业的同学简单地介绍一下近代哲学的发展是怎么促成近代科学的诞生的？前面提到过，笔者认为这对我们理解物理学、化学、生物学这些基础自然科学的学科是非常重要的。当然，这部分讨论还有另一个目的，就是为下一节引入关于德国古典主义哲学的讨论做一些准备。至于想对西方近代哲学有更加深入了解的同学，还是请参考西方哲学方面的专著²⁴¹。

先从霍布斯开始。他是经验论这一派的哲学家，但他的哲学思想具有一定的唯理论的因素。霍布斯早年做过弗朗西斯·培根的秘书。在英国革命前夕（1640 年左右），他到巴黎居住。在这里，他结识了笛卡尔，这也让他认识到弗朗西斯·培根哲学的不足。因为笛卡尔的关系，霍布斯熟悉了当时伽利略刚刚创立的物理学。同时，他也精通数学。这使得他这样一个来自英国的哲学家可以将弗朗西斯·培根的学说在一定程度上引入唯理论的因素，进而更加系统化。比如，他承认分析的方法是一种发明的方法，综合的方法是一种证明的方法。这两个方法，对于产生确定性的知识都很重要。实际上，它们也是我们现在从事科学研究经常结合起来使用的两种方法。相对于弗朗西斯·培根、笛卡尔这两位前辈，这无疑是方法论层面的一个进步。基于此，系统性的“确定性”的知识也更容易产生。但同时，这个系统化也带来了机械论。

²⁴¹ 这里笔者再强调一下，这些教材最好也是要大范围地、全面地来读，结合哲学史来读，仅仅看一本或者一个人，是很难有感觉的。

比如，霍布斯认为世界就是一个由因果链组成的大机器，物体由因果关系连为一个整体。这个机器可以是《利维坦》(<Leviathan>) 中的国家这样的政治机构，也可以是我们所面对的客观物质世界。这个思想很大程度上影响了后期的物理学发展。我们前面提到过的拉普拉斯的妖²⁴²（其产生的时间节点是十八世纪末、十九世纪初），就是这种哲学思想的一种极致体现。当然，拉普拉斯之后，人们认识到这个世界并不是传统意义上的严格因果，很多事件之间存在的关系只是关联。同时，作为主体的人在认识这些客观规律时也会发挥作用。这些超越机械论的哲学影响了后期物理学的发展，比如十九世纪的热力学与统计物理、二十世纪的量子力学。但这些，应该说都是后话。在霍布斯的年代，这种机械论的思想对于物理学的发展无疑是还有很大的促进作用的。比他晚半个世纪的牛顿所创立的牛顿力学就很大程度上体现了这种哲学思想。后来，牛顿的思想深深地影响了十八世纪的法国。法国的文人们也都比较推崇这种思想，拉普拉斯就是一个例子。

说完经验论方面的霍布斯，我们回到唯理论。这个方面，斯宾诺莎和莱布尼茨都传承并继续发扬了笛卡尔的思想。我们可以先从斯宾诺莎说起。斯宾诺莎在哲学上极其具有影响的，他写出了一系列非常系统的哲学著作，包括《笛卡尔哲学原理》、《神、人及其幸福简论》、《神学政治论》、《伦理学》、《知性改进论》【赵敦华，2012】。他们这些唯理论者的共同特征是强调人不能仅仅通过信仰与经验来认识世界，而应该依赖理性。这在斯宾诺莎身上得到了极致的体现。比如，他

²⁴²法国天文学家、数学家拉普拉斯于 1814 年提出的一种假象的智慧生物。基于牛顿力学，假如存在一个智者，他知道宇宙中每个原子确切的位置和动量。这样的话，根据牛顿定律，他就可以展现宇宙事件的整个过程，包括过去以及未来。这种想法的产生一定程度上是受牛顿力学在描述行星运动时成功的经验的影响。这种成功在拉普拉斯著作《天体力学》中也有体现。

企图以几何的方式来研究所有的哲学²⁴³。这种做法很极端。以他的《伦理学》为例，这本书的全称就叫《按几何顺序证明的伦理学》。在这本书中，斯宾诺莎几乎是完全套用《几何原本》的方式来展开讨论的。这种对理性的推崇也深深地影响了之后的启蒙运动。在与物理学相关的自然哲学的思想方面，斯宾诺莎认为世界上只有一种实体，也就是作为整体的宇宙或自然本身。它是一个在自身内并通过自身被认识的东西。换句话说，实体、自然、神是等同的，可以相互替换的。

相对于传统宗教、神话的一神论、多神论，这种观点被称为泛神论。我们可以想象在斯宾诺莎的时代，这种思想对神学是多么大的冲击。即使在当时宗教环境最开放的荷兰，他也不被接纳。包括犹太教、基督教的教会都对他进行了驱逐。但客观的讲，这个思想在一定程度上也可以使科学与宗教尽量和谐地相处（在这个思想中我并没有否认神的存在）。因此，对于比斯宾诺莎晚一些的哲学家们，斯宾诺莎就已经提出了类似思想从而造成了被各种教会迫害以及后来社会的反思这样一个事实，是会在他们与教会的相处中起到一定的保护作用的（当然，教会本身也随着时间的推移而变化）。在后面的康德的物自体、叔本华的意志的概念里面，我们都能看到这个思想的影子。它大体也是现代我们的物理学中讲的宇宙。

比斯宾诺莎再晚一些，唯理论的另一个代表人物是莱布尼茨。他毕业于莱比锡大学，之后在当时的德意志贵族的宫廷内任职²⁴⁴。在跟随这些德意志贵族出访巴黎的过程中，他结识了惠更斯。同时，他也在往返德国与巴黎的路上拜访了斯

²⁴³ 这里的几何，在当时指的就是欧几里得的《几何原本》。基于公理，通过理性演绎，获取知识。

²⁴⁴ 当时的德国还没有由普鲁士完成统一。莱布尼茨的著作也都是用拉丁语写的。即便到了十八世纪的康德，也是后期才开始用德语写作的。用德语产生高质量的书籍，对于后来德意志民族的整体认同以及普鲁士完成的统一，也是起了很大作用的。

宾诺莎。这既影响了他的数学与物理学，也影响了他的哲学²⁴⁵。在哲学方面，莱布尼茨的主要著作有《形而上学论》、《单子论》、《神正论》、《人类理智新论》【赵敦华，2012】。在这个时代，唯理论与经验论的一个分歧在于经验论认为逻辑与事实分属两个领域，各有各的方法，不应混淆。而唯理论则试图用逻辑的方法来解决关于事实的问题。

为此，莱布尼茨提出了“充足理由律”这样一个逻辑原则【邓晓芒、赵林，2014】。在他之前，从古希腊开始，逻辑学的基本原则只有三个：同一律、矛盾律、排中律。同一律的意思是我在描述一个事情的时候，一定要保证描述的是一个事情，不能换概念；矛盾律的意思是我的描述不能产生逻辑上相互矛盾的结果；排中律的意思是我的逻辑结果要么是对要么是错，不能既对又错，模棱两可。这个是亚里士多德的时候人们就明确的逻辑原则。到了莱布尼茨这里，他提出“任何判断必须有充足理由”这样一个充足理由律。充足理由律与同一律、矛盾律、排中律一起，这也形成了我们现在所说的数理逻辑。

应该说，充足理由律虽然意图解决唯理论与经验论的争端，但并没有说服当时的经验论者。比莱布尼茨稍微大一些但基本处在同一时代的经验论代表人物洛克（John Locke，1632-1704 年）就和莱布尼茨之间一直存在争论。但这个逻辑原则的提出对于后世的哲学发展的影响，是不言而喻的。我们现在的数理逻辑，基本就按着四原则展开。其中，前三个来自亚里士多德，第四个就来自莱布尼茨。

除了数理逻辑，与笛卡尔一样，莱布尼茨也赞同天赋观念的学说。略有不同的是他舍弃了笛卡尔的“天赋观念直接呈现”的观点，指出天赋观念不是现实的，

²⁴⁵当然，当时的数学、物理学都整体归于哲学。

而是潜在的。在与洛克的辩论中，莱布尼茨指出经验的作用是提供了发现天赋观念所需要的注意力。如果没有经验，天赋观念将一直潜伏在心灵之中。只是由于经验，人们才能注意到它们，并用实验检验它们。这就使得他的唯理论可以在一定程度上吸取经验论的思想成分（理性是根儿，有经验的辅佐）。这也为后期康德的更为全面的形而上学的理论的提出奠定了一定的基础。

本节最后一部分讨论我们围绕休谟（David Hume, 1711–1776 年）的经验论学说展开。休谟比本节前面提到的哲学家们都晚很多，和法国启蒙运动中的哲学家（比如卢梭，Jean-Jacques Rousseau, 1712–1778 年）基本同期。休谟和卢梭只比康德早十多年。休谟最大的标签就是“他是一个彻底的怀疑论者”。他认为形成知识需要的判断可以分为分析判断和综合判断两类。其中，分析判断的意思是基于对词句意义的分析进行的判断。基于分析判断得到的知识具有必然性，是必然的真理。而综合判断，则需要通过新的知觉把一个观念同另一个观念结合起来。因此，由综合判断得到的知识就只具有或然性，是偶然真理。

举个例子，当我们通过经验指出两个事情存在因果关系的时候，在休谟看来这个就不是分析判断而是综合判断了。这是因为这个判断不是基于对词句意思的分析得到的，而是通过新的直觉把两个事件联系了起来，进而得出的结论。综合判断的一个问题是它要把两个事情联系起来，而这两个事情之间的联系不是必然的。过去发生的事情只代表过去发生了，并不能必然的导致将来某个事情的发生。换句话说，先后发生的两个事情之间即使存在联系，你可以说它是关联，但它绝非因果。一方面，我们可以说休谟区分了关联与因果，这对后世的哲学的发展至关重要。另一方面，我们也可以说在休谟这里他基于判断的分类，否认因果关系存在的基础。在他之前，从弗朗西斯·培根开始，经验论哲学的目的始终都是通

过经验归纳的方法（依赖因果）产生科学知识。然而到了休谟这里，他却从逻辑层面指出感觉经验是个别偶然的，即使重复一万次，经验也是经验，不可能产生普遍必然性。这彻底动摇了当时蓬勃发展的自然科学的哲学基础。因此，我们也可以说休谟在将经验论学说进行发展、升华的同时，也把经验论最初的理想给无情地扑灭了。

最后，我们为本部分做一个简单的总结。在从弗朗西斯·培根到休谟这样一个时代中，人们在提出科学方法的同时，在哲学层面也对科学的方法进行了深入的思考。这些思考形成了经验论与唯理论两大体系，它们都是在神学还依然占据着非常重要的地位的情况下产生的。这些思考的一个作用是为科学作为一个确定性的知识体系的诞生奠定了哲学层面的基础。但这些哲学层面的基础是相对零散的、缺乏统一性的。比如，我们现在会说经验论和唯理论是产生科学知识的两条道路。其中，经验论主张经验是知识的唯一来源。而唯理论，则主张经验不是知识的唯一来源，除了经验的知识，还有推理得到的知识，以及先验的知识。但在休谟这个年代，人们还没有形成这种认识。套用康德的观点：人们还不得不忍受唯理论所带来的独断论的弊端以及经验论所带来的怀疑论的弊端。

6.2 德国古典主义哲学

在唯理论的框架下引入先验的知识，进而克服这些问题²⁴⁶，是休谟之后像康德（Immanuel Kant, 1724–1804 年）这样的哲学家的贡献。历史上，康德也正是在休谟的基础上开始了对理性进行哲学批判，进而为科学在形而上学层面找到一条出路。这也就很自然地把我们关于科学、关于哲学的讨论带到了德国古典主义

²⁴⁶ 先验的英文是 Transcendental，多数场景下我们翻译为先验，有时也翻译为超验。笔者认为这个词或许翻译为“超验”更合适，因为 Transcend 有超然、超出的意思。

哲学的部分。在这个时候，哲学已经在很大程度上摆脱了神学的束缚。通过汲取经验论、唯理论的营养，德国的古典主义哲学为我们现代科学建立了坚实的形而上学的基础。

同时，我们还需要说明：随着时间的推移，相对于为牛顿的力学理论提供哲学层面的指导以及哲学层面的美化的第一个阶段的欧洲哲学（6.1 节所对应的那个阶段），在物理学研究中，人们也开始关注“简单的机械运动”之外的内容。在第四章，我们提到过十八世纪物理学研究中人们在电学、热学方面的研究的进展。化学研究，也在经历从最初的“燃素说”向拉瓦锡的“氧化还原理论”这种关注变化的理论的变革。随着科学革命的深入，像能量、热量、变化这种极其抽象的概念进入并开始主导新兴的科学研究成为各个学科的一个共性。与之相应，哲学的关注点也从早期的相对不是那么抽象的内容，比如“物质”与“精神”，开始转化为一个新的层次的思考，比如“主体”和“客体”。这个时期的德国古典主义哲学大师，像康德、谢林、黑格尔，除了是哲学教授之外，本身也都从事物理学研究。应该说，正是哲学与“前沿的科学研究”的互动，让德国古典主义哲学从高度上成为了哲学研究中的一个分水岭，也成为了我们从事现代的物理学研究必须了解的内容。

本节，我们按顺序展开介绍四位最近代表性的哲学家。

6.2.1 康德

康德出生于东普鲁士的柯尼斯堡。他一生没有离开过这个城市²⁴⁷。康德的生

²⁴⁷柯尼斯堡（Königsberg）现在叫加里宁格勒（Kaliningrad）。历史上，它曾经是普鲁士公国的首都。十六世纪末，柯尼斯堡的普鲁士公爵将女儿许配给来自勃兰登堡的选帝侯，后者继承了他的爵位。之后，勃兰登堡与普鲁士公国形成共主的局面，共称普鲁士公国。普鲁士公国后来逐渐壮大，发展为普鲁士王国，甚至是后来的第二帝国。在这个过程中，柯尼斯堡对于德意志民族而言，一直是文化的核心区域。柯尼斯堡大学也诞生了如康德、雅可比（Carl Gustav Jacob Jacobi, 1804

活极有规律。他在大学的职位是形而上学与逻辑学的教授。同时，他本人也曾经是物理学的老师，他也是最早的星云假说的提出者²⁴⁸。在康德的哲学中，逻辑学与形而上学始终是重点。

康德的三个最主要的代表作按时间顺序，分别是《纯粹理性批判》、《实践理性批判》、《判断力批判》。这里，“批判”的意思并不是批评，而是探究、深度分析、厘定边界。其中，《纯粹理性批判》关注的是关于我们现在说的“科学”在认识论层面的问题。换句话说，它是用来解决 6.1 节最后我们提到的经验论与唯理论争端的问题的。这也是休谟在最后留下的难题。在《纯粹理性批判》中，康德系统分析了理性（也就是人类认识和理解世界的方式）的底层逻辑与普遍规律，建立了理论哲学的形而上学。

《纯粹理性批判》之后，康德又用《实践理性批判》分析了实践哲学的本质与边界，建立了像政治经济学、伦理学这样的实践哲学分支的形而上学。最后，在他去世前，由于他坚信“理性”与“实践”并不能构成完整的哲学²⁴⁹，他还用《判断力批判》分析了美学等其它哲学分支的本质与边界，并建立了它们的形而上学。因此，我们可以说康德在他的年代为哲学的各个主要分支均建立了形而上学的基础。这个基础，也就是由这些哲学衍生出了的各个学科背后的逻辑架构，

—1851 年）、基尔霍夫（Gustav Robert Kirchhoff, 1824—1887 年）、亥姆霍兹（Hermann von Helmholtz, 1821—1894 年）、希尔伯特（David Hilbert, 1862—1943 年）、（Hermann Minkowski, 1864—1909 年）这样的著名学者。在十八世纪，这所学校的精神领袖无疑是康德，他也是一个从哲学上带领德国进入现代社会的人物。1945 年，这个城市被划到了苏联，现在属于俄罗斯。

²⁴⁸比拉普拉斯早。

²⁴⁹我们的教育整体比较关注理性与实践这两部分哲学的内容，特别是理性这部分的内容。但实际上，审美与判断力同样重要，它们同样是一个人作为人的核心竞争力的体现。

直到现在还深深的影响着我们。在这三个代表作中，我们的关注点是科学，与本教材直接相关的就是《纯粹理性批判》。基于这个考虑，我们也把讲解的重点放在《纯粹理性批判》如何拯救科学上。

上一节讲到过，康德学说产生的历史背景是经验论与唯理论关于科学知识的普遍必然性问题的争论陷入了困境。在休谟那里，本着经验论的传统观点，他坚信“我们知道的只限于我们的知觉和印象中呈现的东西，至于这些东西后面是否有一个不变的实体在支撑着它们，对此我们一无所知”²⁵⁰。因此，利用理性的方法，基于经验产生的确定性知识的有限性问题也浮出水面。为了解决这些问题，按赵敦华老师在《西方哲学简史》中的介绍：康德首先接受了唯理论把“天赋理性”置于经验之先与之上的基本立场²⁵¹。在不断的思考和探索过程中，他在接受了牛顿物理学的同时也认识到经验的重要性，并由此接受了经验论对传统形而上学和对唯理论的批判。他说，正是休谟把他从独断论的睡梦中惊醒，但他最终没有选择经验主义，而是在唯理论与经验论之间另辟蹊径，开辟了先验哲学的新路径²⁵²。通过一场“哥白尼式的革命”，他把形而上学从怀疑论的泥潭中拯救了出来²⁵³。

²⁵⁰文献【邓晓芒、赵林，2014】的第204页。

²⁵¹在6.1节我们已经提到，从笛卡尔开始就有天赋观念的概念。

²⁵²文献【赵敦华，2012】第298页。

²⁵³在康德之前，人们在哲学研究中会把现实世界当作研究中心。康德做的，就是把哲学的研究中心放在了人的理性能力上。类比哥白尼之前的天文学把地球放在中心，而哥白尼提倡把太阳放在中心，人们说这是哲学研究中的一次“哥白尼式的革命”。读者也可以从康德的名言“人为自然界立法”体会这一点。这里，康德强调的是人的理性认知能力的边界，以及人在描述自然界的过过程中，对结果的影响。也因为这个原因，科学的认识论在康德这里进行了一场革命，深刻地影响了后世。在第八章我们强调在物理学革命中诞生的新物理，也具备这样的特征。如果用伽利略、

在融合经验论与唯理论的过程中，康德指出一切知识“始于经验但不止于经验”这样一个观点。在他的哲学中，知识不是孤立的概念，而是概念之间的判断。前面提到过，知识由判断组成这样一个观点实际上在休谟那个时候就已经存在了。休谟把判断分为分析判断与综合判断。其中，前者是必然、后者是或然的。康德哲学产生的一个很大的目的是为了回应休谟进而拯救科学。为此，他在休谟的基础上添加了一类更重要的判断：先天综合判断。他的理由是所有的分析判断在内容上都是先天的，在性质上都是必然的，这个固然不假。但我们不能因此就说所有的综合判断在内容上都是后天的，在性质上都是或然的。一些综合判断在内容上也可以具有先天的性质，进而也会带来一些必然的真理。

换句话说，在休谟那里，他承认逻辑和数学的判断是先天的、必然的，但他把综合判断等同于后天的或然判断。这种或然性，也将经验论彻底拉入了无法获得确定性知识的所谓怀疑论的泥潭。到了康德这里，他把判断分为三类：分析判断、后天综合判断、先天综合判断。这里，后天综合判断依然是或然的。但是，通过引入先天综合判断，他指出关于经验事实的判断也可带来必然真理。需要强调的是，这些必然真理不等同于传统的唯理论中的天赋观念，它是基于经验产生的。这样，通过先天综合判断的引入，传统的唯理论的独断性的问题和经验论的怀疑性的问题都得以规避。换句话说，康德统一了经验论和唯理论，也使科学与哲学随之拥有了一个坚实的形而上学的基础。

为了将这个学说细化，针对先天综合判断，康德继续把它分为三类：数学判断、自然科学的基本判断、形而上学的判断。其中，自然科学的基本判断和我们

牛顿那个时代的哲学去理解物理学，是不可能产生物理学革命中所诞生的相对论与量子力学的。这也是笔者坚持写本章的最主要的原因。

重点关注的科学的发展关系最为密切，这里单独的讲一下。自然科学的先天综合判断指的是比自然科学的基本定律（比如牛顿定律、高斯定律、波义耳-马略特定律）更一般的判断（比如因果律）。在康德的哲学中，它是以一种先验的方式存在的。这个概念的引入，让科学研究成为了“可能”。正是因为承认了因果，人们才可以通过经验获得新的科学知识了。也正是因为这个原因，我们说康德在一个关键的时期拯救了科学。

现在，人们理解很多科学问题所使用的哲学思维的方式，也还是遵循康德哲学的：先是先验地，在形而上的层面承认因果关系的存在；然后，又是先验地，假定一个叫做“时空”的东西存在，进而在其中描述事物，探寻科学中的因果。当然，这种通过先验确认因果的方式也有武断的成分，康德之后的很多哲学家会对其提出批评与改进。但不得不说，直到现在，我们在学习物理的过程中自然地采取的思维方式，也是在康德的哲学框架之内的。我们现在的多数人，在进行科学研究时，依然活在康德的世界中。

除了先天综合判断，在康德哲学中另外两个值得我们关注的概念是物自体和现象界。既然本书作为通识读物讲到康德的哲学，我们也应该稍微提一下这些概念。在康德看来，以人为主体的创造出来的科学知识是对“现象界”的描述。和现象界对应，还有一个本体的概念叫“物自体”，或称自在之物（德语：Ding an sich；英语：Thing in itself）。物自体在现象背后究竟是什么样子，这是超经验的内容，我们无法得知。而人类可以经验的世界，则需要经先天认知形式连接至认知主体（也就是人）。这也带来了所谓的表象（representation）的概念。

康德之后的叔本华，代表作是《关于意志与表象的世界》，其中的意志、表象就可以认为是康德这里的物自体和现象界的升级版。在此书中，叔本华开篇就

使用了这样一个句子：世界是我的表象，这是一个真理，是对于任何一个生活着和认识着的生物都有效的真理；只不过只有人能够将它纳入反省的、抽象的意识罢了。在二十世纪的物理学革命中，“表象”这样的概念被人们广泛使用²⁵⁴。比如，在量子力学的语言中，它就被用来描述我们可以“经验”的世界。最典型的例子就是我们在量子力学中经常提到的位置表象、动量表象。应该说，这些名称具有一定的哲学涵义。在量子力学中，根据测不准关系或互补原理，我们只能要么确定位置、要么确定动量。它们都是我们可以感受的世界。在康德的语言中，它们是现象界。其背后的“自然”本身（物自体），我们无从知晓。在叔本华的语言中，它们是世界的表象，背后的意志，我们无从知晓。我们只能在测不准关系的限制下，要么从“位置表象”来了解它，要么从“动量表象”来了解它。应该说，这些概念在物理学中的引入，是得益于十九世纪末、二十世纪初的那批欧洲科学家特别是德国科学家所受到的哲学教育的。我们在学习过程中，可以进行一些这个方面的思考与考究。笔者这里仅仅从阅读中总结一些个人看法，没有被专业的人士所检验。供读者参考与指正！

最后，回到康德这里，通过“物自体”和“现象界”两个概念的引入，他厘清了人类可以感知的世界的边界。同时，这个学说也为科学之外的哲学与神学（特别是神学）留出了空间。在当时的欧洲，这个空间是非常重要的，毕竟当时的宗教传统虽然比笛卡尔那个时候有所衰弱，但依然是很强的。理性，在物自体那里

²⁵⁴虽然海森堡当时用的词是 *Darstellung*（本意偏重于物理图像），而康德和叔本华的哲学著作中表象对应的此是 *Vorstellung*（本意偏重于精神层面的描述），但两者的英文都是 *Representation*，中文也都翻译为表象。应该说 *Darstellung* 和 *Vorstellung* 都有“呈现出来的内容”的意思，落脚点都是“呈现”（现象界中的部分），而非“本质”（物自体中的部分）。考虑到物理学革命后英语已经成为了科学的主要语言，而思想是通过语言表达的，它们之间的区别，在物理含义上也变得愈发的不明显。

依然起作用，但我们无法经验那个世界。在科学研究中，我们就是利用理性的工具针对可以经验的世界获取确定性的知识。

6.2.2 费希特与谢林

康德的寿命在他们那代人里面是很长的，活到了八十岁。晚年，他的学说已经非常有影响了。1787年，耶拿大学专门设立了讲授康德学说的“批判哲学讲席”的位置。第一任教授，是莱茵荷德尔（Karl Leonhard Reinhold, 1757–1823年）。他为康德学说的普及化和系统化做出了重要的贡献。之后，就是费希特（Johann Gottlieb Fichte, 1762–1814年）。他于1794年接替莱茵荷德尔担任这个教职，研究重点是康德的先验哲学。他引入知识学这样一个名词（Wissenschaftslehre）来描述科学的科学、知识的知识。后来，哲学与科学研究中的很多名词，像自然科学（叫 Nature Wissenschaft, 德语 Nature 也是自然的意思, Wissenschaft 原意是只是，与自然合在一起就成了自然科学）、人文科学（叫 Geist Wissenschaft, 其中 Geist 是精神的意思），都与费希特的哲学有关²⁵⁵。

比费希特再晚一些，谢林（Friedrich Wilhelm Joseph Schelling, 1775–1854年）又在他的基础上将关于知识的研究转移至关于自然的哲学知识上【谢林, 2022】。他认为自然是一个能动的“精神世界”，表现为以对立面存在的各种各样的力，比如引力与斥力、作用力与反作用力。在最低的层面，自然表现为运动着的物体；在较高的层面，表现为力、热、光、声、电、化学等现象；在最高的层面，表现为一个有机体。他把自己的这套关于自然科学的思辨称为思辨物理学。这些思想也影响了十九世纪初的热学与电磁学的发展。当然，谢林提出这些学说的目的是

²⁵⁵ 这里，我们也可以再次理解一下哲学是万有之母这一点。基于哲学的进步，不同学科逐渐成熟、独立。在这些学科成熟、独立后，我们千万不能忘记哲学。这也是笔者总结这个讲义的目的。

用概念的、理性的方式把握和构建自然，并不是产生具体的我们在教科书上学到的热学、电磁学的知识。因为这些特点，在哲学史上一提到谢林，关键词就是自然哲学。它对应的，很大程度上是十八世纪末、十九世纪初的热学、电磁学等物理学内容的哲学描述。

最后，我们需要指出的是在费希特与谢林之后（十九世纪初），科学这个词开始大量地出现在文献之中，科学家也成为一种职业取代自然哲学家²⁵⁶。这种情况，应该说也是在德国古典主义哲学为科学建立了坚实的形而上学的基础之后，科学脱离哲学而成为一种单独的知识体系的一个结果。科学能够作为一种独立的意识形态进行发展，既有康德的贡献，也有费希特与谢林的贡献。当然，作为那个时代的哲学家，他们的哲学中肯定有很多关于宗教的思考，这不在我们的讨论范围之内。

6.2.3 黑格尔

本节最后一部分的讨论是关于黑格尔（Georg Wilhelm Friedrich Hegel，1770—1831 年）的。黑格尔比谢林甚至还要大上几岁，但成名却比谢林晚很多。在关于德国古典主义哲学家的介绍中，一般把他放在最后，除了他与康德首尾呼应，或许也有成名先后的考虑。

1808 至 1816 年，在进入大学工作之前，黑格尔在纽伦堡当了八年的中学校长。在这段时间，他完成了代表作《逻辑学》【赵敦华，2012】【邓晓芒、赵林，2014】。之后，黑格尔才被海德堡大学聘为教授，后转至柏林大学。黑格尔认为哲学就是哲学史。因此，他的哲学体系是庞大、全面、有丰富的历史内容的。他

²⁵⁶前面我们在讲科学革命的时候提到过，这个说法来自威惠尔（William Whewell，1794—1866 年）【Ross，1962】。

的哲学的基础是他的逻辑学，也就是辩证法。之前，欧洲哲学研究中主体用到的逻辑学是形式逻辑。在这个体系中，矛盾是要被尽力避免的。虽然在康德时候，他就已经意识到理性在很多时候会不可避免地带来矛盾。

到了黑格尔这里，他明确指出辩证法作为唯一的、真正的科学方法不是外在的，而是由事物固有矛盾决定的。在亚里士多德的大前提、小前提、结论这种逻辑判断的基础上，黑格尔加入了正题、反题、合题的逻辑形式，并基于这种逻辑形式利用矛盾来描述推动世界的原则。这种逻辑形式在科学特别是物理学的发展中扮演了重要角色。最典型的一个例子就是人们对光的本质的认识。早期，在牛顿那个时候是微粒说。十九世纪初，在托马斯·杨（Thomas Young, 1773–1829 年）、菲涅尔（Augustin-Jean Fresnel, 1788–1827 年）等人的努力下，微粒说被波动说取代。但是从二十世纪初开始，人们又认识到其具有波粒二象性。这显然是前面两者（正体对应微粒说、反体对应波动说）的合体（波粒二象性）。这种辩证的逻辑在后来的物理学革命中发挥了重要的作用。

除了光的波粒二象性，量子力学在 1923–1926 年之间之所以能够取得突破发展的一个关键点就是德布罗意意识到这个二象性同样适用于电子。之后，这个图像也被应用至其它微观粒子。一定程度上，这也是黑格尔所提倡的正、反、合的辩证逻辑的一个应用。应该说物理学的研究跟数学还是存在很大区别的。在数学的研究中，数理逻辑往往是占据主导地位的。而物理学的发展过程中，辩证逻辑貌似不可避免。至少在某个阶段，我们无法绕过。

基于这个考虑，本节我们以康德开始、以黑格尔结束。我们想强调的是德国古典主义哲学的成熟经历了从十八世纪后半叶到十九世纪四十年代这样一个漫长的过程，为科学（特别是物理学）建立了坚实的形而上学的基础。我们现在进

行物理学思维时遵循的很多规则，都是在那个时候建立的。作为这种哲学发展的一个结果，到了十九世纪上半叶，充斥着理性的科学已经作为一种与神学、哲学平行的世界观，可以独立存在了。我们历史上所谓的“科学革命”在这里告一段落，但下一场在物理学领域更为猛烈的“物理学革命”实际上已经开始酝酿了。

6.3 这些哲学思想对科学发展以及对物理学革命的影响

最后，我们讲一下上述哲学思想对科学发展以及对（即将开始的）物理学革命的影响。我们首先需要说明的是从物理学发展的角度，笔者对“科学革命”和“物理学革命”的一点看法。在本书中，我们尊重历史学上的命名规则，使用“科学革命”与“物理学革命”来分别描述牛顿引领的近代物理学的诞生以及由相对论和量子力学引领的现代物理学的诞生。但从物理学发展的角度来看，我们可以把它们看作两场“物理学革命”。

第一场，当然是作为历史上的科学革命的一部分存在的。从物理学发展的学科规律来看，它有它的数学基础（解析几何、微积分）、哲学基础（弗朗西斯·培根、笛卡尔建立的哲学）。成果，就是经典物理学的建立。第二场，就叫物理学革命。它当然也有它的数学基础（线性代数、非欧几何）、哲学基础（康德哲学）。我们是可以通过这种对应来理解它们的。成果，就是以量子力学和相对论为代表的现代物理学的建立。

对于第二场，也就是我们常说的物理学革命，我们在前两节介绍了它的哲学基础。当然，康德之后，对于物理学革命中扮演重要角色物理学家们（比如爱因斯坦、玻尔、玻恩、海森堡、薛定谔等），十九世纪中后期、二十世纪初的一些哲学家也是会对他们产生重要影响的，比如：叔本华（Arthur Schopenhauer, 1788

-1860 年) 与马赫 (Ernst Mach, 1838-1916 年)²⁵⁷。但一定程度上, 我们可以把叔本华的哲学当作是康德哲学的传承与发扬。而马赫的影响, 则过于具体²⁵⁸, 有时甚至比较负面²⁵⁹。因此, 我们还是把精力放在前两节关注的这些哲学内容上。

这些哲学发展的整体效果是科学的形而上学的基础的建立。这个基础, 是非常坚实的。它使得我们从事自然科学研究的人在很大程度上都可以忘却我们的学科背后的哲学问题, 专注于具体问题的解决。这也造成了整个十九世纪, 科学的发展越来越专门化。科学家开始广泛的成为一门职业, 成为人们谋生的手段 (当然背后是兴趣主导)。这种专门化当然是有好处的, 在学科发展没有遇到瓶颈的时候, 专业人员可以比较专著地将一些问题细化为技术性的问题, 并逐步解决。物理学也作为重要的助力, 帮助人类完成了第一次与第二次工业革命。

但是, 当学科的发展遇到一些比较严重的瓶颈的时候, 仅仅在学科内部去思考技术性的问题就会表现出某种局限性。这个时候, 就需要从事这方面的基础性理论研究的科研人员具有相当的哲学基础了。笔者在受教育阶段阴差阳错在德国

²⁵⁷以爱因斯坦为例, 马赫对他的影响 (水桶实验不同于牛顿的解释进而启发了等效性原理) 很多文献中都有记载。叔本华这里文献中讲的不多, 但据他的 (继) 女婿、史学家鲁道夫·凯泽尔 (Rudolf Kayser, 1889-1964 年) 所述, 二十世纪 20 年代, 爱因斯坦在柏林书房的墙上挂着三幅名人的肖像, 这三位人士分别是: 法拉第、麦克斯韦、叔本华。前两位分别是经典物理大厦中电动力学的重要建立者, 也是最早提出“场”的概念的人。他们二位的出现并不令人惊讶。叔本华, 作为实实在在的哲学家, 在这里出现就有一定的涵义了。爱因斯坦的办公室肯定不可能随便出现一个人的画像, 如果不是出于对叔本华十分的敬仰或是对自己有极大的影响, 爱因斯坦的做法将变得不可解释。当然, 这些都是后康德时代的哲学家, 我们这里的讨论, 还是集中在以康德为代表的德国古典主义哲学的成熟及其对科学的影响上。

²⁵⁸主要是对爱因斯坦, 通过等效性原理。这个可以放到康德哲学框架下来理解。

²⁵⁹比如对玻尔兹曼, 具体体现是马赫长期反对原子论。这里的主要原因, 是在马赫生活的大部分时间, 原子并不能不看到或直接感受到, 而马赫是强调我只能相信我看到的東西的。基于这种看法, 他和他的学生奥斯特瓦尔德 (Friedrich Wilhelm Ostwald, 1853-1932 年) 一道, 与玻尔兹曼 (Ludwig Eduard Boltzmann, 1844-1906 年) 展开了激烈的论战。最终, 玻尔兹曼也陷入了抑郁。

完成了博士阶段的学习。因此，笔者会有一个比较强烈的感受就是物理学革命以德国作为中心发生并完成并不是偶然。这与他们的哲学积累（本章）、数学积累（第五章）、体制上的准备（第七章），都是密切相关的。在第八章，我们会从基尔霍夫开始，回顾这里历程。相信读者在完成这几章的阅读后，应该有一定程度的感受。

本章结束的时候，我们仅以哲学方面的积累为例，结合物理学革命中爱因斯坦、海森堡他们面临的一些问题，做个他们可能进行的哲学思考的讲解。

我们首先强调不管是相对论还是量子力学，在取得突破性进展的时候，那个突破者的出发点都是物理学研究的是现象界。因此，他们必须以人为主体的，从感知出发来讨论问题。在狭义相对论那里，这体现为爱因斯坦对“同时性”的考虑。他并不是说两个人不进行交流就在心里默认了同时性，而是强调通过人与人之间必须经过信息交换来确认“同时”（8.5.3 小节）。与之响应，光速不变原理一定要存在。同时，不同的人看对方的运动，也会总结出一样的规律。这个就是相对性原理。这两点所体现的康德哲学的以人为主体的来获取确定性知识的精神，是要得益于康德之前所厘清的科学的边界的。除了狭义相对论，在广义相对论那里，这个原则更是得到了进一步的推广。广义相对性原理、等效原理，说的也是类似的内容（8.5.4 小节）。这个时候，假如笔者做一个爱因斯坦不了解任何康德哲学的设想，笔者很难想象爱因斯坦会进行那样的思考。

到了量子力学发展的关键期，同样有类似问题。这里除了康德哲学，黑格尔的辩证法也有积极的影响。比如光的更新后的粒子说，爱因斯坦就是提出者。1923-1924 年，当德布罗意关于电子的物质波理论遇到问题的时候，爱因斯坦也是一个坚定的支持者。这里，辩证法都是起到一定作用的。同时，1925 年，当海森堡

提出革命性的矩阵力学理论的时候,他的出发点是他要在自己的物理学中去除像电子轨道这样不能被观测的物理量,而是依靠可以被观测的原子光谱展开。这里体现的,也是康德哲学中“现象界”的概念【康德, 2022】【叔本华, 2018】【叔本华, 2022】。

至于在 1926-1927 年之间发展起来的表象的概念,我们前面也进行过强调。海森堡当时用的词是 *darstellung*, 他的本意偏重于“物理图像”。而在康德和叔本华的哲学著作中,表象对应的此是 *vorstellung*。它的本意偏重于精神层面的描述。两者的英文都是 *representation*, 中文也都翻译为表象。*darstellung* 和 *vorstellung* 都有“呈现出来的想象的内容”的意思。考虑到物理学革命后英语已经成为了科学的主要语言,思想是通过语言表达的,它们之间的区别,在物理含义上也变得愈发的不明显。对于这段,笔者承认是非常个人的观点,并没有在其它文献中看到过。这里,也是写出来仅供读者参考与指正!

第七章 十九世纪的欧洲大学

与第五、第六章讲述的数学的发展、哲学的进展同步，十九世纪普鲁士作为欧洲的新兴民族国家正式崛起。现在德国的框架，基本上是由当时的普鲁士王朝定义的。从科学研究人才培养的角度，德国大学的崛起是对传统的英国、法国的科学人才培养的一次重要的补充。当然，欧洲的其它国家，特别是像荷兰、丹麦、瑞典、奥地利这样西欧国家，也有自己的好大学和好的学者。在整个欧洲范围内，顶尖的学者作为专业从事科学研究的人员在各个大学聚集，形成了科学革命后的一个盛况。

需要说明的是这个时候的大学和之前的大学是有一定区别的。在 2.7 节讲解中世纪欧洲的自然哲学发展的时候，我们提到过在十二世纪后期欧洲的城市中已经开始出现了一些大学，像意大利的博洛尼亚大学、法国的巴黎大学、英国的牛津与剑桥大学。“大学”这个词的原意是“统一体”，代表教师与学生的行业公会。这些机构后来在科学革命的进程中也发挥了重要的作用。我们所提到的很多科学革命中的关键人物，都是在这种类型的大学中接受的教育，进而做出那些重要的学术成就的。但整体而言，在当时教会对大学的影响与控制还比较严，同时自然科学下属的各个分支还没有成熟，专业从事科学研究的人员数量也比较有限。当时的很多科学家，自己也有自己的职业，并不依靠大学的教职生活。

十九世纪的欧洲大学，经历了科学革命的洗礼，相较之前的大学发生了翻天覆地的变化。同样在这个时间节点，普鲁士的教育改革已经开始并进行地如火如荼，催生出一批一流的德国大学与一流的学者。这些高水平的学者加上年轻的学

生以大学为平台开展研究²⁶⁰，考虑到中西欧地域比较集中，不同大学间的学术交流也很密切，这就为知识的进一步创新提供了体制保障。本节，我们将关注点放到十九世纪的欧洲大学，讨论物理学革命的另一个条件。

我们的讨论，将分：1) 科学革命对欧洲大学的影响与普鲁士的教育改革，2) 以哥廷根大学、柏林大学为代表的德国大学，3) 其它欧洲国家的大学，三节来展开。

7.1 科学革命对欧洲大学的影响与普鲁士的教育改革

科学革命之后自然哲学演化为自然科学，科学既是一种人们崇尚的获取确定性知识的方法，也是一种与哲学、神学并立的世界观。与之伴随的，是神学在欧洲的影响相对于科学革命前被明显弱化。在科学内部，不同分支诞生，从事科学研究的人员也开始专业化。举个例子，在科学革命初期，笛卡尔的主要身份还是哲学家（研究内容包罗万象），但是到了科学革命的后期，高斯的身份就是纯粹的数学家了。

因为科学的迅猛发展，科学本身也不再仅仅是书斋里的学问，被人们束之高阁。相反，它与人们的日常生活产生了非常密切的联系。比如，在 5.4 节我们就讲过高斯意识到非欧几何是极其重要的数学问题一个关键因素就源于他接到了画地图的这样一个实际任务。这可以反映出当时的欧洲社会对新型大学的需求。世俗政府相对于教会，更加欢迎专业化的科学家，因为这对新兴民族国家的成功至关重要。这就使得在欧洲的大学里面，科学家备受推崇。而专业化的科学家，也可以安心地从事专门化地科学研究。

作为十九世纪最成功的欧洲国家，德国和德国的大学在整个十九世纪以及世

²⁶⁰ 这个时候的学者就已经依靠大学的职位生活了。

纪初都表现优异。他们也是物理学革命的主力军。在讨论完十九世纪欧洲大学面临的世俗环境后，我们可以简单谈一下德国与德国的大学。

一切改变的触发点是十九世纪初普鲁士输掉的第一次普法战争。作为一个新兴的有进取心的民族国家，普鲁士痛定思痛，开展了全面的改革。这在史上被称为普鲁士改革运动（Prussian Reform Movement）。这场改革涉及宪法、行政、社会、经济、教育等多个方面，是对当时普鲁士社会的一场全面的改革。其中，教育部分由威廉·冯·洪堡（Friedrich Wilhelm Christian Carl Ferdinand von Humboldt，1767–1835 年）负责。威廉·冯·洪堡采取了一系列措施，彻底改变了德国教育相对于英国、法国这些已经崛起的资本主义国家落后的局面²⁶¹。

具体而言，威廉·冯·洪堡在 1809 年被委任为普鲁士国王任命负责教育改革。他公布了一系列措施，包括引入教师考试、引入统一的中学毕业考试、引入十年制的中学教程（其中最成功的就是一系列高水平德式文理中学的建立）。当然，和高等教育最相关的还是对大学的改革。他于 1810 年创建柏林大学，提倡科研与教学的统一、高校自治、拒绝将大学学业作为职业培训阶段。与大学对应，德国还设立了专门的职业技术学校来完成职业技术教育的功能。这些措施多数沿用至今。除了柏林大学这所在教育改革中成立的大学在十九世纪发展为欧洲的一流大学，哥廷根大学更是在这场教育改革中一跃成为大师的聚集地²⁶²，彻底引领

²⁶¹ 本书出于通识性的考虑，会把这场教育改革用洪堡作为符号来进行简化描述。在专门从事教育学研究的同行的著作中，这个是不对的【陈洪捷，2024】！德国教育改革的成功是十九世纪一批德国精英合力达成的，包括康德、费希特、谢林、施莱尔马赫（Friedrich Schleiermacher，1768–1834 年）等一批哲学家。当然也包括那些在一线从事学科建设的科学家。感兴趣的读者请参考教育学方面的专著来详细了解这段历史。我们这里仅仅是面对高中毕业的学生，让大家知道有这个事情。

²⁶² 其他还有一系列大学，比如柯尼斯堡大学、海德堡大学，这些学校之间的学者流动也非常频繁。这都是极其符合科学规律的。我们就不一一展开介绍了。

了十九世纪下半叶、二十世纪初的数学发展与物理学革命。

7.2 以哥廷根大学、柏林大学为代表的德国大学

哥廷根大学成立于 1737 年，它是人类历史上第一所拥有广泛教学与科研自由并且将教学与科研结合起来的现代大学。建校伊始，哥廷根大学就特别强调哲学院，并将其与神学院、法学院和医学院并列为四大学院之一。这与整个德国在十八世纪希望通过哲学进步来促进民族发展的思路是一致的²⁶³。当然，哲学以及滋生于哲学的自然科学学科成熟地较晚，早期哥廷根大学的强势学科是比较传统的法学，其法学院也培养出了像约翰·斯蒂芬·普特（Johann Stephan Pütter, 1746–1822 年）这样影响德国的杰出的法学家以及像威廉·冯·洪堡这样杰出的外交家、教育家²⁶⁴。十九世纪，对德国产生了决定性影响的铁血宰相俾斯麦（Otto von Bismarck, 1815–1898 年），也是在其法学院完成的高等教育。与哲学相关的学科，特别是科学革命后从中独立的数学、物理等学科，是在十九世纪后才按渐进的方式逐步迎来了学科建设的高峰。

其中，数学学科成熟的较早。这在很大程度上得益于数学王子高斯的贡献。他于 1807 年在哥廷根大学开启了自己的学术生涯²⁶⁵，工作至 1855 年去世。除了自身涵盖数学各个领域的杰出学术成就，他在这里还培养出像黎曼这样的学生。

²⁶³ 当时的德国还是不同的王国集合，同属德意志民族。当时欧洲社会发展的一个主题也是民族国家的兴起。

²⁶⁴ 洪堡也是最早游历世界的德国人，他在 1799 年和 1804 年之间到南美洲探险，并写了一个《个人叙述》（<Personal Narrative>）。我们在 3.3.8 小节提到达尔文登上猎犬号之前，还专门看了这本书进行知识储备。应该说，洪堡的这种游历世界的经历对于他的视野提升一定是很有帮助的。

²⁶⁵ 虽然他的教职是在天文台。

高斯去世之后，哥廷根大学数学方向的负责人几经易主，但总是能找到大师级的接替者来保障其数学学科的水平。比如，1855 年高斯去世，狄利克雷 (Peter Gustav Lejeune Dirichlet, 1805–1859 年) 从柏林大学转至哥廷根。但不幸的是狄利克雷 1859 年就去世了。他的继任者是黎曼。但黎曼于 1866 年也去世了。之后，克莱布什 (Rudolf Friedrich Alfred Clebsch, 1833–1872 年) 与克莱因 (Felix Klein, 1849–1925 年) 分别于 1868、1872 年加入哥廷根大学。这对于哥廷根大学的数学学科建设，是至关重要的。克莱因任职期间，除了继续其在爱尔兰根纲领中提出的统一几何学的工作，更是将希尔伯特从柯尼斯堡大学挖到哥廷根，这在程度上保障了哥廷根大学直至二战结束一直保持其数学中心的地位。同时，希尔伯特所创立的数学学派也在很大程度上帮助物理学完成了物理学革命。

除了数学，哥廷根大学物理的成功同样与高斯有关。1831 年，在高斯的举荐下，韦伯 (Wilhelm Eduard Weber, 1804–1891 年) 被聘为哥廷根大学物理系教授。韦伯在电磁场的研究方面对人类贡献巨大，与高斯也一直在这方面存在密切合作。比如，1833 年，他和高斯一起完成的人类历史上第一次电报通讯。1855 年，他又与科尔劳施 (Rudolf Hermann Arndt Kohlrausch, 1809–1858 年) 一起发现静电单位与电磁单位的比值刚好等于光速。这将光学与电磁学联系了起来，也为麦克斯韦的光电磁统一理论提供了支持。因为这些电磁学方面的贡献，目前国际单位制中的磁通单位韦伯是以他的名字命名的。韦伯之后，福格特 (Woldemar Voigt, 1850–1919 年) 与里克 (Eduard Riecke, 1845–1915 年) 两位教授也为哥廷根的物理学学科建设做出了很大贡献【Schirmacher, 2019】²⁶⁶。1915 年，福格特退休，

²⁶⁶ 福格特在解释迈克尔逊-莫雷实验的过程中，与庞加莱、洛伦兹一起是引领性的学者。他还发现光在通过受横向（与光传播方向垂直）磁场作用的气体时，会发生双折射的现象。这个也被称为福格特效应。

接替他位置的是德拜 (Peter Debye, 1884–1966 年)。四年之后, 德拜转投苏黎世理工学院, 玻恩又接替了他的教职。玻恩 (1882–1970 年) 上任之后, 将他的好友实验物理学家弗兰克 (James Franck, 1882–1964 年) 邀请至哥廷根大学物理系。至此, 完成量子论向量子力学转变的学科架构彻底形成²⁶⁷。1924 至 1926 年期间, 量子论向量子力学的关键转变也以哥廷根为中心得以完成。更多细节, 我们将在 8.3 节展开介绍。而化学方面, 像能斯特 (Walther Hermann Nernst, 1864–1941 年) 这样的顶尖并为量子力学发展做出了重要贡献的学者也长期在哥廷根工作, 后转至柏林, 在此我们不做太多赘述。

除了哥廷根大学, 柏林大学与柯尼斯堡大学也在这个阶段在数学与物理学科建设上成绩斐然。在十九世纪, 他们的学术成就与人才培养成果与哥廷根是可以比拟的。在关键的二十世纪初, 哥廷根大学、柏林大学的表现相对更出色一些。其中, 柏林大学在 1809 年开建, 1810 年正式成立。它是洪堡的教育改革的一个关键措施。相对于哥廷根大学, 柏林大学受到的政府支持明显要强很多。比如, 它的校舍就是当时的普鲁士国王腓特烈·威廉三世 (Friedrich Wilhelm III, 1770–1840 年) 的叔叔已故的普鲁士的亨利王子 (Prince Henry of Prussia, Friedrich Heinrich Ludwig, 1726–1802 年) 位于柏林中心的菩提树下大街上的宫殿。仿效哥廷根大学, 柏林大学也成立哲学、神学、法学和医学四个学院, 并有别于传统大学, 将哲学院放在一个很重要的位置。费希特 (Johann Gottlieb Fichte, 1762–1814 年)、谢林 (Friedrich Wilhelm Joseph Schelling, 1775–1854 年)、黑格尔 (Georg

²⁶⁷理论物理的负责人是玻恩, 旁边的助手包括海森堡 (Werner Heisenberg, 1901–1976 年)、泡利 (Wolfgang Pauli, 1900–1958 年)、约当 (Pascual Jordan, 1902–1980 年)。实验物理的负责人是弗兰克。数学方向, 又有希尔伯特、诺特 (Emmy Noether, 1882–1935 年)、魏格纳 (Eugene Paul Wigner, 1902–1995)、冯·诺伊曼 (John von Neumann, 1903–1957) 等人。

Wilhelm Friedrich Hegel, 1770 – 1831 年)、叔本华 (Arthur Schopenhauer, 1788 – 1860 年) 等人先后在此任教。德国古典主义哲学这些也在这里达到高峰。

除了哲学, 柏林的数学与物理同样成功。数学方面, 我们前面提到的在高斯去世后, 去哥廷根顶替高斯的狄利克雷 (Peter Gustav Lejeune Dirichlet, 1805–1859 年), 在去哥廷根之前, 就在柏林大学工作。他在 1855 年离开后, 库默尔 (Ernst Eduard Kummer, 1810 年 1 月 29 日–1893 年) 马上接替了他的位置。1856 年, 魏尔施特拉斯 (Karl Theodor Wilhelm Weierstraß, 1815–1897 年) 加入。他们两人密切合作, 除了各自的学术成就, 在这里也培养了弗罗贝尼乌斯 (Ferdinand Georg Frobenius, 1849–1917 年)、施瓦茨 (Karl Hermann Amandus Schwarz, 1843–1921 年)、康托尔 (Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor, 1845–1918 年)、基灵 (Wilhelm Karl Joseph Killing, 1847–1923 年)、熊夫利 (Arthur Moritz Schönflies, 1853–1928 年)、龙格 (Carl David Tolmé Runge, 1856–1927 年) 等一批数学家和物理学家, 将柏林大学的数学带入可以与法国这种传统的数学与物理学中心可以抗衡的状态。1883 年, 库默尔退休, 克罗内克 (Leopold Kronecker, 1823–1891 年) 接替。

物理方面, 代表人物是亥姆霍兹 (Hermann von Helmholtz, 1821–1894 年) 与基尔霍夫 (Gustav Kirchhoff, 1824–1887 年)。他们都是在十九世纪七十年代加入的柏林大学, 之前也分别在像柯尼斯堡大学这样的地方工作过²⁶⁸。除了自己分别发展了热力学理论、发现了黑体辐射最基本的规律, 他们带出的学生也包括像门捷列夫 (Dmitri Ivanovich Mendeleev, 1834–1907 年)、昂纳斯 (Heike Kamerlingh Onnes, 1853–1926)、赫兹 (Heinrich Rudolf Hertz, 1857–1894 年)、普朗克 (Max Planck, 1858–1947 年)、维恩 (Wilhelm Wien, 1864–1928 年) 这种深刻地影响科

²⁶⁸ 这所大学的发展, 很大程度上得益于康德的影响。

学发展的人物。基尔霍夫发现的黑体辐射不依赖于物质的现象，维恩和普朗克对其的理论解释，更是直接导致了量子理论的诞生。因此，不管从哪个意义上来讲，这个时候以哥廷根大学、柏林大学为代表的德国大学，从学科建设、人才培养等方面来讲都走在了世界的前列。

7.3 其它欧洲国家的大学

在新兴势力德国的大学崛起的同时，我们绝对不能忽略传统强国英国与法国以及包括荷兰、丹麦、瑞典、奥地利在内的已经完成工业革命的欧洲国家这个时候的科研实力。毕竟，之前，在热力学理论、电磁理论发展过程中，英国与法国科学家还是主力。像开尔文爵士 (William Thomson, 1st Baron Kelvin, 1824–1907 年)、麦克斯韦 (James Clerk Maxwell, 1831–1879 年)、玻尔兹曼 (Ludwig Eduard Boltzmann, 1844–1906)、瑞利爵士 (John William Strutt, 3rd Baron Rayleigh, 1842–1919 年)、洛伦兹 (Hendrik Antoon Lorentz, 1853–1928 年)、庞加莱 (Henri Poincaré, 1854–1912 年) 依然是欧洲最顶尖的物理学家。

以英国为例，麦克斯韦 1879 年去世，他在剑桥大学的卡文迪许实验室的教职由瑞利爵士接替。在这里，瑞利又培养出了像约瑟夫·汤姆孙（我们常说的 J. J. Thomson，电子的发现者，1856–1940 年）的学生，而约瑟夫·汤姆孙后面又培养出卢瑟福这样的引领物理学革命的人物。换句话说，在物理学革命的过程中，以剑桥大学为中心的英国大学依然保持着很高的学术水平，从未缺席²⁶⁹。同样，在法国，虽然十九世纪末期的社会比较动荡，但依然拥有像庞加莱这样顶尖的理

²⁶⁹ 卢瑟福进行行星模型试验的时候，因为剑桥大学的教职没有空出来，暂时在曼彻斯特大学工作，约瑟夫·汤姆孙退休后马上接替他回到了剑桥大学。

论物理学家以及像贝克勒尔 (Antoine Henri Becquerel, 1852–1908 年)、皮埃尔·居里 (Pierre Curie, 1859–1906 年)、玛丽·居里 (Maria Skłodowska-Curie, 1867–1934 年) 这样的顶尖实验物理学家。以巴黎为中心的法国大学同样保持着很高的学术水平。

在本章结束的时候，我们用这段话进行总结：科学革命的一个结果是科学的专门化，科学家们专职在大学工作，并以大学为基地开展更为深入的面向自然的探索。十九世纪末，德国是一个重要的新兴力量，但传统国家的高校同样保持很高的学术水平。这些欧洲的科学家们在理解了截至十九世纪末的数学方法、哲学思想后，又有大学这个平台的保障与频繁的学术交流。基于这些，他们在物理学领域提出革命性的新思想就比较自然了。

第八章 经典物理学的危机与物理学革命

本章介绍经典物理学的危机与物理学革命，这是一个让人热血沸腾的话题。前面提到过，在经历了科学革命与科学革命结束后十九世纪的发展之后²⁷⁰，在十九世纪末这个时间节点，物理学已经形成了一个相对于自然科学的其它分支（比如化学、生物）而言如同标杆一般自洽、优美的学科体系的存在。此体系基于康德提出的先验的时空结构，探索物质世界的运动与因果。其理论结果，可以被包含力学、热学、电磁学在内的诸多实验证实。

很大程度上也是得益于物理学的成果，“科学家”在这个时间节点也开始作为一个专有名词被人们广泛使用。科学在与神学、哲学的竞争中，获得了空前的胜利。随着道尔顿的原子论、阿伏伽德罗的分子运动论的提出以及天文观测的进步，人们也开始认为由牛顿力学、热力学两大定律、麦克斯韦的电动力学方程组形成的经典物理学体系无所不能。

比如，前面提到过的由沃特斯顿（John James Waterston, 1811–1883 年）、克朗尼格（August Karl Krönig, 1822–1879 年）、麦克斯韦（James Clerk Maxwell, 1831–1879 年）、玻尔兹曼（Ludwig Eduard Boltzmann, 1844–1906 年）等人在研究热学现象的微观机理时，就提出的具有力学基础的热学理论：kinetic theory of gases（气体动力学理论）。它可以很好地解释像卡拉帕隆状态方程（公式 4.19）这样的普适的物理学规律²⁷¹。1872 年，范德华（Johannes Diderik van der Waals,

²⁷⁰将 18 世纪末、19 世纪初甚至更晚一些当作其结束，不按《自然哲学之数学原理》的出版计，而按《化学基础论》计，或者《物种起源》计。

²⁷¹我们要知道卡拉帕隆状态方程是一个不依赖于具体气体，而对理想气体普适的方程。这个普适性使得它在物理学研究中地位很高，当时人们也觉得它很神奇。

1837–1923 年) 针对克拉帕隆方程中理想气体这个假设进行修正, 提出了范德华模型。相对于理想气体, 范德华模型考虑了分子间有吸引力以及分子会占据一个有限大小的体积这两个修正。基于这个模型, 气体与液体之间随着温度、压强条件的变化进行的转变也可以被描述。

除了在物理学方面的成果, 在化学研究领域, 以奥斯特瓦尔德 (Friedrich Wilhelm Ostwald, 1853–1932 年)、范德霍夫 (又译作范托夫, Jacobus Henricus van't Hoff, 1852–1911 年) 为代表的化学家将热力学理论用到了化学反应的理论描述中, 对看似复杂的化学反应也进行了行之有效的描述。要知道, 人们在那个时候甚至没有意识到量子力学的存在。因此, 化学反应中最本质的化学键的断裂与重组过程人们在当时实际上是不理解的。但这似乎也不妨碍人们基于平衡态的热力学理论, 对化学反应的反应物状态与生成物状态 (化学键重组前与重组后的状态) 进行理论方面的微观描述。这些, 应该说都是将经典的物理学理论应用到微观世界的成功。

宇观世界方面, 情况类似。天文学在牛顿之后也得到了极大的发展。从拉普拉斯开始, 天体力学作为一个学科独立, 摄动理论也成熟了。海王星的发现就是人们基于摄动理论进行预测进而在实验观测中得以证实的理论指导实验获得成功的典型案例。像我们都熟悉的高斯, 他的教职甚至也是在天文系而非数学系。到了十九世纪末, 庞加莱开始研究三体问题 (两个恒星、一个行星的问题, 这之前拉普拉斯提出的描述一个恒星、两个行星的摄动理论有本质区别)。在面对复杂的自然界的时候, 人们整体上是认为基本的物理理论是可以信赖的。

当然, 我们后来知道, 正是经典理论在微观、宇观世界的应用, 使得人们发现了超出经典物理学理论的思维范式的新内容, 进而诱发了物理学革命。本章,

我们回顾这个过程。我们的讨论将按照：基尔霍夫与黑体辐射、经典物理学的危机、破局 1（量子概念的提出）、从量子论到量子力学、破局 2（相对论）、物理学革命的影响，共六节展开。笔者希望通过这个安排，为大家理解物理学革命提供一个新的视角。

8.1 基尔霍夫与黑体辐射

8.1.1 基尔霍夫及其整体学术贡献简介

我们先从基尔霍夫讲起，他的全名叫古斯塔夫·罗伯特·基尔霍夫（Gustav Robert Kirchhoff, 1824–1887 年）。在本书前言部分我们提到过，他和亥姆霍兹（Hermann von Helmholtz, 1821–1894 年）在德国是属于承上启下的一代物理学家。在他们之前，有夫琅和费（Joseph von Fraunhofer, 1787–1826）、韦伯（Wilhelm Eduard Weber, 1804–1891 年）、迈尔（Julius Robert von Mayer, 1814–1879 年）、克劳修斯（Rudolf Julius Emanuel Clausius, 1822–1888 年）这些人。

其中，夫琅和费的特长是光学仪器制造，他系统研究了太阳光中的暗线²⁷²；韦伯来自哥廷根，他的主要合作者是高斯，主要贡献在电磁学领域，磁通量的单位是以他命名的；迈尔和克劳修斯的研究方向是热力学，他们对热力学第一定律都有贡献，克劳修斯在热力学第二定律的发现过程中更是起到了至关重要的作用。得益于夫琅和费、韦伯、迈尔、克劳修斯这些前辈物理学家的铺垫，以及从康德到黑格尔这样的前辈哲学家、像高斯和雅可比这样的前辈数学家们的积累，还有第七章提到的德国教育改革，到了基尔霍夫和亥姆霍兹这一批学者在大学扮演重

²⁷² 夫琅和费还发现火焰中有些亮线，这些亮线的频率与太阳光中的暗线有一些是一致的。这实际上也是量子力学最早的迹象（对应的是原子内电子能级的跃迁）。只不过那个时候人们不会这么想。

要角色的时候，德国大学和大学中的物理学家们就开始引领物理学研究的最前沿了。相比于他们的这些前辈，基尔霍夫与亥姆霍兹有个重要特点是他们的教学也是一流的。比如，基尔霍夫有一套《数学物理讲义》，亥姆霍兹也有一套《理论物理讲义》。对于当时的德国大学生，这种成套的教材产生了重要影响的²⁷³。

与物理学的发展伴随，德国的化学学科在基尔霍夫与亥姆霍兹的时代也已崛起。而数学方面，哥廷根大学传承了高斯与黎曼，在克莱布什（Rudolf Friedrich Alfred Clebsch, 1833–1872 年）与克莱因（Felix Klein, 1849–1925 年）的带领下，柏林大学在库默尔（Ernst Eduard Kummer, 1810–1893 年）与魏尔施特拉斯（Karl Theodor Wilhelm Weierstraß, 1815–1897 年）的带领下，早已成为数学中心。在柏林大学，基尔霍夫、亥姆霍兹的学生们，如普朗克（Max Planck, 1858–1947 年）、赫兹（Heinrich Rudolf Hertz, 1857–1894 年）、门捷列夫（Dmitri Ivanovich Mendeleev, 1834–1907 年）、维恩（Wilhelm Wien, 1864–1928 年）、昂纳斯（Heike Kamerlingh Onnes, 1853–1926 年），在这个环境下长大，自然会更加突出。基于这些，德国的物理学家与数学家、化学家群体全面引领世界科学的发展、引领物理学革命，也就不足为奇了。

基尔霍夫在学术上初露锋芒的时间是在他的大学期间，地点是柯尼斯堡大学。这是一所被康德深刻影响的位于东普鲁士的大学。1843 年到 1846 年，基尔霍夫参加了由他在大学期间的主要导师诺伊曼（Franz Ernst Neumann, 1798–1895 年）和雅可比（Carl Gustav Jacob Jacobi, 1804–1851 年）共同主办的一个研讨班。当

²⁷³ 基尔霍夫的讲义叫做<Vorlesungen über mathematische Physik Mathematics>，对应的英文是<Lectures on Mathematical Physics>，即《数学物理讲义》，1883 年出版，共四卷，是他从海德堡大学的实验物理的讲席转到柏林大学担任数学物理的讲席后整理的。亥姆霍兹在 1873 年也出版了一套讲义叫做<Popular Lectures on Scientific Subjects>。这些讲义因为影响力巨大，在历史上都出版了好多次。

时，欧姆定律已经在 1827 年被发现，人们也开始基于欧姆定律、电荷守恒定律来设计越来越复杂的电路。当支路的数目很多的时候，直接运用这些简单的原则来设计复杂的如蜘蛛网一般的电路的时候就会让电路设计变得非常有挑战性。但这又是电气技术发展的必需。

在这个背景下，年轻的基尔霍夫于 1845 年提出了基尔霍夫电路定律，解决了这个电路设计中的实际问题。基尔霍夫电路定律有两个内容，分别针对电流和电压。电流定律指的是对某个节点，流入电流加流出电流（有正负）的和为零。电压定律指的是如果我们沿某个闭路走下来，电压变化就应该为零。基于基尔霍夫的两个电路定律，人们就可以通过建立线性方程组来大幅简化电路设计²⁷⁴。这在电气工程甚至可以说在第二次工业革命中上有极其成功的应用。我们在高中物理的电学部分，也都应该接触过。但大学物理与高中物理存在根本区别²⁷⁵，物理学专业的学生在大学接触到的物理学涉及的更多的是这个学科的本质与前沿，而高中的物理则比较注重对知识点的掌握和应用。因此，从大学物理的角度，基尔霍夫对物理学最大的贡献肯定不是其关于电路提出的两个定律，而是其关于光谱与热辐射的研究。

1854 年，基尔霍夫加入海德堡大学。在这里，他和本生 (Robert Wilhelm Bunsen, 1811–1899 年) 一起开展了一系列关于光谱与热辐射的研究²⁷⁶。这两部分研究之

²⁷⁴从“解线性方程组”这个关键词上，大家可以看到雅可比的影响。雅可比和基尔霍夫的导师诺依曼恰恰就是那个研讨班的发起人。

²⁷⁵高中的物理更像是“理工科基础”。这个是笔者的一点点个人感触，写下来仅供参考。

²⁷⁶本生之前在布雷斯劳 (Breslau) 认识的基尔霍夫。布雷斯劳是东普鲁士的一个城市，二战之后划归波兰，叫弗罗茨瓦夫 Wrocław。在十九世纪，布雷斯劳有个很好的大学，我们熟悉的玻恩就来自这个城市。基尔霍夫与本生认识后，很快成为好友。在基尔霍夫得到海德堡大学教职的过程中，本生也提供了极大的帮助。

间,应该说是紧密相关的。其技术基础,都是在夫琅和费的基础上改进的分光仪。

利用这个分光仪,基尔霍夫测量了特定温度下不同物质的光谱,发现了现在我们说的基尔霍夫光谱三定律²⁷⁷。其内容如图 8.1 所示,分别为:1) 固体、液体、常压气体在有限温度下的光谱为连续谱;2) 稀薄气体在有限温度下的光谱为分立谱;3) 当固体、液体、常压气体发出的连续谱在穿过稀薄气体的时候,在稀薄气体的分立谱处,原来的连续谱变弱。利用分立谱的发现,基尔霍夫还引入了元素确定的方法。这深刻地影响了之后的天文学研究。

现在,我们知道所有这些内容都可以基于量子力学与电动力学来进行解释。但在当时,这些发现都是极具新意且蕴藏诸多未知内容的前沿研究。比如,分立谱(基尔霍夫光谱定律的第二条)对应的是原子内电子态之间的跃迁,因此在稀薄气体中出现。这在很大程度上影响了十九世八十年代巴耳末(Johann Jakob Balmer, 1825–1895 年)进行的关于巴耳末线系的研究。之后,更是导致了玻尔模型的建立、量子力学的诞生。再比如,连续谱线(基尔霍夫光谱定律的第一条)对应的就是有点温度下带电粒子间相互运动带来的电磁波辐射,以量子的形式进行发射与吸收。实际上,也正是因为基尔霍夫针对这个连续谱的进一步研究,带来了所谓的基尔霍夫热辐射定律。其背后的物理问题,就是我们熟悉的黑体辐射

²⁷⁷当然,类似关于辐射谱线的研究并不是从基尔霍夫才开始的,很早就有。比如,1800 年,来自英国的德裔科学家威廉·赫歇尔(Frederick William Herschel I, 1738–1822 年,发现天王星的那个,我们前面提到过达尔文在上猎犬号之前看的《自然哲学研究略论》,则来自他的儿子约翰·赫歇尔(John Frederick William Herschel, 1st Baronet, 1792–1872 年))在处理太阳光的滤光片进而分析太阳斑的时候,就发现了太阳光中红外线的成分。他使用红色滤光片,发现仍有大量热量通过辐射进行传递。在他之后,夫琅和费发明了分光仪,并基于其也对太阳光谱进行了定量的测量,发现其中有五百多条黑线。这些黑线后来被成为夫琅和费线,与元素相关。直到量子力学建立之后,这些黑线才被完美解释。这些,都是基尔霍夫的研究的基础。

问题了。在多数文献中，基尔霍夫的热辐射定律与光谱三定律是分列的²⁷⁸。但它们之间的逻辑关系在笔者看来，是比较清晰的，就是本段列出的内容。

十九世纪末、二十世纪初，维恩（Wilhelm Wien，1864–1928 年）、鲁本斯（Heinrich Rubens，1865–1922 年）、普朗克（Max Planck，1858–1947 年）这些经历过基尔霍夫与亥姆霍兹在柏林大学指导的学生，正是因为针对这个问题的研究掀开了物理学革命的序幕。其中，普朗克因为引入了量子（Quanta）这样一个概念，成为人们公认的量子之父。为了纪念这个重要的突破，人们也将 1900 年定义为量子力学的元年。在现有读物中，关于维恩、普朗克（基尔霍夫的学生），来自奥地利的斯特藩（Josef Stefan，1835–1893 年）和他的学生玻尔兹曼（Ludwig Eduard Boltzmann，1844–1906 年），以及来自英国的瑞利（John William Strutt, 3rd Baron Rayleigh，1842–1919 年）的工作的介绍都比较多。本书中，我们当然不会错过这些内容。但在开始这些介绍之前，本着关键问题的发现与定位是重要科学发现中最重要的一步这个原则，以及尽量把讲义写出一点新意这样一个考虑，我们还是选择把基尔霍夫发现热辐射定律背后隐藏的黑体辐射的问题这个相对来说人们介绍的比较少内容作为起点来讲解这场物理学革命²⁷⁹。

²⁷⁸ 基尔霍夫热辐射定律的内容我们马上就会介绍到。

²⁷⁹ 本书即将完成的时候，与我的同事全海涛教授聊天，他告诉我中国科学院物理研究所的曹则贤老师在文献【曹则贤，2021】中讲过这段历史。感兴趣的同学和老师可以参考曹老师的文章进行了解。

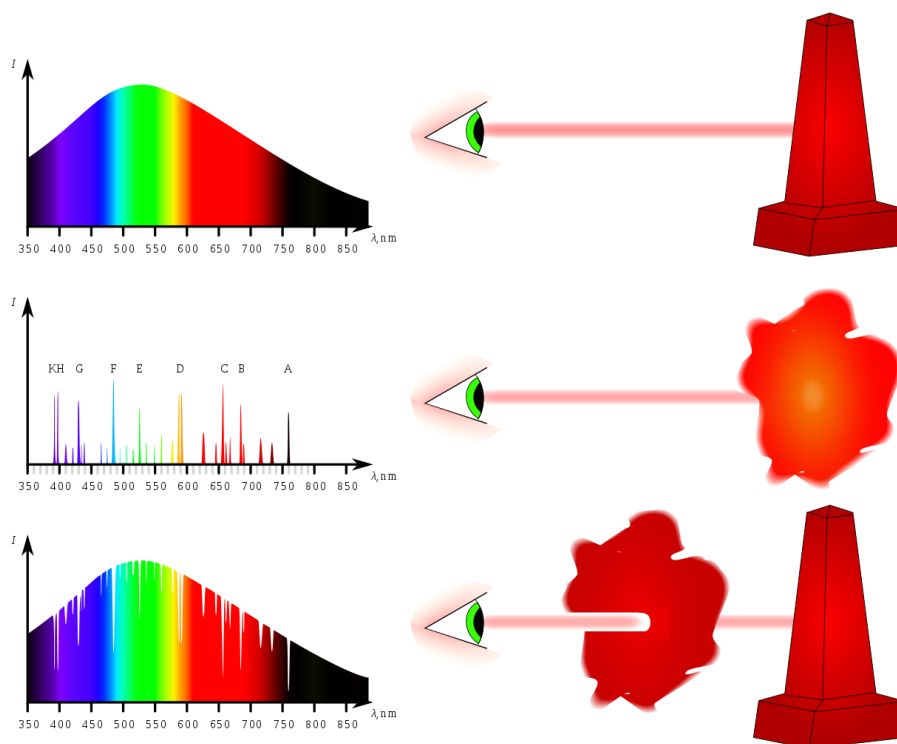


图 8.1 基尔霍夫光谱三定律示意图，摘自维基百科。从上至下，分别对应基尔霍夫光谱定律的三点内容。

8.1.2 基尔霍夫的热辐射定律与黑体辐射

基尔霍夫的热辐射定律产生的时间节点是 1859 年。前面提到过，它和光谱定律一样，是基于分光仪进行的实验研究的成果²⁸⁰。针对光谱定律的第一条，基尔霍夫将研究重点放在热的辐射传播上，并将其结果普适化（指出谱线不依赖于具体物质）。这就带来了我们现在称之为“基尔霍夫热辐射定律（Kirchhoff's law of thermal radiation）”的重要成果。

在这个 1860 年左右时间节点，关于热的研究与关于电磁的研究一样，是物理学中最热门的话题。基尔霍夫并没有像克劳修斯那样关注热与能量之间的转换，

²⁸⁰实际上，基尔霍夫早期的研究是以实验为主的。后来，因为视力出现了问题，他将研究重点转为理论物理。

而是将研究重点放在了处于热平衡的物质与外界在无接触的情况下如何进行热交换这一点上。这个问题既有前瞻性，也有非常大的基础研究意义与实际应用价值。比如，我们熟悉的太阳，就是通过辐射向地球输送热量的。当时如火如荼进行的工业革命，也对炼钢有很大的需求。炼钢过程中，钢铁的温度可以通过其颜色来进行判断。这也是基尔霍夫的热辐射定律一个重要应用。十九世纪七十年代末，爱迪生（Thomas Alva Edison，1847–1931 年）发明电灯，背后的原理也是基尔霍夫的热辐射定律背后的黑体辐射的原理²⁸¹。

基尔霍夫热辐射定律提出于 1860 年【Kirchhoff, 1860】，可大致归结如下。在热平衡状态下，物体会通过电磁波辐射的方式与周围环境交换能量。我们把物体的热平衡的温度记为 T ，这是一个热力学状态函数²⁸²。对固体、液体这样的物质，它们会向外辐射电磁波。这个电磁波会呈现出一个连续谱²⁸³。这是基尔霍夫光谱定律的第一条。前面讲过，基尔霍夫热辐射定律是基尔霍夫对其进行进一步研究得到的结论。同时，除了发射能量，这个物体也吸收外界辐射过来的电磁波。对于照射到我这个物体上的某个波长的电磁波，都有一部分可以被物体吸收，有一部分需要被反射掉，或者透射过去。一个热平衡状态下的物体有一个温度 T ，我们可以把关注点放在波长为 λ 的入射/出射电磁波的能量比值。基尔霍夫热辐射定律的内容是他发现对这个温度为 T 的处于热平衡状态下的物体，它的辐射出

²⁸¹只有温度足够高，发射出来的电磁波才会集中在可见光波段。爱迪生主要的工作，就是要找到熔点高的金属来做灯丝。

²⁸²在热力学理论中，热力学状态函数是个非常重要的概念。像我们熟悉的温度、压强，都是热力学状态函数。

²⁸³随着波长的变化，辐射能量连续变化。

波长为 λ 的电磁波的本领 $e(\lambda, T)$ ，除以它对波长为 λ 的电磁波的吸收率 $a(\lambda, T)$ 得到的函数 $F(\lambda, T)$ ，是一个不依赖于这个物质到底是什么而仅仅依赖于 λ 和 T 的函数

²⁸⁴。用公式表达的话，就是：

$$\frac{e(\lambda, T)}{a(\lambda, T)} = F(\lambda, T)$$

公式 8.1

而是这个 $F(\lambda, T)$ ，是个不依赖于具体物质的普适函数【Kirchhoff, 1860】。

现在，我们接受公式 8.1，如果再引入一个绝对黑体的概念，就可以把这个普适的函数给测出来。这个绝对黑体的意思是吸收率为一的物体。换句话说，任何光（电磁波）打到一个物体上，都会被吸收。实际的物体，都是一定程度的黑体。实验上，如果设计一个开孔很小的空腔（图 8.2），使得打入空腔的电磁波在经过多次腔内反射后被完全吸收，这样就可以保证 $a(\lambda, T) = 1$ 。这个时候，在孔口放一个光谱仪，这个光谱仪纪录的就是 $e(\lambda, T)$ 就等于 $F(\lambda, T)$ 这个普适函数了。这个“黑体”的概念是两年之后，也就是 1862 年，由基尔霍夫明确提出的。它具有非凡的物理意义。

实际上，在物理学研究中，任何普适的、不依赖于具体物质的定律在总具有类似的非同寻常的重要地位的。比如，前面提到的克拉帕隆状态方程(公式 4.19)，它蕴藏了统计力学的基本原理。这个原理在十九世纪下半叶被克罗尼格（August Karl Krönig, 1822–1879 年）、麦克斯韦（James Clerk Maxwell, 1831–1879 年）、玻尔兹曼（Ludwig Eduard Boltzmann, 1844–1906 年）等人揭示。而基尔霍夫发现的热辐射定律，在黑体这个概念引入后，转化为黑体辐射定律。它蕴藏了量子力学

²⁸⁴这里的吸收率，指的是把波长为 λ 的电磁波照到这个物体上被吸收的能量的比率。而辐射本领，是单位时间从单位面积的这个物体上辐射出的波长为 λ 的电磁波的能量。

的基本原理。这个原理在十九世纪与二十世纪的世纪之交由普朗克揭示，并最终导致了量子力学的诞生【Planck, 1900】。

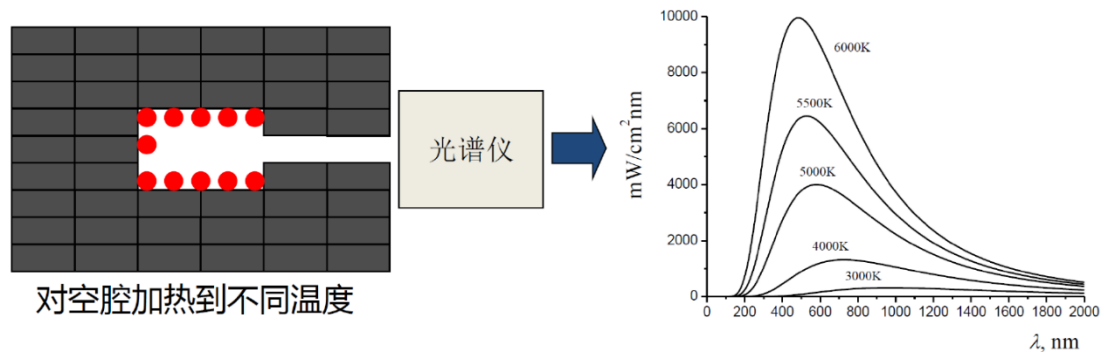


图 8.2 黑体辐射曲线测量的示意图。左边是模拟理想黑体的光腔，右边是测出了黑体辐射本领在不同温度下作为辐射电磁波的波长的函数。后面要讲到的关于黑体辐射的规律，在右边这张图上都有体现。不夸张的说，基尔霍夫黑体辐射概念的提出，引出了 19 世纪末一系列的重要发现，最终也导致了他的学生普朗克的量子概念的提出。因为这个原因，我们在本书中刻意花了两个小节（本小节与上一小节），来强调基尔霍夫的这个发现对于物理学革命的意义。

8.1.3 黑体辐射的研究及困境

基尔霍夫的发现很快引起了人们的关注。1865 年，来自爱尔兰的物理学家和化学家丁达尔（John Tyndall, 1820 – 1893 年）在他被邀请进行的“Rede Lecture”中，报道了其关于白炽体的发光随温度的实验研究结果²⁸⁵。其具体内容，可大致描述如下：以铂丝为白炽体，升高温度（当时这个温度并没有被精确测量），这

²⁸⁵这里有两点我们想进行一个说明。第一点是关于丁达尔。这个丁达尔，就是我们所熟悉的“丁达尔现象”的丁达尔。它讲的是光在经过胶体时，因为胶体颗粒对光的散射，可以看到光路。这个现象应该说是比较早的光与物质相互作用的研究，是由丁达尔在十九世纪六十年代提出的。第二，是这个 Rede Lecture 全程是 Sir Robert Rede's Lecture，从十六世纪开始，每年在剑桥大学举行一次，持续至今。报告的题目可覆盖科学、哲学、数学、社会等各个领域。1865 年，丁达尔在这个讲座中，报道了他所进行的如正文中描述的实验研究结果。

个白炽体的辐射能量会呈现非线性的增加【Davies, 1946】。1877年，奥地利物理学家斯特藩（Josef Stefan, 1835–1893年）将这个依赖关系定量描述为一个物体单位时间单位面积辐射的能量正比于其温度的四次方这样一个经验公式【Stefan, 1879】。1884年，他的学生玻尔兹曼（Ludwig Eduard Boltzmann, 1844–1906年）参考意大利物理学家巴托利（Adolfo Bartoli, 1851–1896年）所采用的基于热力学来研究电磁波辐射压强的方法，对此经验公式进行了理论解释【Boltzmann, 1884】。至此，关于黑体辐射的第一条定律，斯特藩-玻尔兹曼定律（Stefan-Boltzmann Law），被正式确立。这个定律，同样不依赖于黑体是由什么物质构成的，具有普适性。

除了基尔霍夫热辐射定律、斯特藩-玻尔兹曼定律，人们针对黑体辐射问题认识到的第三个普适定律是维恩位移定律（Wien's Displacement Law）【Wien, 1896】。它是由基尔霍夫的学生维恩在1893年参考玻尔兹曼的热力学方法在理论上提出的，定量表达如下：

$$\lambda_{\text{peak}} = \frac{b}{T}$$

公式 8.2

其中， b 是一个常数，约等于 2.8978×10^{-3} 米·开尔文， λ_{peak} 是热辐射曲线能量峰值对应的电磁波的波长， T 是温度。在此之前，在十九世纪八十年代，美国天文学家兰利（Samuel Pierpont Langley, 1834–1906年）的实验研究曾经表明一个白炽体的热辐射曲线峰值波长会随着温度的升高向短波长方向移动²⁸⁶。但需要说明的是钢铁工业在当时的欧洲与美国都已经是非常重要的工业了，生产经验非

²⁸⁶笔者查到的材料有说1881年，有说1886年，具体出处也不太详实，但是关于实验结果的定性描述都是一致的。考虑到这个具体的年份并不是太重要，我们这里采取这种写法。

常丰富。维恩位移定律与人们这些生活经验直接相关（钢铁的颜色会随着温度变化，如图 8.3 所示），并将其进行了定量化。而兰利的仅仅是一个定性描述，仅仅与人们的这些生活生产经历一致。因此，在讨论这个定律的时候，人们不是太关注兰利的这种与人的生产感受直接吻合的定性描述，而是将科学贡献 (credit) 归结为维恩的定量理论推导。

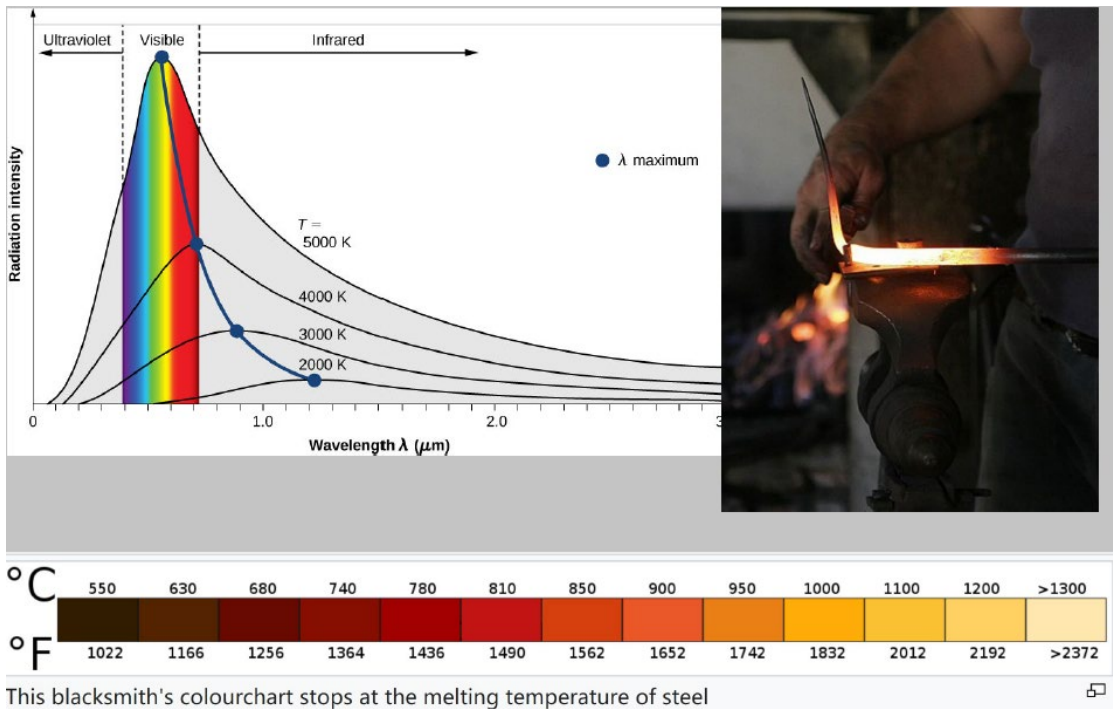


图 8.3 左上为维恩位移定律的示意图，随着温度升高，热辐射能量峰值对应的波长变短。

右边是烧红的钢铁的颜色，下方是钢铁的颜色随温度的变化。

除了位移定律，普朗克之前，同为基尔霍夫的学生，维恩应该说在很长时间都是在黑体辐射研究中的引领者。他也因为这些贡献获得了 1911 年的诺贝尔物理奖²⁸⁷。1896 年，他还基于热力学方法给出了一个更加定量的黑体辐射公式：

$$E(\lambda) = c_1 \cdot \frac{1}{\lambda^5} \cdot e^{-c_2/(\lambda T)}$$

公式 8.3

²⁸⁷ 获奖理由为：for his discoveries regarding the laws governing the radiation of heat.

这里的 c_1 、 c_2 是常数，可以通过与实验结果比较进行拟合。这个公式后来被成为维恩公式。它代表的，也是当时人们在理论层面对于黑体辐射问题的最为深刻的认识。基于维恩公式，人们既能推出最大辐射峰对应的波长的位置与黑体温度乘积为一个定值的维恩位移公式（公式 8.2），在它描述的辐射强度作为电磁波波长（或者频率）的函数与实验测量的数据的定量对比中，整体符合度也非常高的。

以 1899 年陆末（Otto Richard Lummer, 1860–1925 年）和普林斯海姆（Ernst Pringsheim, 1859–1917 年）的实验数据为例【Lummer, 1899】，从图 8.4 就可以看出，维恩公式与实验的符合整体是非常出色的。在波长比较短的区域，其表现简直完美。在长波区域，会有一些差异出现。这种小的差异背后实际上蕴藏着大的问题，这个差别会随着温度的增加变得愈发明显。陆末、普林斯海姆在他们 1899 年的文章中，实际上已经指出了这一点【陈难先, 2023】。图 8.4 中诸曲线的右边实验与当时的理论（维恩公式）是不符合的，同时这种差别会随着温度的升高而变得更大。

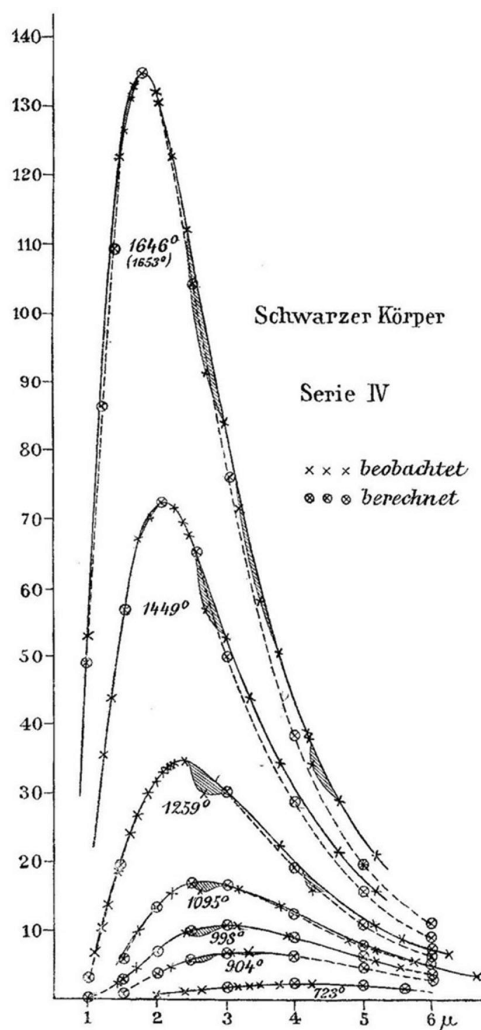


图 8.4 Lummer 与 Pringsheim 的实验结果的截图【26】。纵轴是相对辐射强度，横轴 μ 代表的是热辐射出的电磁波的波长，以微米为单位的。不同的曲线代表的是不同的温度。 x 代表的是实验结果（beobachtet 是“观测到”的意思），实线是对其拟合。实线圆代表的是理论（berechnet 是“计算出”的意思，这里指的是用维恩公式计算出的结果）。从这些曲线，我们可以看出 Lummer 与 Pringsheim 的实验（ x ）并不能被维恩公式（实线圆）很好的拟合。在长波长的波段，辐射强度随波长的增加按 λ^{-4} 变化。这恰恰可以被瑞利的公式拟合。

针对上述长波与高温条件下维恩公式与测量结果之间偏差的更为精细的实验研究，按照陈难先老师在其文章《黑体辐射轶事遐思——从普朗克一百年前的一段话说起》所述【陈难先，2023】²⁸⁸，可大致描述如下。当时，物理学家大致

²⁸⁸ 本部分的很多讨论也摘自陈老师的这篇文章。

有两个技术路线。其一，以陆末和普林斯海姆为代表，是通过提高黑体辐射温度来研究这个不一致性；其二，以鲁本斯（Heinrich Rubens, 1865–1922 年）和库尔鲍姆（Ferdinand Kurlbaum, 1857–1927 年）为代表，是通过运用离子晶体的选择性反射，来获得更加长波长（红外与远红外）的数据来研究这种不一致性。1900 年 10 月 7 日，第二条技术路线的代表人物鲁本斯携夫人到普朗克家小聚。席间，鲁本斯向普朗克提到了 1900 年 6 月英国科学家瑞利发表的一篇犀利的短文。在这篇文章中，瑞利基于纯经典理论提出了另一个公式【Reyleigh, 1900】：

$$E(\lambda) = c_3 \cdot \frac{T}{\lambda^4}$$

公式 8.4

这个公式恰恰可以拟合维恩公式在图 8.4 不能很好地拟合的那段实验结果。但令人遗憾的，是在短波区域，公式 8.4 会发散。十多年后，玻尔兹曼的学生埃伦费斯特（Paul Ehrenfest, 1880 – 1933 年）将瑞利公式的这个问题称为它的紫外灾难【Ehrenfest, 1911】。从此，这个名词也伴随着黑体辐射的问题在我们的教科书中流传。这里，我们需要知道的是在这个名词开始流行的时候，黑体辐射的问题实际上已经被普朗克利用量子的概念解决，只是当时欧洲的很多物理学家还没有接受这种量子的思想。包括普朗克本人，在那个时候也在尝试回归经典理论的解释。因此，紫外灾难这个词在当时的物理学界是很有市场的。

回到 1900 年这个时间节点，瑞利的文章出来之后【Reyleigh, 1900】、普朗克的工作出来之前【Planck, 1900】，人们确实面临一个问题：黑体辐射的两个理论解释（分别来自维恩和瑞利）各自解释了实验结果的一端，一个可以在全波段覆盖实验观测的理论是缺失的。普朗克在理论上对全波段辐射谱的改进诱发了量子概念的提出【Planck, 1900】。之后，这个概念在光电效应、原子光谱、固体比热研

究中被应用【Einstein, 1905a】【Einstein, 1907】【Debye, 1912】【Bohr, 1913a】
【Bohr, 1913b】【Bohr, 1913c】，进而导致了量子力学的诞生。因为这个历史
顺序，这里我们还是按照多数物理教材的习惯把黑体辐射这个问题当作本章第一
节来引入物理学革命。与多数教材的区别是在 8.1.1 与 8.1.2 两个小节我们对基尔
霍夫的贡献的强调。8.1.3 小节更多的就是现有教材中的内容的一个梳理。

8.2 经典物理学的危机

除了前面提到的黑体辐射的问题，在十九世纪末这个时间节点，物理学还面
临着一些其它的问题。这些问题都非常的基础。换句话说，这些问题的质量都非
常高²⁸⁹，它们可分为两类。第一类是与我们现在讲的相对论相关的部分，也就是
经典理论中用到的绝对时空观面临的来自迈克尔逊-莫雷实验的挑战。第二类，
则是与我现在讲的量子力学相关的部分。

其中，第一类代表性的实验就一个。而第二类，实验则有很多，我们可以把
它们分为几个方面。第一个方面，是上一节提到的黑体辐射问题。关于这个问题
的研究也直接导致了量子这个概念的提出，进而拉开了物理学革命的序幕。第二
个方面，是光电效应。这是由赫兹（Heinrich Rudolf Hertz, 1857–1894 年）在 1887
年发现的。1905 年，爱因斯坦通过引入光量子的概念（德语是 Lichtquanten，英
语对应 quantum of light），给出了理论解释【Einstein, 1905a】。爱因斯坦也因此获
得了 1921 年的诺贝尔物理奖²⁹⁰。

²⁸⁹物理学研究中，越基础的问题价值越大。

²⁹⁰获奖理由为：for his services to Theoretical Physics, and especially for his discovery of the law of the photoelectric effect。这里的前半句话实际上是模糊的。光子，人们肯定会有很多关于相对论为什么没有给爱因斯坦带来诺奖的讨论，也有一种说法就是这前半句实际上已经在一定程度上包含

第三个方面，是原子光谱及其规律。这个实际上也和基尔霍夫的研究相关，对应的是基尔霍夫光谱三定律中的第二、第三个（黑体辐射对应的是第一个）。再往前追溯也可以追溯到夫琅和费。与黑体辐射这个问题不同，原子光谱的问题与原子内部电子在某本征态与真空态之间的跃迁以及不同本征态之间的跃迁相关。它的彻底解决，需要等到二十世纪二十年代末海森堡（Werner Heisenberg, 1901–1976 年）、玻恩（Max Born, 1882–1970 年）、约当（Pascual Jordan, 1902–1980 年）、薛定谔（Erwin Schrödinger, 1887–1961 年）提出量子力学基本理论框架之后。实验中的原子谱线，甚至还蕴含了自旋自由度的问题。在为自旋自由度建立量子力学理论框架的过程中，乌伦贝克（George Eugene Uhlenbeck, 1900–1988 年）、高德施密特（Samuel Abraham Goudsmit, 1902–1978 年）、泡利（Wolfgang Pauli, 1900–1958 年）、狄拉克（Paul Dirac, 1902–1984 年）等人做出了开创性的贡献。这些理论合在一起，也构成了很多教材在介绍量子力学基本理论的主体内容。

第四个方面，是固体系统在低温下的比热问题。当时，人们面临的问题也是实验测量的热容与理论预言存在明显不符。这个问题，实际上才是我们常说的开尔文爵士在 1900 年的 4 月 27 号，于英国皇家学会进行的讲演中提到的两朵乌云中第二朵²⁹¹。爱因斯坦、德拜（Peter Debye, 1884–1966 年）在解决这些问题的

了相对论的贡献。但不管怎样，对于我们喜欢物理学的人来说，相对论单独得诺奖甚至单独得两次都是不过分的。回到光电效应的话题，我们都知道 1905 年是爱因斯坦的高产年，他关于狭义相对论的文章和布朗运动的文章也在同年发表。爱因斯坦本人，是非常看重光电效应的这个工作的。8.4.1 小节，我们讲德布罗意的时候会提到有一年的索尔维会议，光量子就是核心讨论话题。德布罗意的哥哥参与了那次会议讨论文稿的整理，这也在后面帮到了德布罗意。

²⁹¹关于这多乌云的错误理解流传甚广，这里做个特别说明。这个讲演的题目是“Nineteenth-Century Clouds over the Dynamical Theory of Heat and Light”，其中关键的一句是“The beauty and clearness of the dynamical theory, which asserts heat and light to be modes of motion, is at present obscured by two clouds: the Michelson-Morley experiment and heat capacity”。很显然，这段话中与量子力学相关的是与热容。这也是为什么爱因斯坦模型在历史上那么重要？因为它第一次解释了为什么在温度趋

过程中发挥了关键的作用【Einstein, 1907】【Debye, 1912】。

这两个部分的问题中（加在一起五个方面的实验），黑体辐射我们在上一节讲过。本节，我们就按上面提到的顺序，依次介绍剩余的四个（第一部分一个，即迈克尔逊-莫雷实验，第二部分除黑体辐射之外的三个），以期尽量全面地复原二十世纪初经典物理学面临的主要挑战。

8.2.1 迈克尔逊-莫雷实验

我们先从迈克尔逊-莫雷的实验（迈克尔逊，Albert Abraham Michelson, 1852–1931 年；莫雷，Edward Williams Morley, 1838–1923 年）开始讲。这个实验的结果，挑战的是物理学研究中处于最基础地位的时空观。时空在物理学研究中的基础地位是从伽利略建立近代物理学的时候就确立。之后，由康德利用形而上学的方法，把它上升到了先验的高度。我们可以经验的世界，都是在这个先验的时空框架下进行描述的。这个时空，在十九世纪末之前，人们认为就是伽利略时空。这里，相对运动带来相对速度的变化，时间是绝对的，也存在一个绝对坐标系。这个时空观与当时的物理学观测一致，直到迈克尔逊-莫雷的实验的出现。因为迈克尔逊-莫雷实验，人们开始对这个时空观进行反思，具体的表现是麦克斯韦的电动力学方程组在伽利略变换下并不具备不变性。进而，人们认识到需要将物理学理论的时空变换改进为洛伦兹变换。这个时空变换形式，与量子理论一起，促成了近代物理学向现代物理学的转变。

在本节，我们将以迈克尔逊-莫雷实验的设置及基本结果为出发点展开讨论，落脚点是这些实验结果对当时的物理学框架的挑战。如何解决这个问题，我们会

近于绝对零度的时候固体的热容会趋近于零。当然，由于爱因斯坦对振动的量子进行了一个常数的处理，导致趋近行为并不正确。这个问题在历史上，是由德拜模型通过将振动频率描述为线性的依赖于振动量子（声子）的波长解决的。

在 8.5 节做详细的解释。

首先，我们来看迈克尔逊-莫雷实验的设置。图 8.5 为其原理示意图。在伽利略的时空中，相对运动的两个坐标系之间的坐标满足伽利略变换关系。在这个变换中，时间是不变的，这个也与我们在日常生活中的尝试一致。如果基于这样一个假设，我们可以想象地球是围绕太阳做椭圆运动的。在太阳所定义的坐标系中，地球的公转速度大概是 30 公里/秒。这样的话，如果在地球内做一个光学平台（示意图是图 8.5 中右边的部分，实图是图 8.6），那么我们可以想象对于一个可以发生干涉现象的相干光（这个时候人们已经全面接受了光的波动学说），在这个设置中，它完全可以走两条路线到达右下角黄色标出的探测器。这两条路线的不同体现在图 8.5 中的橘线与绿线部分。这两条路线的光程差，会与地球绕太阳公转的速度有关。因此，通过测量探测器上的光波干涉情况，我们是确定地球绕太阳的公转速度的。

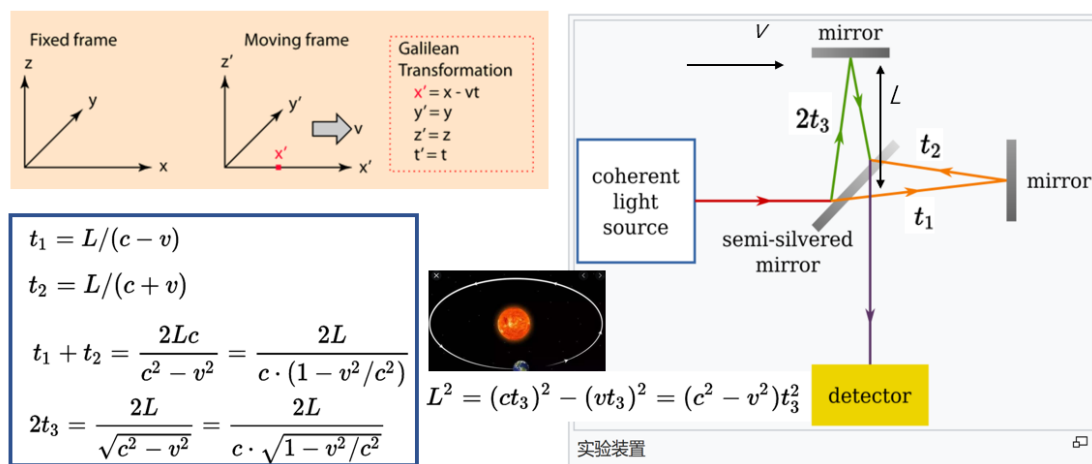


图 8.5 迈克尔逊-莫雷实验示意图。

具体而言，我们可以这样理解。在第一条路线中，由于这个仪器随地球一样运动，除去红线、紫线对应的两条路线一样的部分，在不一样的部分光的传播耗时是不同的。当光走橘色路线时，耗时为 $t_1 + t_2$ 。当光走绿色路线时，耗时为 $2t_3$ 。

在第一条路线中，根据伽利略变换，有：

$$t_1 = \frac{L}{c - v}$$

公式 8.5

$$t_2 = \frac{L}{c + v}$$

公式 8.6

因此：

$$t_1 + t_2 = \frac{2L}{c \cdot (1 - v^2/c^2)}$$

公式 8.7

而走第二条路线的话，光走过的路线在移动的坐标系中对应的是直角三角形的斜边，因此有：

$$L^2 = (ct_3)^2 - (vt_3)^2$$

公式 8.8

进而：

$$2t_3 = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2L}{c \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

公式 8.9

很显然，在有限 v 的情况下，公式 8.7 与公式 8.9 是不相等的。它们仅仅在 $v = 0$ 时相等。

这样的话，人们就可以利用这个光程差所带来的干涉现象，来测量地球绕太阳公转的速度 v 了。从 1881 年开始，到二十世纪三十年代，以迈克尔逊、莫雷为代表的一批实验物理学家利用这个原理进行了一系列的实验。好玩的是，实验结果一致否定了本段讨论所依赖的逻辑。

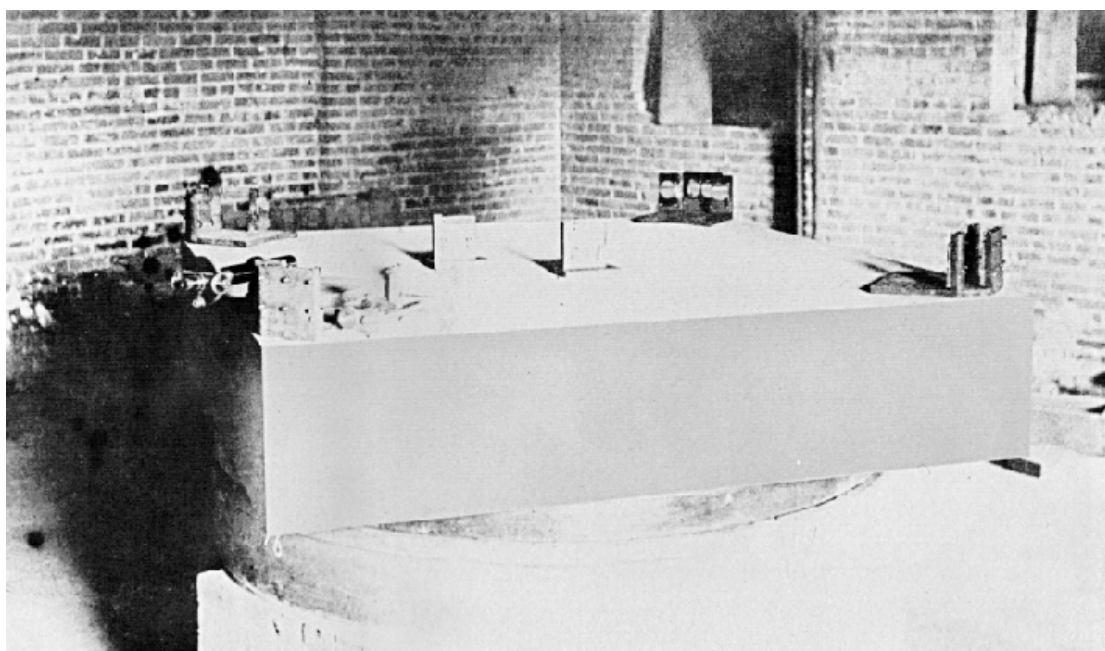


图 8.6 早期的迈克尔逊-莫雷实验的装置。

这个大家可以从图 8.7 看出。我们可以把注意力集中在其中阴影标出的那一列，它对应的是实验测出的地球绕太阳公转速度的上限。如果上面公式 8.5–8.9 的推导所基于的伽利略时空的概念是正确的，那么这一列测出的地球绕太阳的公转速度就应该是 30 公里/秒。但很遗憾，所有实验上测出的这个量都明显小于这个理论值。这也就意味着我们用经典的时空观去理解光的传播是不对的。后来，爱因斯坦、庞加莱（Henri Poincaré，1854–1912 年）分别提出狭义相对论，通过光速不变以及洛伦兹变换对应的相对时空对这个实验现象进行了解释。其详细内容我们在 8.5 节会详细解释。在本小节，我们的落脚点很简单：在十九世纪末，迈克尔逊-莫雷实验的结果非常明确地对当时人们普遍接受的经典物理学理论提出了挑战。

姓名	地点	年份	臂长 (米)	预计条纹偏移	实测条纹偏移	比例	$V_{以太}$ 的上限	实验精度	Null result
迈克尔孙 ^[2]	波茨坦	1881	1.2	0.04	≤ 0.02	2	~ 20 km/s	0.02	$\approx$ yes
迈克尔孙和莫雷 ^[3]	克利夫兰	1887	11.0	0.4	< 0.02 or ≤ 0.01	40	~ 4–8 km/s	0.01	$\approx$ yes
莫雷和米勒 ^{[4][5]}	克利夫兰	1902–1904	32.2	1.13	≤ 0.015	80	~ 3.5 km/s	0.015	yes
米勒 ^[6]	威尔逊山	1921	32.0	1.12	≤ 0.08	15	~ 8–10 km/s	unclear	unclear
米勒 ^[6]	克利夫兰	1923–1924	32.0	1.12	≤ 0.03	40	~ 5 km/s	0.03	yes
米勒 (阳光) ^[6]	克利夫兰	1924	32.0	1.12	≤ 0.014	80	~ 3 km/s	0.014	yes
托马希克 星光 ^[7]	海德堡	1924	8.6	0.3	≤ 0.02	15	~ 7 km/s	0.02	yes
米勒 ^{[6][A 1]}	威尔逊山	1925–1926	32.0	1.12	≤ 0.088	13	~ 8–10 km/s	unclear	unclear
肯尼迪 ^[8]	帕萨迪纳/威尔逊山	1926	2.0	0.07	≤ 0.002	35	~ 5 km/s	0.002	yes
伊林沃思 ^[9]	帕萨迪纳	1927	2.0	0.07	≤ 0.0004	175	~ 2 km/s	0.0004	yes
皮卡德和斯塔尔 ^[10]	气球上	1926	2.8	0.13	≤ 0.006	20	~ 7 km/s	0.006	yes
皮卡德和斯塔尔 ^[11]	布鲁塞尔	1927	2.8	0.13	≤ 0.0002	185	~ 2.5 km/s	0.0007	yes
皮卡德和斯塔尔 ^[12]	瑞吉峰	1927	2.8	0.13	≤ 0.0003	185	~ 2.5 km/s	0.0007	yes
迈克尔孙等 ^[13]	威尔逊山	1929	25.9	0.9	≤ 0.01	90	~ 3 km/s	0.01	yes
约斯 ^[14]	耶拿	1930	21.0	0.75	≤ 0.002	375	~ 1.5 km/s	0.002	yes

图 8.7 一系列迈克尔逊-莫雷实验的结果的总结，取自维基百科（维基百科中文版中，迈克尔逊被写做迈克尔孙，我们用的是截图，读者不用在意这个区别）。这里，读者只需要关注阴影部分那一列。它对应的是实验测出的地球公转速度的上限。所有实验测量值都低于 30 公里/秒，这就对我们正文中的逻辑提出了调整。

8.2.2 光电效应

除了黑体辐射与迈克尔逊-莫雷实验，第三个我们想列出的对经典理论提出严峻挑战的实验现象是光电效应。文献中，我们经常看到的描述是它是在 1887 年由德国物理学家赫兹（Heinrich Rudolf Hertz，1857–1894 年）发现的。1887 年，也恰恰是赫兹在实验上真实电磁波存在的年份。两者之间应该会存在一些联系，但整体而言，介绍其联系的文献并不多²⁹²。笔者甚至曾经认为 1887 年赫兹发现的光电效应利用的就是图 8.8 所示的经典的光电效应实验装置。但实际上，1887 年赫兹发现的仅仅是“电流可以被光影响”。从他意识到这个现象，到光电效应

²⁹²当然不是没有。比如，由郭奕玲、沈慧君撰写，清华大学出版社出版的《物理学史》的 7.3 节中，这段历史被介绍的是比较详细的【郭奕玲、沈慧君，2005】。

被如图 8.8 那样定量描述进而为爱因斯坦于 1905 年提出理论解释做足实验上的准备，实际上也是经历了一个过程的。

这个过程的起点当然是 1887 年的赫兹实验，就是他发现电磁波的那个实验（图 8.8）²⁹³。赫兹是亥姆霍兹的学生。在他活跃的年代，德国年轻的一批学者在亥姆霍兹、基尔霍夫这一批教授的教导下，已经很会抓关键问题进行研究了。1879 年，当赫兹还是亥姆霍兹的学生的时候，亥姆霍兹就曾建议他将自己的博士论文题目设定为麦克斯韦电磁理论的验证。同样在 1879 年，亥姆霍兹向总部设在柏林的普鲁士科学院建议了一个学术奖的题目，也是关于这个问题的²⁹⁴。考虑到这个题目太难，赫兹的博士论文选择了另一个与电磁感应相关的题目。但毫无疑问，亥姆霍兹对他的影响在一定程度上会促成八年后电磁波的实验验证。

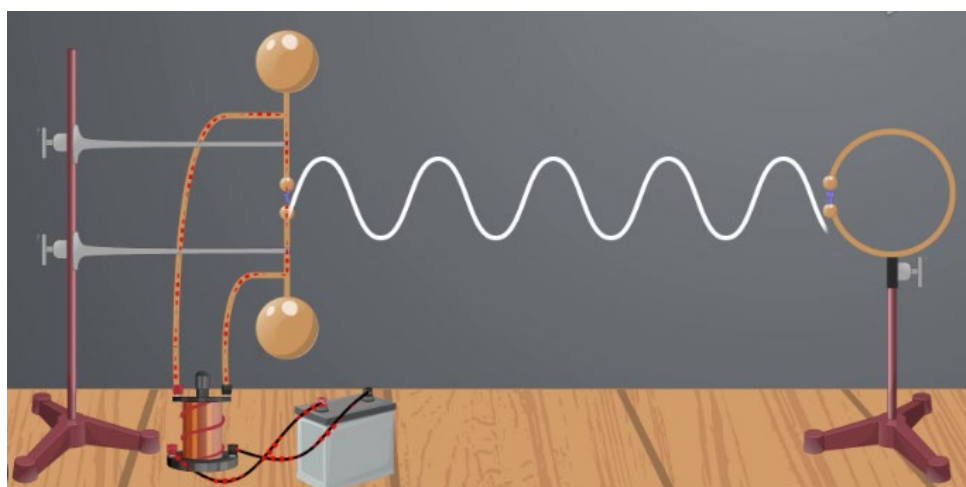


图 8.8 赫兹在 1887 年证实电磁波存在的实验装置示意图。赫兹发现左边的充放电可以引起右边金属环终点的两个金属球之间的电弧。这两个设备之间有一定距离。因此，这个实验证实了电磁波的存在。与此同时，赫兹还发现将两个设备之间放个玻璃板的话，右边的电

²⁹³注意，这里说的是这是该系列研究的起点，不是我们教科书上呈现的那个最终版本。

²⁹⁴在十九世纪，欧洲很多奖都是基于某个问题设立的，解决这个问题的人直接得奖。我们熟悉的还有庞加莱提出三体概念的那个问题，对应的就是由瑞典皇室设立的一个数学方面的奖。按这种方式设奖，或许更符合科学发展规律。

弧变短了。而放石英板，其长度不变。玻璃板与石英版的区别是后者不光对这个实验中希望展示的长波电磁波（波长远长于可见光波长）透明，还对紫外线透明。因此，除了证实电磁波的存在，这个中间方式不同物体影响观测结果的实验记录还蕴涵着一些其它的物理。这也是人们对光电效应的最初记载。

电磁波的产生源于电磁场的变化。现在，产生、接收、操控电磁场的方式很多，也很成熟。但是在赫兹的年代，我们可以基于他的任务就是证实电磁波的存在这样一个事实，来想象“人们对电磁波的认识是非常不充分的”这样一个当时的现状。1853年的时候，麦克斯韦在剑桥的师兄，也是他成长道路上的一个领路人威廉·汤姆孙（后来的开尔文爵士，William Thomson, 1st Baron Kelvin, 1824–1907年），曾预言过当莱顿瓶通过一个有线圈的回路放电的时候放电电流会出现振荡。赫兹实验采用的手段是类似的，也是通过放电产生电流振荡，进而产生电磁波。1886年，他接受了卡尔斯鲁厄大学的教授职位后，利用里斯线圈进行了一个实验²⁹⁵。在这个实验中，他看到外层里斯线圈连接的金属球中间产生电火花。这个给了他灵感，来解决自己的导师基尔霍夫当年给自己建议的那个问题。

基于这个灵感，他设计了如图 8.8 所示的电路。离里斯线圈一定距离，他用一个金属环来接收电磁波，并通过那边的金属球两边放电的方式将其进行展示。在 1887 年前后几年，赫兹进行了一系列的实验验证了麦克斯韦的电磁场理论。这些实验，为人们全面接受经典电动力学做出了巨大贡献。与此同时，他在这一系列的实验中也发现光与电之间存在相互转换的效应，这也为量子论的诞生进行了准备。

²⁹⁵ 里斯线圈是由德国科学家里斯 (Peter Theophil Riess, 1804 – 1883 年) 和克诺亨豪尔 (Karl Wilhelm Knochenhauer, 1805 – 1875 年) 发明的一对电磁感应线圈，其中的一个线圈两头连接金属球 (图 8.8 中左边的那个结构)。

具体而言，就是赫兹发现当他把图 8.8 的右边接受电磁波的装置放在一个黑盒子里的时候，右边接受电磁波之后展示出的电弧变短了。同样，在左边和右边的中间放上一个玻璃板的时候，右边的电弧也变短了。但是如果放一个石英板，右边的电弧不发生变化。当时赫兹使用的石英板与玻璃板的一个区别是石英管对紫外线是完全透明的。所有的这些，都指向一个结论，就是右边连个金属球间的电流，与光有关。因此，这个效应也被称为光电效应 (photoelectric effect)。它在当时无疑是让人震撼且令人疑惑的，它蕴藏着非常基本的物理问题。这个问题被赫兹的学生莱纳德 (Philipp von Lenard, 1862–1947 年) 深度挖掘，最终成为我们在课本上学到的那个故事 (图 8.9)。

莱纳德在十九世纪末、二十世纪初是一位重要的实验物理学家。但是他性格比较具有侵略性，比较喜欢夸大自己的实验结果的意义。加上二十世纪二十年代，在德国纳粹兴起的时候莱纳德具有非常极端的纳粹倾向²⁹⁶，二战结束的时候物理学界貌似有一个共识就是与其审判他、不如淡忘他。因此，现在我们读到的文献中讨论他的贡献的材料并不多。实际上，作为赫兹的学生，莱纳德对于光电效应的定量化描述还是起到了非常重要的贡献的。比如，他分析了高真空环境下光电效应的特性。他发现，当紫外线照射在金属上的时候，会有电子从金属表面逸出，并在真空中传播。当入射光的波长大于一定值的时候，不会有电子的逸出。同时，对于紫外线照射所带来的电子逸出，是瞬时发生的，不需要时间累积。这里，频率限制与不需要时间累积这两个特征，与经典的电磁学理论都不一致。1905

²⁹⁶当时的德国还是有一批对犹太科学家非常不友好的德国科学家的。莱纳德是一个特别典型的例子，斯塔克 (Johannes Stark, 1874–1957 年) 也是。他们都是诺奖得主。但客观的讲，他们的工作的重要性和我们这本书里重点介绍的物理学革命中的关键工作，还是差很多的。

年，莱纳德因为其在阴极射线方面的工作被授予诺贝尔物理奖²⁹⁷。这个时候，人们实际上没有充分认识到光电效应这个问题的重要性²⁹⁸。

莱纳德之后，从 1904 到 1914 年之间，来自美国的密立根（Robert Andrews Millikan, 1868–1953 年）对光电效应也进行了非常深入的研究。这个时间节点，实际上是晚于爱因斯坦 1905 年关于光电效应的理论文章的。在爱因斯坦的理论文章中，他预言逸出电子的最大动能随入射光的频率变化会呈现出线性依赖关系。后来，密立根从实验上证实了这个线性依赖关系，并利用其斜率测定了普朗克常数。因为这个贡献，加上之前对电子电荷的测量，密立根在 1923 年也独自获得了诺贝尔物理奖的奖励²⁹⁹。

就光电效应的理论而言，在 1905 年爱因斯坦发表他的文章前，主要针对的实验是来自赫兹与莱纳德的。实际上，爱因斯坦在文章发表前与莱纳德也是有书信来往的。他们曾就这个问题进行过相对愉快的讨论。1905 年的理论文章为爱因斯坦带来了 1921 年的诺贝尔物理奖。莱纳德对于这次颁奖有一些意见，认为自己被怠慢了。同样在这个阶段，他与爱因斯坦的关系全面恶化，并开始污蔑爱因斯坦的相对论为犹太人的物理学。类似将学术问题政治化的行为当然是非常恶劣的。当然，后期完全不提莱纳德也不对。这里，我们在讲到光电效应的时候，出于尊重历史的考虑，还是说明一下赫兹、莱纳德、密立根的贡献。这些实验，在量子的概念被引入物理学并且被大家接受之前，在理论上显然也是让人困惑的。

²⁹⁷ 获奖词是：for his work on cathode rays. 这是基于他在 1893 年完成的实验进行的奖励。他证明了阴极射线不是电磁波。这对后期的物理学发展实际上也很重要。

²⁹⁸ 从这些工作（阴极射线、光电效应），我们也可以看出赫兹对他的影响。

²⁹⁹ 获奖理由就是：for his work on the elementary charge of electricity and on the photoelectric effect.

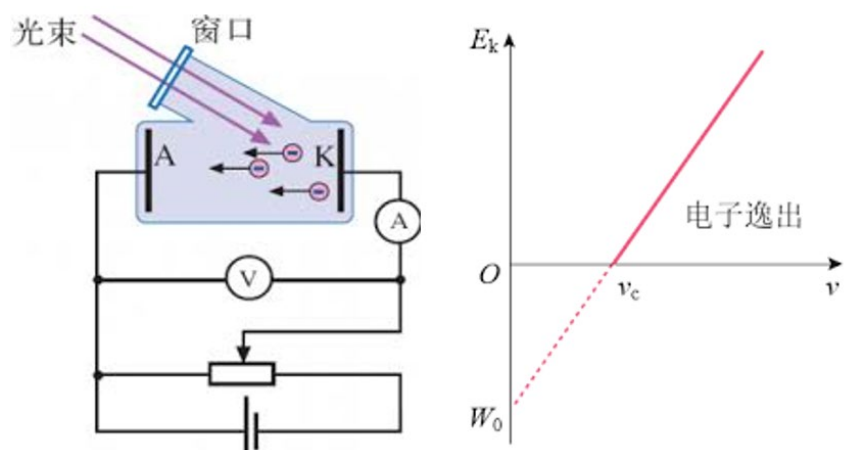


图 8.9 光电效应实验设置（左）与结果表述（右，逸出电子的动能作为入射光的频率的函数）。左边，光线照射真空中的阴极金属。一定波长范围以下（对应右图中的横轴的一定光的频率以上），会有电子逸出。通过调节滑动电阻，可以测量逸出电子的能量。实验发现（右图），在一定频率以上，逸出电子的动能与入射光的频率成正比。在一定频率以下，没有电子逸出。改变光强的话，会改变电流大小，但是不会改变有没有电子逸出的状态。这也就意味着基于能量累积来理解这个现象貌似不可行。

8.2.3 原子光谱及其规律

光谱对应的英文单词叫 spectrum，最早应该是来自于牛顿，说的是太阳光经过棱镜的折射后呈现出的彩虹的效果（图 8.10）。这个研究的时间节点是十七世纪六十年代，它预示着太阳光有不同的成分。牛顿之后，整个十八世纪，人们对光谱研究的重点集中在其吸收规律上。比如，瑞士科学家朗伯（Johann Heinrich Lambert, 1728–1777 日）发现的朗伯定律，说的是光在经过介质的时候，强度随介质厚度指数衰减。这是利用微积分的数学方法对光吸收的定量研究，整体可以用经典理论解释。

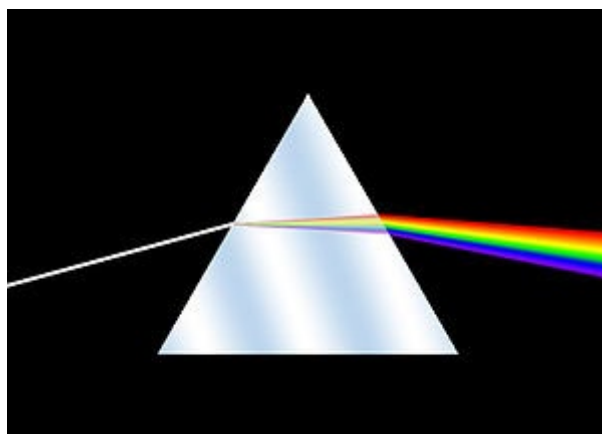


图 8.10 由棱镜衍射产生的太阳光光谱示意图。

在光谱的研究中，第一个体现量子力学规律的报道来自 1802 年的英国化学家、物理学家渥拉斯顿 (William Hyde Wollaston, 1766–1828 年)。他发现光的谱线中有一些黑线。但是渥拉斯顿将这些黑线当成是光谱中不同成分的边界，这个错误认识在 1815 年由德国科学家夫琅和费 (Joseph von Fraunhofer, 1787–1826 年) 进行了更正。在这个时候，托马斯·杨 (Thomas Young, 1773–1829) 的波动说在欧洲已经开始广泛传播，菲涅尔 (Augustin-Jean Fresnel, 1788–1827 年) 在其中扮演了重要角色。虽然与他相关的著名的泊松斑的工作还没有进行³⁰⁰，光的波动说还没有在其与微粒说的竞争中取得压倒性优势，但波动说在欧洲已经开始被一部分人接受了。这些人当中，就包括夫琅和费。

利用光的波动理论，夫琅和费设计了衍射光栅，并利用衍射光栅对光谱仪的谱线分析精度进行了大幅改进。基于这个技术的进步，他对太阳光谱进行了细致分析，发现太阳光谱中有 570 条黑线，并用字母 A 到 K 进行了标识 (图 8.11)。这些黑线，后来被称为夫琅和费线。现在，我们知道这些黑线对应的是元素能级

³⁰⁰ 泊松斑是泊松 (Siméon Denis Poisson, 1781–1842 年) 为了反对波动说，从理论上基于波动理论提出的预言。最终，被菲涅尔和阿拉戈 (François Arago, 1786–1853 年) 的实验观测证实 (图 4.17)，进而成为了波动说最有力的证据 (详见 4.3.2 节)。

之间的跳跃，需要用量子力学的原理来进行解释。在量子力学出来之前，这个现象对于经典物理学，无疑也是挑战。

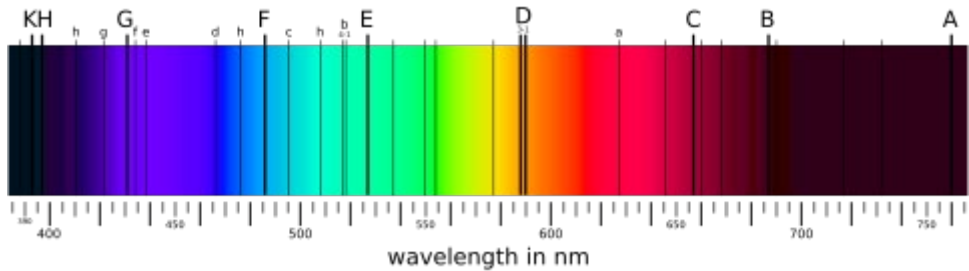


图 8.11 夫琅和费线的示意图。

我们需要注意的是 1815 年这个时间节点离量子力学建立还有一百多年，在这期间，人们虽然没有真正理解夫琅和费线，但是依然可以利用它进行了大量卓有成效的科学研究。其中，1859 年基尔霍夫（Gustav Kirchhoff, 1824–1887 年）与本生（Robert Bunsen, 1811–1899 年）发现的其与元素的对应关系对这些研究的进展起到了关键的推动作用。利用这种对应关系，人们可以在实验上建立某些波长的夫琅和费线与元素之间的联系，并利用其进行元素分析。同时，利用这个技术，人们更是发现了很多种新的元素。这对于十九世纪末、二十世纪初元素周期表的确立也起到了很大的帮助作用，在当时的物理、化学、天文学的其它实验研究同样得到了极大的应用。十九世纪六十年代末期，瑞典物理学家埃斯特朗（Anders Jonas Ångström, 1814–1874 年）结合光谱与照相技术³⁰¹，对太阳光谱中夫琅和费线所对应的波长进行了精度高达 10^{-10} 米的表征。这个长度单位后来也被定义为 Ångström。

基于这些高精度实验测量，1886 年，来自瑞士的数学家、高中教师巴耳末

³⁰¹照相机发明与 1839 年，这个技术在很大程度上也改变我们的生活。除了在科学研究中产生应用，推进科学进步，也影响到艺术等领域。

(Johann Jakob Balmer, 1825–1895 年) 在其职业生涯的暮年发现氢元素光谱中的一个系列可以用:

$$\lambda = h \times \frac{n^2}{n^2 - 2^2}$$

公式 8.10

来表示。这里的 h 是一个常数,它等于364.56nm,与后面要讲到的普朗克常数无关。当时,它被称为巴耳末常数,代表的是氢原子的结构特征。这个公式的作用是划时代的,它意味着复杂的原子光谱背后存在简单的规律³⁰²。

1888 年,瑞典物理学家里德堡 (Johannes Robert Rydberg, 1854–1919 年) 又将巴耳末的公式进行了一个简化与推广。他把公式 8.10 的两边取倒数,用我们现在说的波数取代波长来表征光波。那么,公式 8.10 就可以变为:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{h} \left(1 - \frac{4}{n^2} \right) = \frac{4}{h} \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

公式 8.11

这个时候,取 $R = 4/h$,并将其进行一个推广:

$$\frac{1}{\lambda} = RZ^2 \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

公式 8.12

巴耳末线系对应的就是这里 $Z = 1$ 、 $m = 2$ 的情况,这个公式就是里德堡公式 (Rydberg Formula)。它可以描述类氢原子的谱线。之后,1906 年莱曼 (Theodore Lyman, 1874–1954 年) 线系、1908 年帕邢 (Louis Carl Heinrich Friedrich Paschen, 1865–1947 年) 线系被相继报道,它们分别简单地对应公式 8.12 中 $m = 1$ 、 $m = 3$ 的情况。因此,可以说在十九世纪末、二十世纪初这个时间节点,关于原子的光

³⁰²若干年后 (1926 年),薛定谔方程能够快速被人们接受,就和薛定谔方程应用到氢原子上恰恰存在解析解 (当时电子计算机还没有出现) 且这个解析解恰恰能解释氢原子光谱有着密切的联系。

谱在提倡连续性的经典力学的理论框架下,同样存在令人困惑的实验现象与经验公式。这些困惑也需要量子理论来进行解释。

8.2.4 固体系统在低温下的比热问题

本节最后要讲的对经典物理学提出了关键挑战的实验现象,是固体系统在低温下的比热问题。这里,实验测量与经典理论同样存在明显不符。前面也提到过,它实际上才是开尔文爵士在其跨世纪的演讲中提到的两朵乌云中的第二朵。

人们关于这个问题的研究至少可以追溯到 1819 年法国物理学家、化学家杜隆 (Pierre Louis Dulong, 1785–1838 年) 和珀蒂 (Alexis Thérèse Petit, 1791–1820 年) 关于固体比热的测量。在这个时间点之前,英国化学家道尔顿 (John Dalton, 1766–1844 年) 与瑞典化学家贝尔塞柳斯 (Jöns Jacob Berzelius, 1779–1848 年) 提出了原子量 (atomic weight) 的概念,将不同原子形成的固体的物质的量进行了重正化。基于这个一个关键的概念,杜隆和珀蒂发现很多相同原子量的不同固体,热容基本相同。取一个单位的“物质的量”的物质,这个热容等于 $3R$,这个 R 也是公式 4.19 中的那个常数。这个规律被人们称为杜隆–珀蒂定律 (Dulong–Petit Law)。这些固体,后来人们知道都应该是简单的单质固体,因为化合物固体会有更加复杂的行为。但不管怎么说,这都是原子论在十九世纪初的巨大胜利。它的重要性可以和 1834 年卡拉帕隆提出的状态方程 (公式 4.19) 比拟,解释的都是看似繁杂的物质世界内简单统一的规律。

杜隆和珀蒂的实验温度都在室温附近,但即使在这个温度下,也不是所有简单固体的热容都符合他们提出的这个规律。比如金刚石,它在室温下的单位热容就远远小于 $3R$ 。1872 年,德国物理学家 H. F. 韦伯 (Heinrich Friedrich Weber, 1843 –

1912 年) 对高温下的金刚石热容进行了测量³⁰³。他发现当温度高于一千摄氏度的时候, 金刚石的热容趋近于 $3R$ 。同样在十九世纪下半叶, 在 4.2.4 节我们提到过, 低温技术得到了迅猛的发展。利用该技术, 人们也可以对低温下的固体热容展开系统的测量。这让人们发现室温下的杜隆-珀蒂定律在低温下也会失效, 热容在低温会下降并趋近与零。因此, 到了十九世纪末, 实验上非常明确的一个规律是对于不同的固体, 都存在一个室温或高温下热容趋于某定值, 但是随着温度的降低, 热容趋近于零的规律 (图 8.12)。

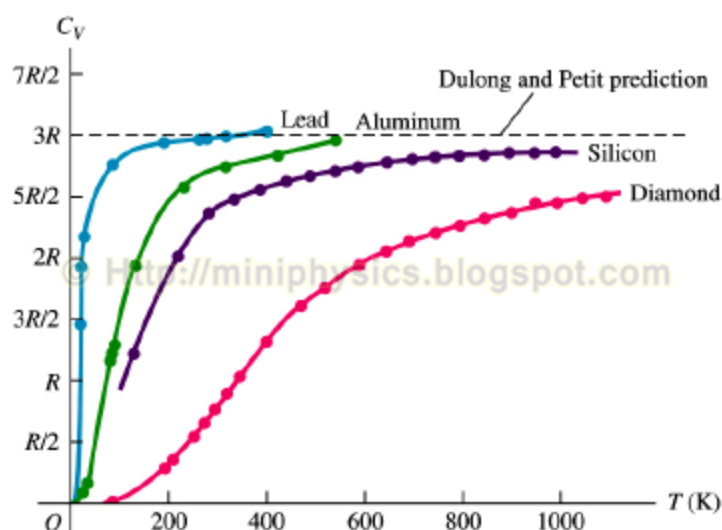


图 8.12 不同的固体, 单位热容随温度的变化。这里实际上有个很简单的规律, 就是原子间相互作用越强、原子核的质量越小, 声子频率就越大。声子频率越大, 热容偏离 $3R$ 的温度就越高。在量子力学出来之后, 所有的这些都合理了。但在物理学革命之前, 这个对经典物理学理论就是挑战。

理论上, 为了解释杜隆-珀蒂定律, 十九世纪中期, 人们提出了能均分定理。

³⁰³ 这个韦伯并不是我们熟悉的那个高斯的助手, 磁通量单位的那个韦伯。那个韦伯是十九世纪上半叶非常活跃的一个科学家, 高斯的助手, 在电磁学领域有突出贡献。这个韦伯是十九世纪末、二十世纪初的人物。他是亥姆霍兹的学生, 晚年在苏黎世理工当教授的时候, 曾短暂地当过爱因斯坦的导师。后来, 因为两个人合作非常不愉快, 爱因斯坦转投克莱纳 (Alfred Kleiner, 1849—1916 年) 门下并在克莱纳的指导下获得博士学位。爱因斯坦对这个韦伯的评价是他教的物理是五十年前的物理。

和我们这个课本上描述的多数科学知识的产生过程一样，这个定理的产生也经历了一个漫长的过程，逐渐演化为我们现在教科书上展示的版本。在本书的引言部分，我们提到过目前人们进行材料模拟的时候经常用到的一个方法叫分子动力学（Molecular Dynamics），这个方法的核心思想起源于沃特斯顿（John James Waterston, 1811–1883 年）、克罗尼格（August Karl Krönig, 1822–1879 年）、麦克斯韦（James Clerk Maxwell, 1831–1879 年）、玻尔兹曼（Ludwig Eduard Boltzmann, 1844–1906 年）等人在十九世纪提出的一个理论，叫作 Kinetic Theory of Gases（气体动力学理论）。能均分定理的产生过程和这些人就密切相关。其具体形式，先后历经了 1843–1845 年沃特斯顿关于原子运动动能项部分描述的版本、1859 年麦克斯韦关于分子运动转动项与振动项部分描述的版本，以及 1876 年玻尔兹曼给出的最终表述。

目前的教科书中，我们一般直接将玻尔兹曼的版本，即一个自由粒子在一个自由度上平均能量在温度 T 时是 $k_B T/2$ 。如果在这个自由度上还有一个简谐势，势能项同样是 $k_B T/2$ 。这样的话，对于简单固体，它有三个自由度，每个自由度上总能为 $k_B T$ 。一个物质的量的固体的总能就是 $3 \times N_A \times k_B T$ ，热容就是 $3N_A k_B$ 。这里， N_A 是阿伏伽德罗常数， $R = N_A k_B$ 。这就解释了杜隆–珀蒂定律。复杂一些的固体能量分布再复杂一些，常温或高温下会是另外一个常数。

换句话说，图 8.12 中高温下的行为在这个理论中可以得到了完美解释，但低温下热容趋近于零的行为却在玻尔兹曼的经典统计理论里让人无法理解。如果能量可以连续累积，低温和高温下的热容行为不应该有本质区别。因此，与前面提到的黑体辐射、光电效应、原子光谱一样，这一现象也让人费解。冥冥之中，它也在呼唤着量子理论的诞生。

8.3 破局 1：量子概念的提出

前面这些问题，对十九世纪末、二十世纪初的电磁理论、经典力学理论、统计理论提出了严峻的挑战。但庆幸的是在这个时候，很多科学家都能够非常深刻地理解当时物理学的困境。我们这里希望强调的一点是这与他们的教育经历是密切相关的。

比如，在本节中我们要提到的量子之父普朗克 (Max Planck, 1858–1947 年)，他在柏林大学求学期间的导师就是基尔霍夫。在黑体辐射研究中同样做出了杰出贡献的维恩 (Wilhelm Wien, 1864–1928 年)，以及对普朗克提供了巨大帮助的鲁本斯 (Heinrich Rubens, 1865–1922 年)，也在柏林大学求学过，并深受基尔霍夫、亥姆霍兹这些人的影响。再比如，爱因斯坦在苏黎世理工上学，苏黎世理工的教师中也包含闵可夫斯基 (Hermann Minkowski, 1864–1909 年) 这样的人物。虽然当时的闵可夫斯基并不欣赏爱因斯坦，但一个是老师、一个是学生，很难说学生彻底没有受到老师的任何影响。即便是和爱因斯坦与之彻底闹翻的第一个导师 H. F. 韦伯，在这些人中貌似名不见经传，但也有完成过在高温下测量金刚石热容，并证实其符合杜隆-珀蒂定律这样的极具深度的实验工作。换句话说，在大学从事教学的这拨教授们的学术水平是极高的，他们对当时的物理学，都是具备深刻的认识的。

再比如，卢瑟福 (Ernest Rutherford, 1871–1937 年)，他的博士导师是约瑟夫·汤姆孙 (J.J. Thomson, 1856–1940 年，他是电子的发现者，也是瑞利的学生)。二十世纪初，玻尔又从卢瑟福这里收益。埃伦费斯特 (Paul Ehrenfest, 1880–1933 年) 的博士导师是玻尔兹曼 (Ludwig Eduard Boltzmann, 1844–1906 年)，玻尔兹曼的导师又是斯特藩 (Josef Stefan, 1835–1893 年)。在量子力学发展的关键阶段，

慕尼黑大学有个索末菲。他的博士导师是来自哥廷根的数学家冯·林德曼 (Carl Louis Ferdinand von Lindemann, 1852–1939 年)。哥廷根这个背景与克莱因 (Felix Klein, 1849–1925 年)、希尔伯特 (David Hilbert, 1862–1943 年)、闵可夫斯基 (Hermann Minkowski, 1864–1909 年) 这些人自然会相关。而下一节我们要讲到的玻恩 (Max Born, 1882–1970 年), 与索末菲也有类似的来自哥廷根的教育背景。在量子论向量子力学过渡的那关键几年 (1924 到 1926), 他就是哥廷根的教授。正是因为这种系统的物理学教育背景, 使得他们可以在物理学革命中扮演关键的角色。本书反复提到的这种学术环境的营造以及学术思想的传承, 在物理学发展中, 也是无处不在的。

最后, 我们回到本节的主题: 破局。我们的读者可以结合上面提到的这些教育背景的因素, 以及第五、第六、第七章我们强调过的欧洲学界在哲学、数学、以及大学的学科建设方面所做的各种准备, 来进行思考。这种情况下, “破局” 这种事情的发生, 就再合理不过了!

8.3.1 普朗克的量子

在“破局”的过程中, 第一个关键人物是普朗克。他关注的问题是黑体辐射。作为基尔霍夫的学生, 他关注这个问题一点也不奇怪。从 1896 年开始, 普朗克就致力于从统计物理、电磁场理论来理解维恩公式³⁰⁴。但在 1900 年普朗克与鲁本斯的谈话后 (8.1.3 节我们提到过), 普朗克意识到黑体辐射现象在 λT 很大的情况下, 也就是长波、高温的情况下, 应该有另外一个形式。换句话说, 维恩公式 (公

³⁰⁴ 当时统计物理、电磁场理论可都是物理学中很前沿的理论。基于这种前沿理论来理解类似黑体辐射这种基本问题, 也是这种顶尖理论物理学家很自然的选择。

式 8.3) 在这个极限下应该转换为瑞利公式 (公式 8.4, 再 8.1.3 小节我们提到过, 鲁本斯向普朗克介绍了瑞利的工作)。

基于这个理解, 据说普朗克当天就推出了自己黑体辐射定律的公式 (公式 8.13)。该公式可以在长波与短波两个极限下都很好的拟合实验结果。1900 年 10 月 19 日, 他的划时代的文章“Über eine Verbesserung der Wien'schen Spectralgleichung (关于维恩谱公式的改进)”发表【Planck, 1900】。因为这个与鲁本斯的关系, 1922 年在鲁本斯的追悼会上, 普朗克也说了下面这段话: Without the intervention of Rubens, the formulation of the radiation law and thereby the foundation of quantum theory would perhaps have arisen in quite a different manner, or perhaps not have developed in Germany at all【陈难先, 2023】。

这里, 我们遵循多数教科书的习惯用 $\nu = c/\lambda$ 将公式 8.3 的波长转换为频率, 并从一个唯象的电磁场理论出发, 来展开讲解普朗克的量子概念的引入。在对比瑞利的公式与维恩的公式的过程中, 普朗克得到启发, 注意到如果不用维恩和瑞利的公式, 而用:

$$E(\nu) = \frac{c_1 \nu^3}{e^{c_2 \nu/T} - 1}$$

公式 8.13

那么维恩公式在长波的缺陷可以被克服 (图 8.13), 瑞利公式在短波的问题也可以被避免³⁰⁵。换句话说, 利用公式 8.13, 实验上长波长 (低频) 和短波长 (高频) 两端的数据是都可以被很好地模拟。之后, 为了理解这个公式, 普朗克进行了一系列理论上的尝试, 最终引入了量子 (quanta) 的概念。

³⁰⁵前面说过, 这个问题在 1911 年被埃伦费斯特称为紫外灾难, 实际上在 1911 年这个时间节点, 这个问题应该说已经被解决了。

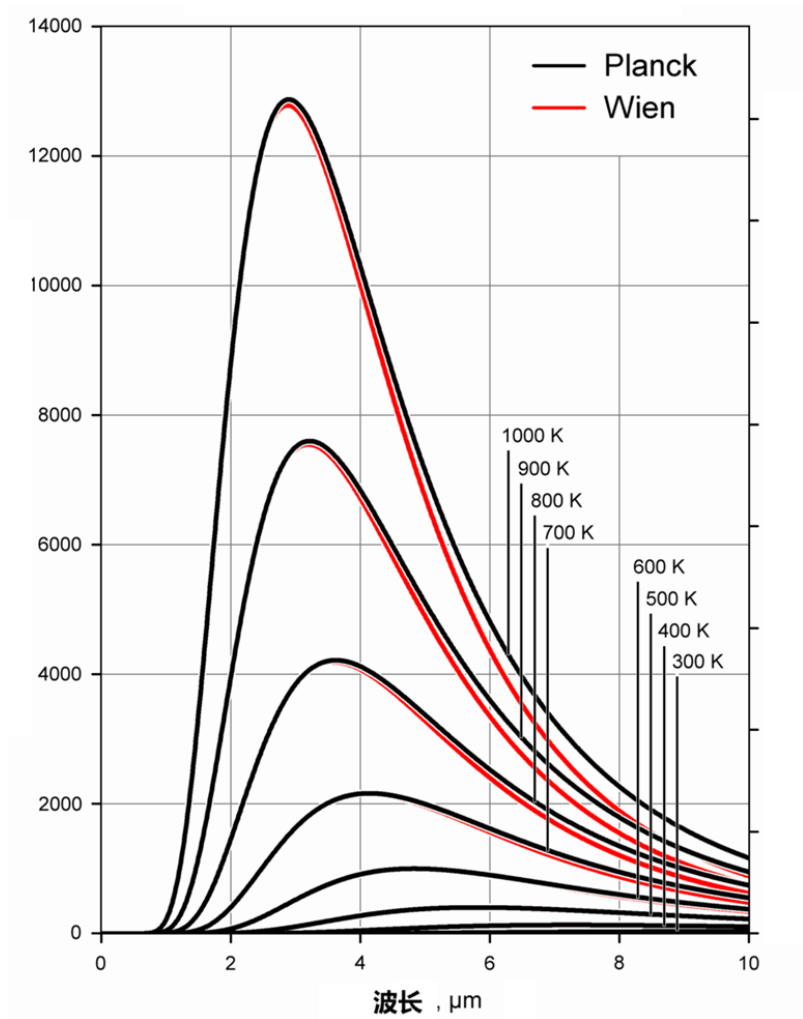


图 8.13 用普朗克的公式拟合出来的相对辐射强度（与图 8.4 单位不同）作为电磁波波长的函数。可以看到普朗克的公式可以修正维恩公式在长波范围内的行为。同时，也不像瑞利的公式那样不适用于短波区域。

为了将这个理论的思路讲的简单易懂,我们从图 8.2 左边那个黑体的腔出发,假设它是一个边长为 L 的立方体。在这个立方体内,电磁场以驻波的形式存在,其中电场强度分布满足:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \sin\left(\frac{n_1\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n_2\pi y}{L}\right) \sin\left(\frac{n_3\pi z}{L}\right)$$

公式 8.14

其中 n_i 为整数。这种情况下,其中每个驻波模式在相空间中占据的体积是 $(\pi/L)^3$ 。而电磁波是的频率与动量之间的关系是 $2\pi\nu = ck$ 。因此,空腔中的电磁波模式数

可通过如下公式估算：

$$\frac{4\pi k^2}{(\pi/L)^3} dk = \frac{4\pi(2\pi\nu/c)^2}{(\pi/L)^3} d(2\pi\nu/c) = \frac{32\pi L^2}{c^3} \nu^2 d\nu$$

公式 8.15

这里， $4\pi k^2 dk$ 是相空间中半径为 k 、厚度为 dk 的有一定厚度的球壳的体积。这个体积除以每个模式在相空间中的体积，就是模式数。

基于公式 8.15，电磁波在频率轴上的态密度就可以定义为：

$$g(\nu) = \frac{32\pi L^2}{c^3} \nu^2$$

公式 8.16

我们忽略掉前面的系数，可知态密度正比于 ν^2 。这个时候，假设腔体内部电磁波就是以驻波的形式存在，我们可以把公式 8.13 进行一个变形：

$$E(\nu) = \frac{k_B c_2 \nu}{e^{k_B c_2 \nu / (k_B T)} - 1} \cdot \frac{c_1}{k_B c_2} \nu^2$$

公式 8.17

忽略 $\frac{c_1}{k_B c_2}$ 这个常数，并且认识到 ν^2 是个态密度，我们可以得到的核心信息是：公式 8.17 告诉我们在腔体中能量为 ν 的电磁波的平均能量可表达如下：

$$\bar{E}(\nu) = \frac{k_B c_2 \nu}{e^{k_B c_2 \nu / (k_B T)} - 1}$$

公式 8.18

那我们下面的任务，就是理解公式 8.18。换句话说，就是理解为什么能量为 ν 的电磁波在温度 T 下，按照统计力学的基本原理，平均能量可以用公式 8.18 表达？

这个时候，如果我们将 $1/(k_B T)$ 替换为一个变量 β ，公式 8.18 就变为：

$$\bar{E}(\nu) = \frac{k_B c_2 \nu}{e^{\beta k_B c_2 \nu} - 1}$$

公式 8.19

取 $k_B c_2$ 等于常数 h （这个 h 后来被人们成为普朗克常数），那么公式 8.19 可以进一

步写为：

$$\bar{E}(\nu) = \frac{h\nu}{e^{\beta h\nu} - 1}$$

公式 8.20

那么，我们的任务自然转化为理解公式 8.20。

我们注意到公式 8.20 是可以表示为下面这个微分形式的：

$$\bar{E}(\nu) = \frac{d}{d\beta} \ln[1 - e^{-\beta h\nu}]$$

公式 8.21

而统计力学的基本原理会告诉我们：

$$\bar{E}(\nu) = -\frac{d}{d\beta} \ln[Z]$$

公式 8.22

其中Z为这个系统在平衡态下的配分函数。因此，对比上述两式（公式 8.21 与公式 8.22），可得：

$$\ln[Z] = -\ln[1 - e^{-\beta h\nu}]$$

公式 8.23

进而：

$$Z = \frac{1}{1 - e^{-\beta h\nu}}$$

公式 8.24

这个配分函数的形式可以做如下泰勒展开：

$$Z = 1 + e^{-\beta h\nu} + e^{-2\beta h\nu} + e^{-3\beta h\nu} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\beta h\nu}$$

公式 8.25

其背后的物理意义，就是腔体内电磁波驻波的能量只能处在 $\varepsilon = nh\nu$ ，其中 n 为非负整数这样的分立状态。换句话说，当我们认为能量不再连续而是以量子(quantum)

的形式以 $h\nu$ 为最小单元存在，那么公式 8.13 的合理性就可以被解释。

到这里，普朗克已经用一个理论模型（量子理论）解释了他的拟合公式（公式 8.13）。下一步，就是理解为什么在长波（低频）与短波（高频）极限下，之前瑞利和维恩的公式能够分别被用来拟合实验？

我们可以基于公式 8.17 来分析两个极限。先看维恩公式的适用范围。对短波、低温极限的电磁波， $k_B c_2 \nu$ 相比于 $k_B T$ 是一个大的正数。这时，有：

$$e^{k_B c_2 \nu / (k_B T)} - 1 \approx e^{k_B c_2 \nu / (k_B T)}$$

公式 8.26

进而：

$$E(\nu) = \frac{k_B c_2 \nu}{e^{k_B c_2 \nu / (k_B T)} - 1} \cdot \frac{c_1}{k_B c_2} \nu^2 \approx c_1 \nu^3 e^{-k_B c_2 \nu / (k_B T)}$$

公式 8.27

也就是说普朗克的公式回到了维恩的公式³⁰⁶【Wien, 1896】。而对长波、高温极限下的电磁波（瑞利公式的适用范围）， $k_B c_2 \nu$ 相比于 $k_B T$ 是一个小量。这时，有：

$$e^{k_B c_2 \nu / (k_B T)} - 1 \approx k_B c_2 \nu / (k_B T)$$

公式 8.28

进而：

$$E(\nu) = \frac{k_B c_2 \nu}{e^{k_B c_2 \nu / (k_B T)} - 1} \cdot \frac{c_1}{k_B c_2} \nu^2 \approx c_3 \nu^2 T$$

公式 8.29

这时，普朗克的公式又回到了瑞利的公式【Reyleigh, 1900】。

至此，我们本小节的目的就达到了。总结一下，就是从普朗克的公式出发，

³⁰⁶如果大家对比公式 8.27 与公式 8.3 的话，会注意到公式 8.3 是波长的负五次方，而公式 8.27 是频率的三次方。它们两者实际上是等价的。这时由于频率与波长有个倒数关系。因此， $d(1/\lambda) = -(1/\lambda^2)d\lambda$ 。这就让公式 8.25 换成波长分布的时候，变为波长的负五次方。同样的关系还会存在于后面的公式 8.29 与前面公式 8.4 的对比中。8.29 换成波长分布，就是波长的负四次方。

我们也很容易理解为什么在长波、高温（或者短波、低温）极限下，瑞利（维恩）的公式可以拟合实验结果。但他们都不在对方适用的范围适用。而普朗克的公式，通过量子概念的引入，可以在全波段覆盖实验观测。一个困扰人们很久的基本问题（黑体辐射问题）被解决，一个革命性的概念（量子）诞生，物理学革命也拉开了序幕。

8.3.2 爱因斯坦的光电效应与固体比热

提出量子概念的普朗克在二十世纪初是孤独的。这种孤独或许只有他自己能体会。直至 1905 年，金斯还在为瑞利公式寻求统计物理解释，并发表了那篇在当时和在我们教科书中非常有影响力的文章【[Jeans, 1905](#)】。主流学者中，相信普朗克的理论的人应该并不多。普朗克同时也是幸运的，因为他马上就将迎来一位即将成为学术超新星的支持者，爱因斯坦。

1905 年，爱因斯坦利用光量子的概念解释了光电效应【[Einstein, 1905a](#)】。这在十六年后为他赢得了 1921 年的诺贝尔物理奖。1907 年，爱因斯坦进一步利用我们在《固体物理》教材中经常学到的爱因斯坦模型解释了固体热容在低温下的行为【[Einstein, 1907](#)】。这个模型当然也是一个量子理论。因此，不夸张的说，在二十世纪的第一个十年，爱因斯坦既是普朗克最坚定的支持者，也是他的理论的发扬者³⁰⁷。在 4.2.4 小节，我们讲热力学第三定律的时候提到过能斯特应该也是他们的盟友，是索尔维会议最早的发起者。他们一起，开启了物理学革命中的量子理论革命。

³⁰⁷1914 年，也是应普朗克的邀请，爱因斯坦从苏黎世搬到柏林任职柏林大学。在这里，他完成了广义相对论。

我们先看一下爱因斯坦在他 1905 年的文章中说了什么？这里，他创造性的引入了光量子（德语是 Lichtquanten，英语对应 quantum of light）的概念³⁰⁸。他认为频率为 ν 的光子的能量为 $h\nu$ ，其中 h 就是普朗克在解释黑体辐射定律的时候引入的普朗克常数。当光量子照射到图 8.9 所示的金属表面的时候，一个光量子的能量 $h\nu$ 被一个电子吸收。这个能量中的一部分用以克服金属表面的束缚，我们把这个成为逸出功，我们记作 A 。这样，当电子成为自由电子的时候，其动能就等于：

$$\frac{1}{2}mv^2 = h\nu - A$$

公式 8.30

这也就解释了图 8.9 的右边为什么只有在入射光的频率高于一个特定值之后，才有电子逸出。同时，逸出电子的最大动能会与入射光的频率呈线性依赖关系。在引入能量量子的概念之后，一个困扰学界很久的物理问题就通过一个极其简单的图像获得了解释。

除了光量子的概念，爱因斯坦解释固体热容的时候，同样引入量子的概念来描述固体中的振动。这个尝试也获得了成功。至少，它解释了固体热容在低温下为何偏离能均分定理给出的常数而趋近于零（图 8.12 中实验结果偏离杜隆-珀蒂定律的那个行为）。同时，它也能解释为何高温下固体的热容会回归杜隆-珀蒂定律的预测。同时，我们也需要知道爱因斯坦的热容模型有一个明显的缺陷，就是在低温下热容对温度的依赖关系并不正确。其原因，是爱因斯坦认为固体中的振动只有一个频率，而忽略了色散。为了解决这个问题，德拜在 1912 年引入色散

³⁰⁸这个词在二十年后演化为光子（Photon）。1926 年，路易斯（Gilbert Newton Lewis, 1875–1946 年）在 Nature 上发表了的一个以“The conversation of photons”为题 letter [【Lewis, 1926】](#)。1928 年，康普顿在解释他的实验的时候，大量使用了这个词。之后，演化为我们现代的用法。

将爱因斯坦的模型进行了改进(图 8.14), 这个模型被称为德拜模型【Debye, 1912】。

这些细节, 笔者认为对我们本章希望传达的核心思想来说并不重要, 因此我们在这里并不赘述。感兴趣的读者可以参考具体的《固体物理》的教材【Kittel, 2005】

【黄昆, 2014】【韦丹, 2023】。总之, 随着量子概念在描述固体内原子振动的使用, 固体热容问题在上世纪的第二个十年也同样被解决。

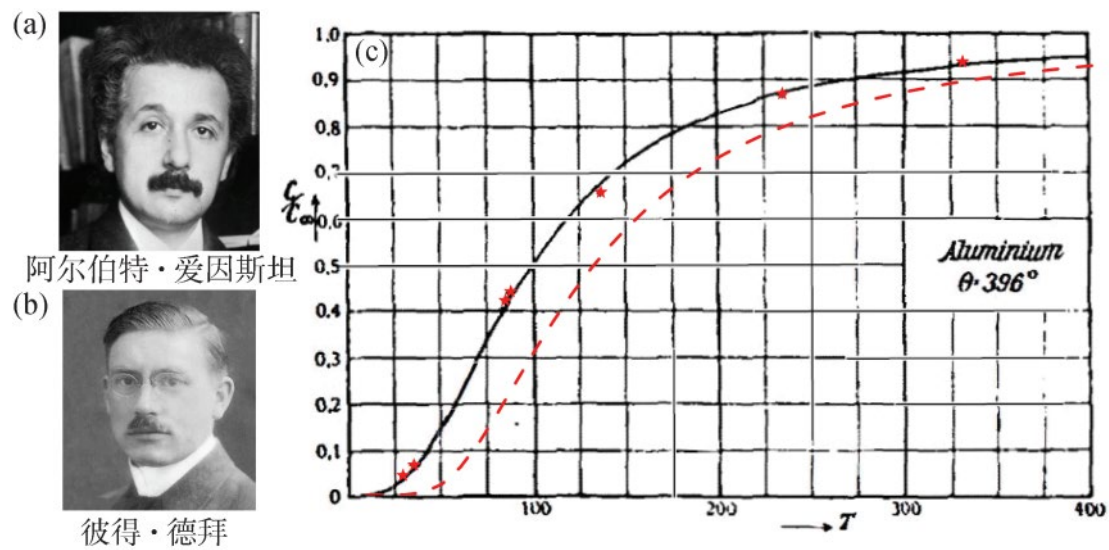


图 8.14 爱因斯坦模型和德拜模型对热容的改进, 摘自文献【谢梦祥, 2022】(原始数据来自文献【Debye, 2012】)。其中, a)和 b)是爱因斯坦与德拜的头像。c)是文献【Debye, 2012】中的数据。对于金属铝, 黑实线是德拜模型的结果, 红虚线是爱因斯坦模型的结果, 红色的点为实验结果。德拜模型相对于爱因斯坦模型, 因为考虑了声子频率的分布, 是有改进的。

8.3.3 卢瑟福与玻尔的原子模型

1897 年, 瑞利 (John William Strutt, 3rd Baron Rayleigh, 1842 - 1919 年) 的学生约瑟夫·汤姆孙 (J.J. Thomson, 1856-1940 年) 基于其测出的阴极射线的电荷/质量比远高于人们当时已知的所有粒子这样一个事实, 指出阴极射线中的粒子这个可能是一种全新的粒子, 这个粒子的电荷/质量比很大的很可能是因为它

的质量非常之小。1899 年，他又针对光电效应产生的光电流，进行了电荷/质量比的测量，结果与之前知道的阴极射线相近。同年，他引入了“电子”的概念来描述这个带电的基本单元。

1898 年，卢瑟福的学生卢瑟福（Ernest Rutherford, 1871–1937 年）在衰变反应中发现了一种不明射线，他把他命名为 β 射线。之后，贝克勒尔（Antoine Henri Becquerel, 1852–1908 年）测定了它的电荷/质量比，结果与之前的阴极射线、光电流中的粒子类似。基于这些实验，约瑟夫·汤姆孙非常明确地指出不论是阴极射线、光电流，还是 β 射线，它们都是电子流，它的质量比原子小很多，是原子的构成部分。这样，原子不可分的传统观念彻底破灭³⁰⁹。原子核的各个组成部分应该以什么样的形式存在？自然地，也成了物理学研究中的一个根本问题³¹⁰。

在 8.2.3 节，我们回顾了物理学革命前人们关于光谱现象的理解。电子被发现后，基于人们当时已知的电子和另外一种带正电的粒子来理解电子结构（因为原子整体是电中性的），很自然的就会和人们之前就已经进行了的诸多原子光谱的测量联系起来。这实际上是两个问题，第一，是建立一个原子模型，来说明原子内部各个部分是怎么存在，进而构成原子的？第二，是基于这个原子模型，来理解实验上已经可以测量的原子光谱。这里，物理学理论必须可以被实验证实或

³⁰⁹原子这个词在德谟克利特引入的时候的意思就是最小的不可分的单元。道尔顿借用了这个概念，进行科学上的表述。知道 1897 年之前，人们是不会往原子可以进一步分割这个方向想的。

³¹⁰这个过程，可以类似人们历史上太阳系的结构的认识，在物理上分为两步。一步，是电子（行星）的运动学，也就是 kinematics；一步，是电子（行星）的力学，也就是 mechanics。对于行星，运动学的问题由托勒密、哥白尼、开普勒、伽利略按递进的方式逐步完成。力学的问题则是由牛顿解决。两者合在一起，构成了近代物理学中最早的经典力学。而在对原子结构的认识过程中，人们也有一个类似的从运动学到力学的主线。1925 年，在海森堡的革命性的文章中，kinematics 就是一个我们不能忽视的关键词。正是海森堡对电子运动学的重新描述，导致了新的力学（量子力学）的诞生【Heisenberg, 1925】。这个，读者在针对我们这章后面的内容的阅读中，应该可以慢慢体会到。

者证伪这样一个物理学最基本的特质也得到了充分的体现。人们对这两个问题的彻底解答，要等到量子力学建立之后。在 1900 年普朗克提出量子的概念之后到 1926 年薛定谔方程提出之前这个特定的历史时期，卢瑟福与玻尔（特别是玻尔）借助量子的概念所建立的原子的行星模型较好地解决了这个问题，并诱发出一系列促进量子力学进步的实验与理论研究。因为这些的贡献，他们也与普朗克、爱因斯坦一道，成为量子理论早期发展中的重要推动力。

卢瑟福与玻尔的工作是先后完成的。我们先从卢瑟福说起。1898－1899 年，他在研究放射性的时候先后发现了两种人们之前不知道的射线。这两种射线被命名为 α 射线、 β 射线³¹¹。通过贝克勒尔关于其电荷/质量比的实验， β 射线很快被确认为电子流。而人们对 α 射线本质的研究，则持续地更长久。1908－1909 年，卢瑟福本人确定了它是由氦原子核组成的。之后，卢瑟福与他的助手盖革（Hans Wilhelm Geiger, 1882－1945 年）、学生马斯登（Ernest Marsden, 1889－1970 年）一起利用 α 射线系统研究了金属箔对这种 α 射线的散射。他们的目的，就是理解原子的结构。

之前在他的导师约瑟夫·汤姆孙所建立的模型中，带负电的电子和带正电的粒子的分布是均匀的。因此，不可能出现大角度散射的情况。但来自马斯登的实验观测清楚表明存在大角度散射的情况。1910 年，卢瑟福针对这个观测进行了大量的思考，最终从理论上提出了一个带正电的粒子必须集中在原子中心一个很小

³¹¹当时也是放射性研究最热的时候，贝克勒尔、居里夫妇发现核衰变也在那个时间。在不理解一个射线的本质的时候，人们习惯于用一些字母来命名，比如早期伦琴（Wilhelm Conrad Röntgen, 1845－1923 年）在 1895 年发现的射线，被命名为 X 射线。卢瑟福是约瑟夫·汤姆孙的学生，自然也在这个主流的学术交流的团体。他把他在 1898－1899 年发现的两个射线命名为 α 射线、 β 射线。这个也后面影响了法国科学家维拉尔（Paul Ulrich Villard, 1860－1934 年）对 γ 射线的命名（这个射线贝克勒尔在 1896 年注意到过，被描述为放射性的射线，但没有给予正式的命名）。

的区域、电子弥散在其周围的模型。我们把这个模型称为原子的行星模型，它可以定量地解释盖革与马斯登的实验观测。之后，为了保险起见，盖革和马斯登还进行了大量的改进实验。结果进一步证实了这个理论模型。至此，一个基于实验观测的理论模型正式建立³¹²。我们的教科书上，也都会有对这个过程的相对准确的描述。这里就不再赘述其理论细节。

被这个工作触动，1912年，在曼彻斯特访问的玻尔将关注点放在了如何从理论层面更加深入地理解卢瑟福的原子模型³¹³？在这里，玻尔相对深刻地理解了卢瑟福的行星模型与经典力学的矛盾³¹⁴，进而坚信唯有量子理论可以解释这种矛盾。在这个过程中，巴耳末公式给了他很大的启发。同时，斯塔克（Johannes Stark, 1874 – 1957年）的价电子跃迁决定原子光谱的思想也深深地影响了他。基于这三点认识（卢瑟福行星模型、巴耳末公式、斯塔克的价电子跃迁的思想），他以最简单的氢原子为入手点，于1913年连续发表了三篇文章【Bohr, 1913a–1913c】，给出了我们现在看到的玻尔氢原子模型。

玻尔氢原子模型有三点核心内容：

- 1) 定态假设：电子绕原子核运动的轨道不是任意的，而是分立的、可以用整数 n 标识的特定的轨道。在这些轨道上，电子不会按照经典电磁学理论描

³¹²相比于比它早一些的长冈半太郎（Nagaoka Hantarō, 1865 – 1950年）的土星模型、佩兰（Jean Baptiste Perrin, 1870—1942）的行星模型，卢瑟福的行星模型不再是完全的理论假设，而是基于实验观测提出的理论模型，具有划时代的意义。

³¹³玻尔当时获得嘉士伯基金会（Carlsberg Foundation）的资助访问英国，先后在剑桥大学的约瑟夫·汤姆孙课题组以及曼彻斯特大学的卢瑟福课题组学习。他与卢瑟福之间产生了非常美妙的化学反应。

³¹⁴经典电动力学告诉我们加速运动的带点粒子会向外辐射能量。这样，绕原子核进行匀速圆周运动的电子就会由于向心加速度的存在迅速放出能量，导致原子不稳定。

述的那样辐射能量，而是会保持一个固定的能量 E_n ；

- 2) 跃迁假设：电子在定态上虽然不辐射能量，当电子从一个能量为 E_n 的定态 n 向能量为 E_m 的定态 m 跃迁的时候，会辐射出特定频率的电磁波，电磁波的频率 ν_{mn} 满足：

$$h\nu_{mn} = E_n - E_m$$

公式 8.31

- 3) 角动量量子化假设：处在定态 n 上的电子的角动量 J 也是量子化的，它满足：

$$L = rp = nh/(2\pi)$$

公式 8.32

应该说这三条都是关于运动学（kinematics）规律的。它们与经典物体的运动描述非常不一样。但比起 1925 年海森堡所引入的更加“量子”的运动学，它又保留了轨道的特征。这也使得它无法完成向力学理论的升级。因为这个原因，类似玻尔原子模型的理论也被称为量子论。1924–1926 年期间人们完成的，叫量子力学。

基于上面的三条假设，结合经典力学，玻尔可以给出各个定态能量地数学表达。这个表达式可以很好地解释 8.2.3 节我们讲的里德堡谱线（公式 8.12）³¹⁵。具体而言，就是先从我们经典力学中学到的离心力等于引力的条件出发，可知定态的半径与速度满足如下关系：

$$m_e \frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

公式 8.33

进而：

$$m_e v^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

公式 8.34

³¹⁵但是仅仅是氢原子的谱线，因为这个是氢原子模型，其它原子解释不了。

这里, m_e 是电子质量, ϵ_0 为真空中的介电常数。由角动量量子化条件(公式 8.32),

又知:

$$rp = rm_e v = nh/(2\pi)$$

公式 8.35

这样, 联立公式 8.34 与 8.35, 我们就可以得到:

$$m_e \left(\frac{nh}{2\pi r m_e} \right)^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

公式 8.36

进而, 再通过:

$$\frac{n^2 h^2}{4\pi^2 r^2 m_e} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

公式 8.37

获得电子轨道半径的表达式:

$$r = n^2 \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi e^2 m_e}$$

公式 8.38

这个式子说明电子轨道半径是量子化的。当 $n = 1$ 时, 它给出的半径约为 0.52917(7)埃。这个长度也被人们称为玻尔半径。

之后, 基于公式 8.38, 结合经典的 $-1/r^2$ 的中心力场中势能绝对值为动能二倍这样一个关系³¹⁶, 我们又可以推出电子轨道的能量等于:

$$E_n = \frac{E_1}{n^2}$$

公式 8.39

其中:

³¹⁶这个高中物理中很明确的一个结论, 我们这里就不解释了。

$$E_1 = -\frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^2}$$

公式 8.40

为氢原子中电子基态的能量，它约为-13.6电子伏特。将公式 8.40 带入定态跃迁假设电磁波频率的表达式（公式 8.31），在不考虑后来人们才知道的自旋自由度的场景下，人们可以得出氢原子光谱的非常完美的解释。

玻尔的氢原子模型用漂亮的、简单的数学完美地解释了氢原子光谱³¹⁷。之后，人们开始将它往类氢原子和其它原子进行了推广。索末菲、埃伦费斯特做了很多细节的工作【Sommerfeld, 1923】。但整体而言，成功是比较有限的。究其根源，应该说玻尔的四条假设与经典力学进行结合的处理是非常简单粗暴的，它是一个典型的量子理论与经典力学的混合体，但并不是一个牢固的具有力学基础的理论。也正是因为这个原因，1924 年，玻恩在当时物理学最主要的刊物 *Zeitschrift für Physik* 上以 *Über Quantenmechanik*（关于量子力学）为题提交了一篇讨论量子理论的论文【Born, 1924】，首次提出了“量子力学”而非“量子理论”的概念，吹响了人们将量子论转化为量子力学的号角³¹⁸。之后，海森堡从玻尔氢原子模型中的定态假设、定态跃迁假设出发，在这两个本身以及蕴含了一些哲学思想的概念的基础上，通过强调“可观测量”这样一个更具哲学内涵的物理概念，通过对电子的全新的运动学描述（这种运动学描述的数学基础是线性代数），开启了建立矩阵力学的尝试【Heisenberg, 1925】。最后，在玻恩、约当的帮助下，建立了

³¹⁷当然，这里不包含电子自旋的自由度。索末菲、泡利在理解与这个自由度相关的实验光谱数据中做了很多重要的前期理论探索。在 1926 年左右，其背后的物理（自旋这个全新的自由度的确认）最终被乌伦贝克（George Eugene Uhlenbeck, 1900—1988 年）、高德施密特（Samuel Abraham Goudsmit, 1902—1978 年）完成。在目前这部分讨论中，我们并不涉及。

³¹⁸这是“量子力学”这个名词首次出现。

矩阵力学【Heisenberg, 1925】【Born, 1925】【Born, 1926a】。

关于这一点，我们在后面 8.4.2 节介绍矩阵力学的时候会详细解释。在本小节，我们仅仅强调玻尔的氢原子模型虽然成功，但它也只是一个停留在模型层面的理论，无法称之为力学。“量子”这个关键想法的引入让人们基于分立能级、定态跃迁这些新的概念，很好地理解了氢原子光谱，并在一定程度上理解类氢原子光谱以及其它原子的结构。这些进步为人们在下一步将量子论改进为量子力学奠定了坚实的基础。

8.4 从量子论到量子力学

在上一节介绍的早期量子理论的积累的基础上，量子力学的诞生看起来就像是一阵风暴，从 1924 年刮起到 1926 年结束。短短的两年的时间，便完成了理论的架构。对于这样一个现象的形成，不同人肯定有不同的理解。在笔者看来，可能是因为人们对新事物的理解需要一个过程。其中最大的羁绊，是来自于物理学背后的哲学思想在物理学研究的应用过程中与物理学理论的磨合的。比如，康德哲学中的现象界在笔者看来，在物理学革命中就非常有意义。这个哲学思想对应到物理学中，就是倡导人们放弃不可观察量，也就是现象界以外的东西，而是基于可观测量构建物理学理论。这在海森堡 1925 年的文章中得到了充分的体现，在爱因斯坦的相对论中也得到了充分的体现。两者的不同之处，在于相对论的提出到了后期基本上就是爱因斯坦的独角戏（庞加莱在 1911 年就去世了）。当他把主体思路捋清后，具体的物理学理论的建立是按部就班地由他一个人完成的。而量子力学，则是由一系列的英雄共同努力的结果。在开始的阶段，人们需要去接受这个思想，进行沉淀。当这种思想本身已经被人们接受之后，具体的物理学理

论的发展是可以快速完成的。

具体而言，就是上一节提到的三个具体的工作（普朗克的量子、爱因斯坦的光电效应与固体比热、卢瑟福与玻尔的原子模型）虽然是物理学的研究，但它们很大的一个作用是在哲学上让人们接受能量是可以不连续分布的以及经典力学中人们“对运动的描述”在微观世界并不成立。这为我们这一节要讲解的量子力学的建立进行了充足的准备。到了上世纪二十年代初，能量分立、光具有粒子性这样一些在经典力学中反常识的新物理在当时的物理学家群体已经成为新的常识。作为一个结果，物质波的概念（德布罗意，Louis Victor de Broglie, 1892 – 1987 年）【[de Broglie, 1923a–1923c](#)】、物理学理论需要通过可观测量建立（海森堡，Werner Heisenberg, 1901–1976 年）【[Heisenberg, 1925](#)】这些更新的物理思想在 1923–1925 年之间先后涌现，量子力学的整体思路就被彻底打开了³¹⁹。其中，前者诱发了波动力学（薛定谔，Erwin Schrödinger, 1887–1961 年）【[Schrödinger, 1926a–1926f](#)】，它的落脚点是固定边界条件的偏微分方程³²⁰。而后者，让海森堡不再基于电子轨道，而是基于物理学可观测量来构建自己的力学理论。最终，矩阵力学在海森堡、玻恩（Max Born, 1882–1970 年）、约当（Pascual Jordan, 1902–1980 年）的共同努力下诞生【[Heisenberg, 1925](#)】【[Born, 1925](#)】【[Born, 1926a](#)】。矩阵的本征值自然是分立的，这与前期的物理观测又保持了保持一致。之后，波函数的统

³¹⁹实际上，从诺贝尔物理奖的颁奖顺序来看，这些工作的重要性也是可以被体现的。比如，1929 年德布罗意获奖，1932 年海森堡获奖。这两个奖颁地都很快，也引领了后面的一批工作。

³²⁰薛定谔方程说到底就是一个固定边界条件的偏微分方程，它的解是分立的。这个，与我们的生活经验是密切相关的。比如，两端固定的琴弦，允许的就是分立的驻波。数学上，在十九世纪的力学问题研究中，人们已经非常清楚固定边界条件的偏微分方程是有分立模式的解的了。到了薛定谔方程这里，应该说是这个数学规律的一个应用。

计性几率诠释、测不准关系、互补原理、电子自旋等概念也被先后提出。量子力学的基本理论也就彻底建立了。

下面，我们将按照这个历史顺序，先后介绍量子力学的这些核心的思想，具体包括：1) 德布罗意的电子波，2) 海森堡、玻恩、约当的矩阵力学，3) 薛定谔的波动方程，4) 玻恩对波函数的物理意义的统计性几率诠释，5) 测不准关系、互补原理，6) 电子自旋。在这些介绍之后，我们还想针对这些量子的理论展开一些关于“传承”与“革命”的讨论。通过这些，笔者希望能够完成对量子力学的初步介绍。如果读者是物理学专业的学生，笔者也希望这些初步介绍能够在一定程度上辅助读者在后续的专业性学习。

8.4.1 德布罗意的电子波

关于这场从量子论到量子力学的转变，我们从德布罗意说起。如不特别说明，本书中的德布罗意指的是路易斯·德布罗意。本小节，我们用路易斯、莫里斯分别指代两兄弟。路易斯出生于一个法国的贵族家庭。在他十四岁的时候，他的父亲去世。好在长兄如父，他的长兄莫里斯·德布罗意 (Maurice de Broglie, 6th Duke of Broglie, 1875 – 1960 年) 比他大 17 岁³²¹，在路易斯的教育过程中发挥了很重要的作用。莫里斯也是一名物理学家，专注于 X 射线的研究，是这个方面具有非常高的学术地位的一个学者。他是朗之万 (Paul Langevin, 1872 – 1946 年) 的学生³²²。在路易斯接触量子理论的过程中，莫里斯和他的朋友们是发挥了非常重要

³²¹从 6th Duke of Broglie 这个称呼来看，他们家的爵位等级很高，属于公爵。在封建社会（包括中国与欧洲），爵位一般都是长子继承的。在德布罗意的时代，法国已经经历了大革命，但是一些封号还是保留的。

³²²莫里斯出生于 1875 年，仅仅比朗之万小三岁，属于他比较早的学生。后面他的弟弟路易斯的博士导师也是朗之万。在学术界一个科研人员早期的学生和晚期的学生年龄可以相差很大。1944

的作用的。

就教育经历而言，路易斯中学毕业后进入索邦大学学习。开始，他并不确认自己的兴趣。于是，主修过一段时间的历史，后转为法律。再后来，他被庞加莱的两部著作《科学的假设》与《科学的价值》所吸引【庞加莱，2010】【庞加莱，2021】，进而专注于理论物理，并于1913年获得学士学位³²³。毕业后，路易斯前往陆军服役，这种状态一直持续到一战结束。1919年，他重返索邦大学开始博士阶段的学习。在他读博士期间，正是玻尔、爱因斯坦在欧洲大放异彩的时候。作为一个年轻的学生，选择以蓬勃发展的量子理论为题目来设计自己的博士论文再合理不过。1924年，他完成了一篇名为《量子理论研究》(Research on the Theory of the Quanta)的博士论文³²⁴。这篇学位论文的基础，是他于1923年在《法国科学院通讯》中发表了三篇关于波和量子的论文【de Broglie, 1923a-1923c】³²⁵。在第一篇文章中，他以《辐射——波与量子》为题，提出了实物粒子具有波动性这

年，路易斯被选入法兰西学术院 (Académie Française) 的时候，莫里斯为他颁发的勋章（莫里斯是1934年入选的）。

³²³这里进行两点说明。一是这两本书的法文名字分别是<La Science et l'Hypothèse>和<La Valeur de la Science>，我们的引文引用的是商务出版社的中译本。二是这段话整体来自维基百科。

³²⁴网上有说法是这个博士论文很短。实际上，它很正式。除了内容来自之前发表的三篇文章【de Broglie, 1923a-1923c】，篇幅实际上也很长，有将近80页（关键是内容充实），是一篇非常认真的博士论文。路易斯的博士导师是朗之万。有趣的是，朗之万本人并不能确认这篇博士论文是否合格。他咨询了爱因斯坦的意见。爱因斯坦的回复非常正面，当然他也提了一些意见。最终，路易斯的博士答辩顺利完成。

³²⁵这三篇短文投稿的时候，推荐人是佩兰 (Jean Baptiste Perrin, 1870 - 1942 年)。佩兰当时很有声望，1926年，也就是这个事情发生后不久，因为他在布朗运动方面的实验研究让人们物质世界不连续性深入的认识被授予诺贝尔物理奖（获奖词是：for his work on the discontinuous structure of matter, and especially for his discovery of sedimentation equilibrium）。考虑到这些工作与统计和随机性相关，我们略显莽撞地感慨一句：或许从事这方面研究的人更容易接受量子理论。

样一个思想，并讨论了相位与粒子运动的关系。在第二篇文章中，他以《光学 - 光量子、衍射与干涉》为题，讨论了如何通过实验来验证这一思想？在第三篇文章中，他以《量子气体运动理论以及费马原理》为题，讨论了相位谐振条件与稳定轨道之间的关系。这种物质波的思想很快被应用到人们关于电子的研究中，最终为其赢得了 1929 年的诺贝尔物理奖³²⁶。

作为一个兼顾专业性与科普性的通识教材，我们这里想强度路易斯的创新性思想的提出是具有一定的必然性的。我们可以讨论一下当时的历史背景。应该说，二象性 (duality) 在 20 世纪初是一个热点话题。在光子的粒子性方面，1905 年，爱因斯坦在光电效应的研究中就利用光的粒子性解释了赫兹、康纳德的实验观测。在文献【郭奕玲、沈慧君，2005】的 8.3 节，郭奕玲、沈慧君两位老师提到“莫里斯·德布罗意曾负责整理 1911 年的索尔维会议文件，路易斯·德布罗意从这个文件大受启发”。1911 年是第一届索尔维会议，爱因斯坦和能斯特是主要召集人。实际上，我们前面提到爱因斯坦在 1905 年关于光电效应的文章中提出了光量子的概念，1911 年的索尔维会议期间，这是一个重要话题。爱因斯坦更是进一步将这个解释为光的波粒二象性 (Duality)【Einstein, 1905a】。这是一个极其重大的概念层面的进步。从这点来看，路易斯从这里受到启发就非常合理了。

同时，郭奕玲、沈慧君两位老师还提到莫里斯·德布罗意的研究方向是 X 射线。他和威廉·劳伦斯·布拉格 (William Lawrence Bragg, 1890 - 1971 年) 关系

³²⁶ 获奖词就是：for his discovery of the wave nature of electrons。与这个诺奖相关，1937 年，诺贝尔物理奖颁给了戴维森 (Clinton Joseph Davisson, 1881 - 1958 年) 和 G. P. 汤姆孙 (George Paget Thomson, 1892 - 1975 年，他也是 J.J. 汤姆孙的儿子)，以表彰他们对路易斯·德布罗意的理论实验验证。他们的获奖词是：for their experimental discovery of the diffraction of electrons by crystals。

密切³²⁷。威廉认为 X 射线也具有粒子性。这对莫里斯和路易斯也都有影响。最后, 1923 年, 美国物理学家康普顿在《物理评论》(<Phys. Rev.>) 上发表了关于 X 射线散射的工作, 用光量子假说以及光子的粒子性为其观测到的现象进行了理论解释, 将人们关于波粒二象性的讨论带到了一个新的高潮【Compton, 1923】。

在电子的波动性方面, 相对于光的粒子性, 人们思考的貌似少一些。但法国物理学家布里渊 (Louis Marcel Brillouin, 1854 – 1948 年) 之前曾对玻尔模型中的量子化条件的理论基础进行过研究, 他把电子当作驻波并基于驻波来解释量子化条件。这无疑也是路易斯工作的一个思想基础。

作为以上思考的一个结果, 路易斯将二象性的概念彻底应用于电子运动状态的描述中。参考爱因斯坦光量子的概念, 他认为描述电子粒子性的能量与描述其波动性的频率之间存在如下关系:

$$E = h\nu$$

公式 8.41

在一维系统中, 参考狭义相对论, 一个平面波的频率 ν 与波长形成一个二维矢量 $(\nu, 1/\lambda)$; 一个粒子的能量 E 与动量 p 形成一个二维矢量 (E, p) 。这样的话, 公式 8.41 给出的是粒子的特征 E 与波的特征频率 ν 之间的关系。类似的, 粒子的特征动量与波的特征波长之间也应该存在:

$$p = h/\lambda$$

公式 8.42

这两个公式 (即公式 8.41 与 8.42) 被称为德布罗意公式, 后面在关于薛定谔方程的讨论中会反复用到。它们的共同点是: 左边与粒子性有关, 右边与波动性有关。

³²⁷威廉·劳伦斯·布拉格和他的父亲威廉·亨利·布拉格 (William Henry Bragg, 1862 – 1942 年) 与 1915 年因为 X 射线衍射在晶体结构中的研究共同获得了诺贝尔物理奖。他们的获奖词是: for their services in the analysis of crystal structure by means of X-rays。

它们合在一起，联系起来了像电子这样的微观粒子的波粒二象性。这是继光子之后人们认识到的第二种具有波粒二象性的粒子。随着量子力学的建立，人们也意识到这个性质适用于所有的微观粒子，基于这种全新的“运动学”对微观粒子的描述所建立起来的量子力学同样也适用于所用的微观粒子。

回到路易斯的工作，对于孤立原子核外电子，德布罗意波长在埃的量级，因此我们很难感受到。但既是这样，只要我们假设核外电子轨道的周长满足：

$$2\pi r = n\lambda$$

公式 8.43

这样的量子化条件，再把公式 8.43 右边的 λ 移到公式的左边，并将 $1/\lambda$ 通过公式 8.42 用 p 替换，公式 8.43 就可以等价于：

$$L = rp = nh/2\pi$$

公式 8.44

这个玻尔氢原子模型中的角动量量子化条件（公式 8.32）。因此，这个思想是可以用来为玻尔的氢原子模型提供解释的。这也是路易斯·德布罗意的第三篇文章的一个主要内容【de Broglie, 1923c】。

除此之外，路易斯也提供了一些检验这个思想的实验构想，主要是衍射和干涉【de Broglie, 1923b】。实际上，比他提出电子波的概念还要早一些，1921 年，美国物理学家戴维森（Clinton Joseph Davisson, 1881 – 1958 年）和他的助手孔斯曼（Charles Henry Kunsman, 1890 – 1970 年）在利用电子束轰击镍靶的时候，就发现反射回来的电子有奇怪的角度分布【Davisson, 1921】。这个实验结果里面有电子衍射的影子，但在当时，这个实验背后的物理是非常不清楚的。

在将这个最初的实验和最终的实验联系起来的过程中，理论物理学家是发挥了重要的作用的。首先，这个结果引起了玻恩的注意。当时的德国，有个叫做

Naturwissenschaften 的杂志³²⁸，里面有个叫做“信件与初步沟通 (Zuschriften und vorläufige Mitteilungen)”的栏目。人们经常在上面发表一些简短的学术观点。在这个栏目上，玻恩的学生埃尔萨塞 (Walter Maurice Elsasser, 1904 – 1991 年) 发表了一篇名为“自由电子量子力学 (Bemerkungen zur Quantenmechanik freier Elektronen)”的评论【Elsasser, 1925】。这是针对德布罗意物质波的学说的一个评论文章。在这篇文章里，埃尔萨塞明确提到了戴维森和孔斯曼的工作³²⁹。不知道是因为 Naturwissenschaften 这个杂志是德语杂志因此后面人们看的少，还是因为埃尔萨塞把戴维森与孔斯曼的文章的页码引错了，后面人们在谈及电子衍射实验的时候，对玻恩组里的这个理论贡献讲的不是太多。

当然，也有对这段历史描述比较清楚的文献，比如郭奕玲、沈慧君撰写的《物理学史》【郭奕玲、沈慧君，2005】。在这本书的第 8.4 节，除了埃尔萨塞的文章。两位老师还讲到了玻恩对电子的波动性的实验验证的更为直接的影响，具体体现在 1926 年夏天在牛津举行的一个英国科学促进会的会议。戴维森从美国也来到这里参会。会上，玻恩的报告讲到了戴维森与孔斯曼关于金属表面电子反射的实验很可能就是德布罗意波动理论中预言的电子衍射实验的验证。之后，戴维森找到玻恩进行讨论，玻恩向他介绍了薛定谔关于波动力学的新文章。这个时候，玻恩已经开始基于波动力学研究散射问题了，他的那篇著名的文章提出波函数的几率诠释以及关于散射的玻恩近似 (Born Approximation) 的文章是当年 11 月发表

³²⁸Naturwissenschaften 是德语，它英文的意思是 The Science of Nature，中文是“自然的科学”。这是 Springer 下属的一个杂志。

³²⁹但他引用的并不是戴维森和孔斯曼 1921 年的文章，而是他们 1923 年发表在 Phys. Rev. 上的另一篇文章【Davisson, 1923】，同时还把页码写错了（文献【Davisson, 1923】应该是 242 页，在文献【Elsasser, 1925】中，被作为第六篇文章引用，页码写成了 243）。

的【Born, 1926b】。1926 年夏天开会的时候，薛定谔的工作基本都已发表【薛定谔, 1926b-1926f】³³⁰。在当时的世界上，或许没有人比玻恩更能理解波函数的物理意义以及如何在实验上对电子的波动性进行验证？基于这个讨论，回到美国的戴维森重新设计了我们目前在课本上看到的戴维森 - 革末实验 (Davidson - Germer Experiment) 【Davisson, 1927a-1927b】【Davisson, 1928】。

有了量子理论的指导，1927 - 1928 年，他们的实验令人信服地证实了德布罗意的电子物质波理论【de Broglie, 1923a-1923c】。因为这个贡献，戴维森于 1937 年与 G. P. 汤姆孙 (George Paget Thomson, 1892 - 1975 年) 一起分享了诺贝尔物理奖³³¹【Thomson, 1928】。他们两个的获奖词是一样的，都是：for their experimental discovery of the diffraction of electrons by crystals。至此，笔者感觉读者对德布罗意的电子物质波的工作的产生过程及其物理意义应该会有一个比较清楚的了解了。我们的教科书中，提到戴维森和 G. P. 汤姆孙的实验的时候，对于他们为什么开着这个实验解释的不多。这是不对的！笔者是基于郭奕玲、沈慧君的书才了解到

³³⁰我们现在引文一般引英文版的文章【薛定谔, 1926a】，是 1926 年 12 月发表的。这个工作的主体思想在其之前的德文文章中都已体现【薛定谔, 1926b-1926f】。

³³¹前面提到过，这个 G. P. Thomson 是 J. J. Thomson 的儿子。应该说 1926 年在英国举行的这个会议上玻恩的报告对 G. P. Thomson 的影响比对戴维森更加直接。戴维森之前是做过类似实验的，虽然他不明白自己的结果蕴藏了电子衍射的信息。G. P. Thomson 之前根本就没有做过与这个题目相关的实验。但他从玻恩的报告中得到了启发，加上他的父亲和他从事的都是射线研究，对电子腔、真空管非常熟悉，因此很快设计实验并利用金箔看到了衍射纹【Thomson, 1928】。笔者在当年学习量子力学的时候，并不能体会玻恩在其中发挥的这些重要作用。后来，随着科研经验的积累，发现我们做的很多东西都与 he 有关。后来，在总结本书的过程中，更是深刻感受到了玻恩在量子论到量子力学的转变的过程中的贡献被我们教材忽视的程度有点过于严重了。同时，笔者也欣喜地看到近二十年，不过是国内还是国外，开始出现越来越多针对这种现象进行澄清的文章和著作【厚宇德, 2012】【孙昌璞, 2013】【厚宇德, 2017】【曹则贤, 2024】。在我国内，厚宇德老师、孙昌璞老师、曹则贤老师的贡献尤其突出。笔者对他们的很多观点是深度认同的！感兴趣的读者建议看看他们的文章【厚宇德, 2012】【孙昌璞, 2013】【厚宇德, 2017】【曹则贤, 2024】。

这段历史并进行了一些原始文献的搜集的【郭奕玲、沈慧君, 2005】。之后, 也能感觉到之前脑子里积攒的一些问题忽然开朗, 比如 1926 年玻恩为什么要用薛定谔的方法去研究散射问题? 在当时的历史环境下, 这个工作实际上是关乎量子力学的基础, 也就电子的波动性的实验验证的。这一点, 极其重要!

8.4.2 海森堡、玻恩、约当的矩阵力学

历史上, 德布罗意关于电子的物质波理论直接导致了薛定谔的波动力学的诞生。但是在波动力学诞生之前, 按照时间顺序, 矩阵力学就已经被提出的。当然, 人们很快认识到这两者的等价性³³²。有趣的是, 在现行量子力学教材中, 关于矩阵力学的介绍不多。这里有两个原因。第一个原因是在量子力学诞生的上世纪二十年代, 矩阵这个概念以及其背后的线性代数这个理论并不被多数物理学家所掌握。波动力学中的核心方程, 即薛定谔方程, 则是一个偏微分方程。这对当时的物理学家是极其友善的。从十八、十九世纪开始, 偏微分方程就已经是在物理学研究中被广泛应用的数学工具了。因此, 波动力学更容易被当时的物理学家接受。第二个原因, 也很重要且客观, 就是薛定谔方程由于在展开波函数的时候基组选取的灵活性³³³, 在实用层面确实有更好的表现! 关于这一点, 我们从玻恩研究散射问题会使用波动力学也可以看出来³³⁴。

³³²对于薛定谔方程, 如果用一组基来展开波函数的话, 就会得到一个矩阵方程。现在, 人们也都是利用波动力学, 取一组基, 建立一个矩阵方程来解量子力学的问题的。

³³³矩阵力学直接就以定态(本征态)为基来展开讨论了, 而这个定态(本征态), 是人们最后需要的东西。这就造成了矩阵力学虽然能够说明量子力学的本质, 但确实没有波动力学实用。

³³⁴要知道他可是矩阵力学的创始人啊, 海森堡甚至还因为这个事情对他有很大意见。

因为上述原因, 目前我们的量子力学教材都会习惯于对矩阵力学仅就其历史非常简单地介绍一下, 然后将主要精力放到薛定谔方程上。本书中, 本着把教材写得尽量有特色一点, 同时也尊重历史上矩阵力学确实对于量子力学的发展是至关重要的这样一个事实³³⁵, 在介绍完德布罗意关于电子的物质波理论之后, 我们还是先从矩阵力学讲起, 说说它是怎么构建的³³⁶? 有一点非常明确, 我们需要先点明: 矩阵力学的建立是本着构造“量子力学 (Quantum Mechanics)”而不是“量子理论 (Quantum Theory)”的目的进行的【Born, 2024】【Heisenberg, 2025】。为了讲这个先解释清楚, 我们必须先从“量子力学”诞生的时代背景说起。

这个时代背景可大致总结如下: 从 1900 年开始到上世纪二十年代初, 人们已经把“能量不连续”这种在经典物理学中看起来非常反常识的事情当作量子理论中的常识开始接受了。人们也一定程度上接受了波粒二象性 (Duality, 当然早期主要针对的还是光子, 直到德布罗意的出现)。借助这样的处理, 人们可以理解很多实验现象 (比如光电效应、固体与分子的热容在低温下的行为、氢原子光谱)。在理论层面, 类似爱因斯坦模型、德拜模型、玻尔模型也取得了巨大的成功。但这种成功, 却存在着极大的局限性!

以针对原子光谱建立的玻尔模型为例, 严格意义上, 它仅仅可以解释氢原子的能级以及氢原子中人们观测到的斯塔克效应 (Stark Effect, 指的是原子中光谱的位置会随着电场发生变化的效应)。在除了氢原子以外的其它一系列量子理论必须占据主导地位的物理问题中, 玻尔模型并不适用! 同时, 我们也需要认识到

³³⁵ 毕竟诺奖委员会的物理奖是先奖励了海森堡, 再奖励了薛定谔与狄拉克的。在海森堡 1932 年得奖以前, 爱因斯坦在 1928 年也是曾提名他与玻恩、约当以矩阵力学为理由得奖的。这都早于波动力学受到认可。

³³⁶ 至少笔者当年在学习量子力学的时候一直有这个困惑。

在以玻尔模型为代表的一系列原子模型中，能量的“量子化”都是作为假设直接出现的。这种能量的“量子化”被当作“原因”去解释实验结果。在理论内部，它们没有基于更基本的力学原理来支撑。从“第一性原理的”物理学理论的角度，这是不能被接受的！换句话说，我们可以认为：成熟的物理学要求它们被更基础的理论解释。在物理学的传统中，这种更基础的理论无疑需要以“力学”的形式存在。也正是因为这个原因，玻恩于 1924 年在 Zeitschrift für Physik 上以 Über Quantenmechanik（关于量子力学）为题撰写了一篇讨论量子理论的论文【Born, 1924】，呼吁人们抛弃玻尔模型，寻求量子理论的力学形式。这是大师级的呼吁！这种努力也直接导致了量子力学的诞生。

历史上，量子力学的诞生是通过两条路径实现的。首先是矩阵力学，它由海森堡、玻恩、约当一起完成【Heisenberg, 1925】【Born, 1925】【Born, 1926a】，时间节点是 1925 年到 1926 年。其最初的开创性想法，是由海森堡在 1925 年提出的【Heisenberg, 1925】。之后，1926 年的两篇文章（一篇是玻恩与约当合写，另一篇是玻恩、海森堡、约当合写）为这个想法提供了数学解释进而使其成为成熟的力学理论【Born, 1925】【Born, 1926a】。其次，是波动力学，它由薛定谔提出并独自完成的【Schrödinger, 1926a–1926f】。应该说，德布罗意关于电子的物质波的概念是薛定谔的波动力学得以产生的直接诱因。薛定谔的所有关键文章都是在 1926 年发表的【Schrödinger, 1926a–1926f】。这个时候，因为矩阵力学已经存在，人们需要理解这两者之间的关系。为此，薛定谔、埃卡特 (Carl Henry Eckart, 1902 – 1973 年) 分别证明了它们的等价性【Schrödinger, 1926g】【Eckart, 1926a–

1926b】³³⁷。1927 年，狄拉克和约当又分别建立了表象变换理论【Dirac, 1927】
【Jordan, 1927】。在这种表象变换理论下，矩阵力学与波动力学可以实现简洁明了的统一。

矩阵力学的理论框架是由三篇文章构成的：海森堡的一人文章【Heisenberg, 1925】、玻恩与约当的两人文章【Born, 1925】、玻恩、海森堡、约当的三人文章【Born, 1926a】。其中，在一人文章中，海森堡明确指出人们应该基于物理学可观测来构建物理学理论。这个思想具有深刻的哲学内涵，其中有康德的“现象界”这样的哲学概念的影子。

如果想详细了解这些物理内容，读者可以结合多个文献，比如【Van der Waerden, 1968】【Aitchison, 2004】【吴从军, 2024】【Bernstein, 2005】，来进行阅读。同时，笔者也非常推荐陈童老师写的《初始量子力学》与《量子力学新讲》³³⁸！就这书的写作而言，笔者知道想要用一个小节把这个问题说清楚很难，但还是希望挑战一下³³⁹。至少，笔者希望能够给愿意学习物理的本科生提供一个导读，在他/她开始量子力学的学习之前，知道其历史脉络与主要物理思想。

本着这样一个原则，笔者会先讲一下矩阵力学的几篇文章的关键思想。这部

³³⁷这里，我们多讲一句。从薛定谔在证明两种力学的等价性的文章【Schrödinger, 1926g】的题目“Über das Verhältnis der Heisenberg-Born-Jordanschen Quantenmechanik zu der meinem（关于海森堡-玻恩-约当的力学和我的力学的关系）”，我们应该也可以看到薛定谔将这个理论命名为“矩阵力学”而非“海森堡力学”，这是非常准确的。实际上，1928 年爱因斯坦也曾提名海森堡、玻恩、约当三人为诺贝尔物理奖候选人，推荐理由也是矩阵力学。因此，矩阵力学不能被简单粗暴地称为海森堡的矩阵力学。当然，海森堡迈出了关键的一步。但它能够成为一个完整的力学理论，另外两个人的贡献是不应该被忽视的！

³³⁸陈老师的教材还在准备出版的过程中，应该很快可以由北大出版社出版。出版前，感兴趣的读者暂时可以到 <https://newquanta.com/> 查看。在这里列的这些文献中，笔者认为陈童老师的教材是最详细的。

³³⁹包括 8.4.3 节，在讲薛定谔的波动方程的时候，笔者也会进行同样的操作。

分相对简单（没什么公式）。之后，再针对第一篇文章，用最简单的公式来解释海森堡是怎么用矩阵力学来描述简谐振子的问题的？这个任务相对难一些（公式多一点）。客观上讲，简谐振子的问题虽然简单，却是一个奠定矩阵力学历史地位的问题！在海森堡把这个问题解决之前，能量的量子化不过是一个量子理论中的假设（比如普朗克关于黑体辐射的工作、爱因斯坦关于光量子与固体热容的工作、玻尔原子模型，量子化都是按假设引入的）。有了海森堡的这个工作，能量的量子化就开始拥有了力学的基础。之后，经过玻恩、约当和海森堡三人的共同努力，这个方法才能够以一个完整的力学理论的形式出现。1926 年，泡利又将矩阵力学应用与氢原子体系，并解释了氢原子光谱【Pauli, 1926】。矩阵力学宣告完成。

我们先从海森堡的一篇文章说起。它的题目叫做“Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen”，英文对应“On the quantum reinterpretation of kinematical and mechanical relationships”。这篇文章的核心意思，就是从“quantum(量子)”的角度，对微观粒子的“kinematical and mechanical relationships (运动学与力学关系)”进行“reinterpretation (重新解读)”。这里，海森堡提倡应该抛弃玻尔模型中电子经典轨道的概念，把坐标、动量这些经典力学理论中的物理量基于玻尔提出的“定态”与“定态跃迁”的概念进行重新描述。

换句话说来讲，他不认为电子绕原子核的运动应该用轨道来进行描述，而是应该基于玻尔所建立的“定态”与“定态跃迁”的概念，用一种“复杂一些的数学形式”来描述。这是“kinematical (运动学的)”这个词出现在这个文章题目中的原因。除了“运动学”这个关键点，“定态”与“定态跃迁”这两个概念同样重要。在海森堡看来，只有“定态跃迁”是可观测的，它们可以在原子光谱中得到

体现。因此，他需要基于“定态跃迁”重新描述位置与动量这些力学中的关键力学量。在进行完了这种关于运动（在题目中体现在 kinematical 这个词上）的描述之后，他又利用 Correspondence Principle（对应性原理），把这种运动的新的描述形式代入经典的力学方程（比如带点粒子进行简谐振动进而辐射能量的运动方程）。这样，经典的力学方程就有了其“量子”的表述形式。这是“mechanical（力学的）”这个词出现在其题目中的原因。“kinematical”和“mechanical”两个要素合在一起，他就为经典力学建立了一个量子力学的表述。这个描述是围绕他对电子运动的“kinematical and mechanical relationships（运动学与力学关系）”的理解展开的！

利用这样的“量子”的运动方程，海森堡研究了简谐振子与非简谐的运动。在简谐振子这个问题中，他得到了等间距的量子化的能量。这与普朗克在黑体辐射的理论模型中所采取的那个假设是一致的，唯一多出来的东西是我们现在知道的“零点能”。这个当然也是新的、重要的物理。在关于非简谐振子的研究中，在所谓的经典极限下，海森堡的解给出的结果与经典的运动方程的解又是一致的。所有这些，都预示着这个“新的、量子力学理论”的即将诞生！

在这篇文章结束的时候，海森堡承认“whether this method after all represents far too rough an approach to the physical program of constructing a theoretical quantum mechanics, an obviously very involved problem at the moment, can be decided only by a more intensive mathematical investigation of the method which has been very superficially employed here（翻译）”。换句话说，海森堡自己也认为这篇文章中的这个理论仅仅是一个初步尝试的。它需要一个严格的数学基础！在将其发展为一个严格的数学理论的过程中，玻恩扮演了一个非常重要的角色。

简单来讲的话，玻恩是第一个意识到“海森堡所采用的复杂的数学形式表述的力学量实际上就是一个矩阵表述”的人。同时，他也认识到“海森堡在对这些力学量进行乘法运算的时候，采用的也是矩阵乘法的规则”。在文献【Born, 1978】的第 217 - 218 页，玻恩有这样一段描述：“After having sent Heisenberg’s paper to the Zeitschrift für Physik for publication³⁴⁰, I began to ponder about his symbolic multiplication, and was soon so involved in it... For I felt there was something fundamental behind it... And one morning, about 10 July 1925, I suddenly saw the light: Heisenberg’s symbolic multiplication was nothing but the matrix calculus, well known to me since my student days from the lectures of Rosanes in Breslau”。这里的 Rosanes 是雅可比·罗萨内斯 (Jakob Rosanes, 1842 - 1922 年)。他是玻恩在 Breslau (布雷斯劳) 读大学前两年的课程的时候遇到的数学教授，当时玻恩经常选他的课³⁴¹。很显然，在玻恩刚开始上大学的时候，他就从罗萨内斯那里学到了关于矩阵的知识。在第五章，我们强调过虽然线性代数和矩阵是我们现在大学的理工科教育中最基础的课程，但是在上世纪初，物理学家中知道这些概念的人是很少的。毫无

³⁴⁰我们需要注意的是矩阵力学的全部三篇文章，作者的署名单位都是哥廷根大学。换句话说，在量子力学的第一个表述形式的产生过程中，我们应该强调的是“哥廷根”而非“哥本哈根”。但很遗憾，直到现在人们一说到这些，总还是在说哥本哈根。笔者不否认哥本哈根的贡献，但反对很多媒体长久以来对这个问题的错误引导，并真心希望我们的从业人员能够更多地去查看原始文献来理解和宣传我们的学科！

³⁴¹前面我们在讲基尔霍夫的时候提到过，布雷斯劳 (Breslau) 是东普鲁士的一个城市，现在属于波兰，叫弗罗茨瓦夫 Wrocław。在十九世纪，布雷斯劳有个很好的大学。玻恩的父亲是这所大学的一个生物学教授。按照玻恩的说法，他的父亲在学术上并没有达到一个很高的水平，但也是这所学校的一个教授。玻恩的大学教育是从这里开始的。19 世纪末，德国 (即普鲁士) 的一些大学的课程是相互承认的。因此，玻恩在布雷斯劳完成了前两年的基础课后，来到哥廷根继续学习。哥廷根也成为了他人生最重要的舞台。在布雷斯劳，罗萨内斯的课对玻恩产生了非常深刻的影响，他们也建立了很好的私人关系。在玻恩的诺奖发言稿中，他也特别感谢了罗萨内斯。

疑问，玻恩对矩阵力学的贡献得益于他在这个方面的数学知识的储备³⁴²。

基于上述理解，玻恩告诉海森堡他对坐标、动量的新的描述方式以及他在那里所依赖的运算规则就是当时在数学上已经成熟的矩阵理论。之后，考虑到海森堡本人在当时并不懂矩阵，玻恩邀请泡利来共同完成一篇文章，为海森堡的一篇文章建立一个严格的数学表示³⁴³。但很遗憾的是泡利并没有意识到这个工作的重要性，因此拒绝了这个邀请³⁴⁴。最终，玻恩邀请自己的学生约当一起完成了这个工作。在玻恩与约当两人合作的文章中，他们将坐标 x 、动量 p 进行了算符的表达（写作 $\hat{x}$ 、 $\hat{p}$ ），并给出了著名的不对易关系：

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i \frac{h}{2\pi} = i\hbar$$

公式 8.45

为了后续讨论方便，我们在这个公式中直接引入了“约化”普朗克常数 $\hbar$ ，它和普朗克常数 h 差一个 2π 。历史上，它是由狄拉克在稍后引入的。

公式 8.45 将力学量的矩阵表达、量子力学所特有的力学量之间的不对易性

³⁴²这里我们再强调一下玻恩的博士是数学博士，导师是龙格（Carl David Tolmé Runge, 1856—1927 年），SO(4)对称群中 Laplace-Runge-Lenz 守恒量中的那个 Runge。这个数学基础，也是他能够在量子论到量子力学的变革中成为一个领导者的最主要的原因。

³⁴³泡利因为之前已经从事了很长时间关于自旋的研究，当时对矩阵理论已经比较熟悉了。而泡利在从索末菲那里毕业后，也当过玻恩的助手（实际上海森堡就是在泡利离开后接替泡利成为玻恩的助手的）。因此，玻恩首先想到了他。由于泡利的拒绝，玻恩不得已让自己的学生约当来完成这个任务。这个合作，实际上体现了理论物理研究中的两个能力。一是对数学技巧的掌握。这一点在我们的教育实际上是足够强调的，我们的很多学生也有比较好的能力。第二点，是对数学学科各个模块的意义的整体认识以及如何让它们在物理学研究中发挥作用。这一点实际上我们的教育强调的不多。笔者在本书中，多处强调了这个能力。玻恩，应该说在这一点上，是大师级的。哥廷根的物理学派的发展，很大程度上也得益于他的这种能力。他的学生与助手后期也都有很好的发展，这与玻恩的这个能力，是密切相关的！

³⁴⁴实际上这并不是泡利唯一一次错过重大的物理学成果。在后面我们讲到自旋的时候，还有一个例子。他比较追求完美，但实际上物理学的原创性成果第一次出现的时候，很难完美。

与量子理论中的关键量普朗克常数建立了最直接的联系。和力学量的矩阵表达、量子的运动方程一样，它在量子力学的理论体系中也占据了核心的位置。遗憾的是，人们很多时候把它称为海森堡不对易关系³⁴⁵。而这个文章海森堡根本就没有参与。

玻恩与约当的两人文章的完成时间是 1925 年下半年。这个时候，薛定谔的波动力学的工作还没有发表。两人文章后，玻恩、海森堡、约当三人又一起在前两篇文章的基础上，对矩阵力学进行了进一步的发展。这个三人文章的发表，就是在薛定谔的波动力学第一篇文章发表之后了。我们课本上呈现的量子力学的诸多关键知识点，比如力学量需要用厄密矩阵表达、力学量的对易与不对易背后的物理、微扰论，通过矩阵力学的三篇文章，基本就定型了。1926 年，泡利又利用这个理论计算了氢原子系统，得到了与实验符合的光谱结果【Pauli, 1926】。矩阵力学完成。

因为这些工作，1932 年，海森堡独自获得了诺贝尔物理奖。他的获奖词：for the creation of quantum mechanics, the application of which has, inter alia, led to the discovery of the allotropic forms of hydrogen。实际上，1928 年，爱因斯坦就曾提名海森堡、玻恩、约当三人为诺贝尔物理奖的候选人。但在当时，量子力学理论的影响还没有出来（虽然量子理论已经被人们接受，但这种新的“量子力学”理论的影响还没有彻底出来），诺奖委员会本着慎重的原则并没有接受这个提名。1928 年的诺贝尔物理奖本身甚至都空缺，直到 1929 年补给了欧文·瑞查德森（Owen Willans Richardson, 1879 – 1959 年），以表彰其在热电子研究中的贡献（这与量子

³⁴⁵海森堡在他的一人文章中，意识到了 x 和 p 进行“量子的表达”，也就是后面我们认识到的“矩阵表达”后，应该不对易。但在它们的差到底等于什么这个关键的问题上，并没有给出答案。这个答案（公式 8.45）是玻恩、约当在他们的两人文章中给出的。

力学无关)³⁴⁶。应该说这个奖相对于量子力学中的那些成就，就其物理内涵的基础性而言肯定是逊色的。

在这些概念性的解释的最后，我们用一段话来强调矩阵力学对于物理学的意义。这是人们首次不再基于一个简单粗暴的假设，而是利用一个力学的运动方程，得到量子化的能量。一定程度上，我们可以把普朗克在研究黑体辐射时引入能量分立这个假设当作是量子论的标志，而将海森堡在这里实现谐振子的能量量子化以及他与玻恩、约当共同建立的矩阵力学当作是量子力学诞生的标志，来理解1900-1926年整个量子理论（包括早期的量子论与后期成熟的量子力学）的发展。

从矩阵力学的建立开始，人类关于量子现象的理解与认识进入了一个新的纪元！

在令人兴奋的描述性的内容讲解完毕后，笔者出于一个从事物理学研究的老师的职业本能，还是希望用一些简单的数学公式来展示一下这些物理学的思想在数学上的美。我们会借助矩阵力学早期的三篇文章中的内容，将其进行一定程度的友善化，并将着手点落在：为什么在一个简谐势中振荡的带点粒子发出的能量是分立的？这也是对上面的一段中我们在对矩阵力学的意义进行总结时讲的那一句“这是人们首次不是基于一个简单粗暴的假设，而是基于一个力学的运动方程，得到量子化的能量”的一个回应。

就物理思想而言，我们想强调矩阵力学的基础就是我们在前面介绍的海森堡对“运动学”的新的理解。他认为轨道并不是物理学可观测量，“定态跃迁”才是，它对应实际光谱。而“定态跃迁”是基于“定态”这样一个概念的。因此，不管是位置 x 、还是动量 p ，都应该基于“定态”和“定态跃迁”进行一个重新表

³⁴⁶他的获奖词是：for his work on the thermionic phenomenon and especially for the discovery of the law named after him。

达³⁴⁷。具体而言，对于一个在一维简谐势阱中运动的带电粒子，它的经典描述与量子描述存在质的不同（图 8.15）。在经典的世界中，我们可以如图 8.15a 那样按照位置、动量来描述运动状态。这里位置 x 和动量 p 在任何一个时刻都是一组实数，他们可以被观测。但是在量子的世界中，因为这些量根本就不是可观测量，那么物理学作为描述“现象界”的科学，就必须基于图 8.15b 中用紫色箭头描述的带电粒子在其“定态”之间的跃迁来进行描述。这个“定态跃迁”，是可观测的。因此，它才是一个物理学理论应该描述的内容。

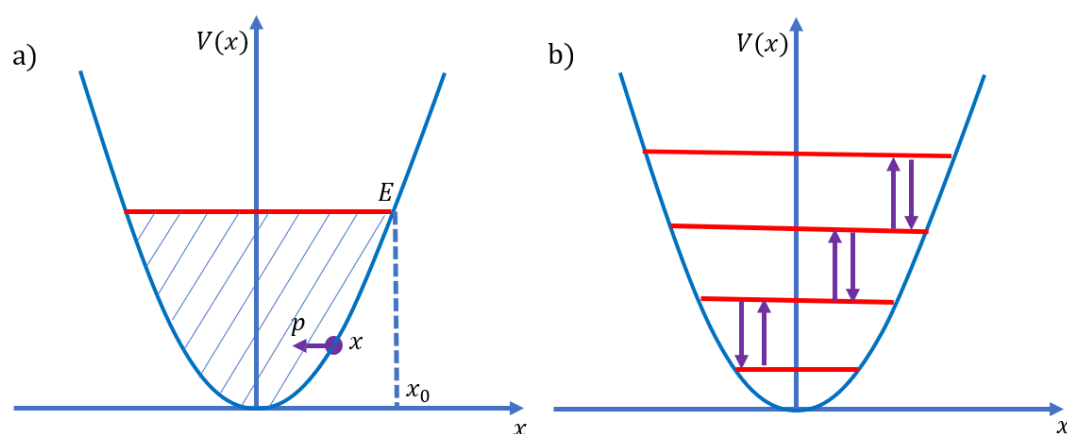


图 8.15 简谐势阱中带电例子运动示意图，我们强调的是经典世界与量子世界的不同。简谐势的弹簧是同一个弹簧，因此势能函数 $V(x)$ 相同。在经典的世界中（左边图 a），我可以任意的把弹簧拉到要给特定的位置 x_0 。这个时候动能为零，势能为 E ，系统总能量也是 E 。松手后，粒子开始做简谐振荡，动能势能不停转换，红线一下的阴影区域都是粒子可以触及的区域。粒子运动（the kinematics of the particle），是可以通过这个图像（左边图 a）来描述的。在量子的世界中（右边图 b），弹簧的弹性系数只决定能级与激发。唯一的可观测量是系统在不同定态（本征态，红色水平线）之间的跃迁，这又紫色箭头标记。海森堡正是认识到了量子世界与经典世界这个不同，才开始将任何可以观测的力学量（包括坐标、动量）基于跃迁来描述（紫色箭头），进而完成了 1925 年那篇最重要的工作。

³⁴⁷ 这里，和很多地方的讨论一样，我们选取一维系统为例。当这个简单系统的规则清楚后，往高维系统的推广是直接的。

因此，在一篇文章中，海森堡提出位置、动量不应该基于轨道描述，而应该基于“两个定态的差”进行描述。这是因为两个定态之间的能量差是物理学上的可观测量。以位置为例，在这个表述下其具体形式（经玻恩、约当整理后）可写为：

$$[\hat{x}]_{nm} = [\hat{x}_0]_{nm} e^{-i\omega_{nm}t} \quad \text{公式 8.46}$$

其中， $[\hat{x}_0]_{nm}$ 为振动的振幅³⁴⁸。这里， ω_{nm} 乘上 $\hbar$ 对应的就是图 8.15b 中水平红线的能量差。在 1925 年海森堡的一篇文章发表的时间节点，爱因斯坦关于定态跃迁与自发辐射、受激辐射之间的关系的那篇奠定激光原理的文章已经在 1917 年发表【Einstein, 1917】。因此，海森堡知道公式 8.46 中的跃迁是可以从低能级到高能级，也可以从高能级到低能级的。换句话说， ω_{nm} 的两个下标 n 、 m 对应的就是定态。

同时，海森堡还注意到 $e^{-i\omega_{nm}t} = [e^{-i\omega_{mn}t}]^*$ 。因此，他进一步规定：

$$[\hat{x}_0]_{nm} = [\hat{x}_0]_{mn}^* \quad \text{公式 8.47}$$

这样就有：

$$[\hat{x}]_{nm} = [\hat{x}]_{mn}^* \quad \text{公式 8.48}$$

与位置算符对应，动量也可以表现为一个算符，形式为：

$$[\hat{p}]_{nm} = [\hat{p}_0]_{nm} e^{-i\omega_{nm}t} \quad \text{公式 8.49}$$

这里，类比公式 8.46， $[\hat{p}_0]_{nm}$ 是动量算符的振幅。而且， $[\hat{p}_0]_{nm}$ 、 $[\hat{p}]_{nm}$ 也具有类

³⁴⁸但这个振幅大家不要认为是实数，量子力学至始至终都是用复数来表达的力学理论。

似公式 8.47、公式 8.48 的性质。这样的算符被称为厄米算符。在量子力学中，所有的力学量都是厄米算符。很显然，只要基于使用公式 8.46-8.49 对应的运动学描述，再基于一个经典力学中的运动方程根据对应性原理进行量子对应解决之前的量子论存在的一些问题，这套将“力学量”基于“可观测量（光谱）”进行运动学描述（Kinematical Description）的力学理论（Mechanical Theory）就成功了。

应该说，在量子论存在的被矩阵力学（其三篇文章）解决的问题有不少。从阅读友善的角度，我们选择比较有代表性的两个进行逐一攻破：1）定态为什么会稳定玻尔并没有给出解释（在玻尔的理论中，那是一个“假设”）；2）一个量子的系统的能量为什么会分立普朗克也没有给出解释（他那里也是能量分立假设）。海森堡在 1925 年的文章中，针对这两个问题，均给出了解释。这里，我们以图 8.15 中简谐振子为例，来进行说明。

我们可以先看“定态稳定问题”。这个问题只需将公式 8.46 通过对应性原理用于经典电动力学的电磁辐射方程即可解决³⁴⁹。经典电动力学告诉我们一个加速运动的电子会辐射电磁波，致使我们无法在玻尔的原子模型中将电子轨道理解为电子绕原子核的圆周运动。玻尔提出了“定态假设”在一定程度上解决了这个问题，但那就是一个假设。在矩阵力学中，“定态”会成为结果。这是因为当一个电子加速运动时，它对外进行电磁辐射的功率 P 对应的算符等于：

$$\hat{P} = \frac{e^2}{3\pi\epsilon_0 c^3} |\ddot{x}|^2$$

公式 8.50

这里我们出于简单的考虑使用一维系统， $|x|$ 维电子的加速度，前面的系数都是数学常数或物理学常数。如果用轨道，从公式 8.50 可以看出只要有加速度就有辐

³⁴⁹当然，在 1925 年，这种处理还没被称作对应性原理。

射，轨道就不会稳定。但是在海森堡所建立的运动学表述中，将公式 8.46 代入公式 8.50，我们却可以得到如下性质：

$$[\hat{P}]_{nm} = \frac{e^2 \omega_{nm}^4}{3\pi\epsilon_0 c^3} |[\hat{x}]_{nm}|^2$$

公式 8.51

这里，

$$[\hat{x}]_{nm} = \sum_l [\hat{x}]_{nl} [\hat{x}]_{lm}$$

公式 8.52

因为力学量由矩阵描述而矩阵的乘法满足此规则。对于 $n \rightarrow n$ 这样的跃迁，其辐射功率由于 $\omega_{nn} = (E_n - E_n)/\hbar = 0$ ，自然为零。这样，定态稳定性的问题就得到了解决，因为当系统只处在 n （也就是跃迁都是 $n \rightarrow n$ ）的时候，辐射功率会根据公式 8.51 直接为零。

下一步，我们需要做的，是要理解电子是如何从一个定态到另一个定态进行跃迁进而产生原子光谱？前面提到过，对于氢原子中的情况，是由泡利在 1926 年利用矩阵力学解决的【Pauli, 1926】。这个工作宣誓了矩阵力学的成功。在海森堡的文章中，他处理的是如图 8.15 那样的简单力学系统。考虑到原子只是数学形式更复杂，其物理思想在这个简谐振子体系基本都已经包括，我们将注意力集中在图 8.15 中的能量为什么可以分立？为了得到这个结论，在逻辑上，我们需要走三步。这三步是笔者从东华理工大学陈童老师在网上分享的讲义《初识量子力学》的第一章《矩阵革命》中看到的。这里，在征得陈老师同意后，分享一下。

我们需要先得到力学量矩阵的运动方程，再建立位置、动量的不对易关系。之后，利用这个不对易关系得到谐振子的分立的能量。需要指出的是矩阵运动方程和不对易关系在海森堡的一人文章中都没有出现，它们都是在玻恩、约当的两

人文章中被第一次提到的（图 8.16，玻恩的墓志铭甚至就是我们说的“海森堡”不对易关系）。下面，我们就按照陈童老师讲义中的逻辑，按矩阵运动方程、不对易关系、谐振子能量量子化三步，来解释这个量子力学中的关键成就。



图 8.16 玻恩的墓，上面刻有位置和动量的不对易关系。该图取自维基百科。

先看运动方程。海森堡在他的一人文章中引入了一个“用两个指标来描述位置、动量，进而进行乘法运算”的计算规则。那两个指标，对应的都是定态。很快，玻恩就意识到海森堡所建立的乘法规则也是矩阵乘法规则，这在十九世纪中叶就已经出现了。这样的话，参考公式 8.46 与公式 8.49，哈密顿量同样可以进行下面这样一个表达：

$$[\hat{H}]_{nm} = [\hat{H}_0]_{nm} e^{-i\omega_{nm}t}$$

公式 8.53

写成矩阵的形式的话，它就等于：

$$\hat{H} = \begin{bmatrix} [\hat{H}_0]_{11} & [\hat{H}_0]_{12} e^{-i\omega_{12}t} & \dots \\ [\hat{H}_0]_{21} e^{-i\omega_{21}t} & [\hat{H}_0]_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

公式 8.54

这里对角线没有 e 指数是因为 $\omega_{nn} = (E_n - E_n)/\hbar = 0$ ，非对角项按照与公式 8.46

（位置）、公式 8.49（动量）对比得到的公式 8.54（哈密顿量），是有时间依赖的。

下面,我们要使用到一个从经典力学中的封闭力学系统来的假设:能量守恒。这个假设在经典力学中以一个定律的形式出现,来自于经验的总结。按照康德的语言,它属于先天经验判断(虽然来自于经验,但在物理学一个理论体系中,可以被认为是普适的)。通过对应性原理,我们可以理解为在公式 8.54 中所有非对角项的 $[\hat{H}_0]_{nm}$ 必然为零,因为只有这样才能保证系统哈密顿量不随时变化。按照诺特的语言,时间平移对称性对应能量守恒,说的也是同样的道理。这样,哈密顿量就可以简化为对角矩阵的形式。同时,在海森堡的规则中, n 、 m 对应的都是定态。这样,对角项 $[\hat{H}_0]_{nn}$ 最自然的形式就是定态的能量 E_n 。因此,公式 8.54 可简化为:

$$\hat{H} = \begin{bmatrix} E_1 & 0 & \dots \\ 0 & E_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

公式 8.55

当然,我们强调这里是用定态的 n 、 m 作为指标来对行列式的行、列进行标识。如果不用定态而用一般的一组基函数,公式 8.55 并不是对角矩阵。当然,定态也是矩阵力学的三篇文章的选择。需要说明的是对于最后得到的运动方程,它在基组变化下是不变的,因为基组的变换对应一个矩阵的相似变换,而运动方程对相似变换不变。我们这里先基于定态,理解运动方程。

现在,基于公式 8.55,我们就可以来推导任何一个力学量算符的求法。同样,类比公式 8.46 (位置)、公式 8.49 (动量),这个力学量可写作:

$$[\hat{A}]_{nm} = [\hat{A}_0]_{nm} e^{-i\omega_{nm}t}$$

公式 8.56

基于这个公式,就有:

$$\frac{d}{dt} [\hat{A}]_{nm} = -i\omega_{nm} [\hat{A}]_{nm} = -i \frac{(E_m - E_n)}{\hbar} [\hat{A}]_{nm} = -\frac{i}{\hbar} ([\hat{A}]_{nm} E_m - E_n [\hat{A}]_{nm})$$

公式 8.57

这个等式如果用矩阵写出，就是：

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} [\hat{A}]_{11} & [\hat{A}]_{12} & \dots \\ [\hat{A}]_{21} & [\hat{A}]_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} [\hat{A}]_{11} E_1 & [\hat{A}]_{12} E_2 & \dots \\ [\hat{A}]_{21} E_1 & [\hat{A}]_{22} E_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} E_1 [\hat{A}]_{11} & E_1 [\hat{A}]_{12} & \dots \\ E_2 [\hat{A}]_{21} & E_2 [\hat{A}]_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} [\hat{A}]_{11} & [\hat{A}]_{12} & \dots \\ [\hat{A}]_{21} & [\hat{A}]_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 & 0 & \dots \\ 0 & E_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} E_1 & 0 & \dots \\ 0 & E_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\hat{A}]_{11} & [\hat{A}]_{12} & \dots \\ [\hat{A}]_{21} & [\hat{A}]_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \end{aligned}$$

公式 8.58

即

$$i\hbar \frac{d\hat{A}}{dt} = \hat{A}\hat{H} - \hat{H}\hat{A}$$

公式 8.59

这时，如果我们记

$$\hat{A}\hat{H} - \hat{H}\hat{A} = [\hat{A}, \hat{H}]$$

公式 8.60

就会有：

$$i\hbar \frac{d\hat{A}}{dt} = [\hat{A}, \hat{H}]$$

公式 8.61

这个方程，就是人们经常说的海森堡运动方程。它的首次出现，也是在玻恩、约当的两人文章中【Born, 1925】。

现在，第一步完成。下面我们要做的就是两步：1) 有了运动方程，我们来推不对易关系；2) 有了不对易关系，来推谐振子能量的量子化。需要说明的是我们要推的不对易关系是位置与动量的不对易关系，它的表达式是公式 8.45。换

句话说,我们要推公式 8.45。其它的力学算符之间当然也会不对易,我们先不管。

我们的目的是要知道公式 8.45 的右边为什么是 $i\hbar$?

不失一般性,我们可以先假设:

$$[\hat{x}, \hat{p}] = C$$

公式 8.62

下面,我们要理解为什么 C 等于 $i\hbar$? 在第四章我们讲到的经典力学中,我们知道

位置与动量存在如下关系:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p}{m_e}$$

公式 8.63

这个是中学的物理知识。而同时,根据前面提到的矩阵力学运动方程,我们有:

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{x}, \hat{H}] = \frac{1}{i\hbar} \left[\hat{x}, \frac{\hat{p}^2}{2m_e} + \hat{V}(\hat{x}) \right]$$

公式 8.64

由于:

$$[\hat{x}, \hat{x}] = \hat{x}\hat{x} - \hat{x}\hat{x} = 0$$

公式 8.65

而 $\hat{V}(\hat{x})$ 是 $\hat{x}$ 的函数, 所以:

$$[\hat{x}, \hat{V}(\hat{x})] = 0$$

公式 8.66

进而, 公式 8.64 可以演化为:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{x}}{dt} &= \frac{1}{i\hbar m_e} \left[\hat{x}, \frac{\hat{p}^2}{2} + \hat{V}(\hat{x}) \right] = \frac{1}{2i\hbar m_e} [\hat{x}, \hat{p}^2] = \frac{1}{2i\hbar m_e} ([\hat{x}, \hat{p}]\hat{p} + \hat{p}[\hat{x}, \hat{p}]) \\ &= \frac{1}{2i\hbar m_e} (C\hat{p} + \hat{p}C) \end{aligned}$$

公式 8.67

这样，结合公式 8.63 ($dx/dt = p/m_e$ ，与经典力学方程对应)，就有：

$$\frac{1}{2i\hbar m_e}(C\hat{p} + \hat{p}C) = \frac{\hat{p}}{m_e}$$

公式 8.68

为了达到这个效果，最简单的取法就是 $C = i\hbar$ 。这个 $C = i\hbar$ 再结合公式 8.62，就可以得到公式 8.45 那个所谓的“海森堡”不对易关系【Born, 1925】。

最后，我们利用位置与动量的不对易关系，来理解谐振子的能量量子化。对于一维谐振子，它的经典振动方程是：

$$\ddot{x} = -\omega^2 x$$

公式 8.69

按照矩阵力学版本的量子力学的习惯，可以把公式 8.46（位置算符）代入，将这个式子两边的坐标都表示为矩阵。因为两个矩阵相等则它们的每个矩阵元都相等，就有如下等式：

$$(\omega^2 - \omega_{nm}^2)[\hat{x}_0]_{nm}e^{-i\omega_{nm}t} = 0$$

公式 8.70

在这个公式中， $\omega_{nm} = (E_m - E_n)/\hbar$ 。它是由两个量子定态的能量差别决定的。 ω 是由势能的曲率决定的，对于一个特定的简谐势 $\hat{V}(\hat{x})$ ，它就是一个正实数。这也就意味着在由公式 8.69 通过对应性原理建立的量子力学中，由坐标 x 通过量子跃迁联系起来的两个定态的能量差必须满足：

$$(E_m - E_n)/\hbar = \pm\omega$$

公式 8.71

才能使公式 8.70 中的 $[\hat{x}_0]_{nm}$ 才可以不为零。

这样的话，我们可以把相互之间有跃迁的定态安排为相邻的定态（这也即使了图 8.15b 中为何跃迁都是相邻能级之前的跃迁），它们的能量差就是 $\hbar\omega$ 。图 8.15b

所示的那个定态能量等间距分布这一点就明确了。换句话说，仅仅通过 8.69 到 8.71 这几个简单的公式，普朗克的黑体辐射中的最关键的假设就有了力学理论的基础！

至此，前面费了半天力气推的不对易关系甚至还没有用上（第一步推运动方程是为了第二步推不对易关系）。我们花了半天的精力去推这个不对易关系，除了上面这条，还因为它与一个重要的量子现象相关。这个现象就是图 8.15b 蕴含的另一个重要信息：即使在基态，对于量子体系而言能量也不为零。这个能量叫零点能。这在图 8.15 中也有体现。下面，我们就集中精力说明零点能的存在，并给出简谐振子的量子化的能量的绝对值。

我们的出发点是公式 8.45，将 $p = m_e \dot{x}$ 代入公式 8.45，有：

$$m_e ([\hat{x}\dot{\hat{x}}]_{mn} - [\dot{\hat{x}}\hat{x}]_{mn}) = i\hbar\delta_{mn}$$

公式 8.72

取对角项 $m = n$ 的情况，这个式子进一步等于：

$$\begin{aligned} m_e \sum_l (-\omega_{lm} [\hat{x}_0]_{ml} e^{-i\omega_{ml}t} [\hat{x}_0]_{lm} e^{-i\omega_{lm}t} - (-\omega_{ml}) [\hat{x}_0]_{ml} e^{-i\omega_{ml}t} [\hat{x}_0]_{lm} e^{-i\omega_{lm}t}) \\ = i\hbar \end{aligned}$$

公式 8.73

进而：

$$m_e \sum_l (-i\omega_{lm} [\hat{x}_0]_{ml} [\hat{x}_0]_{lm} + i\omega_{ml} [\hat{x}_0]_{ml} [\hat{x}_0]_{lm}) = i\hbar$$

公式 8.74

这也意味着：

$$2m_e \sum_l (\omega_{ml} [\hat{x}_0]_{ml} [\hat{x}_0]_{lm}) = \hbar$$

公式 8.75

在讲公式 8.47 和公式 8.48 的时候，我们说过 $\hat{x}_0$ 、 $\hat{x}$ 都是厄米矩阵。因此，公式 8.75 可进一步变为：

$$2m_e \sum_l (\omega_{ml} |[\hat{x}_0]_{ml}|^2) = \hbar$$

公式 8.76

从公式 8.71 和它下面的那段讨论中，我们又知道 $[\hat{x}_0]_{ml}$ 只有在 $l = m \pm 1$ 的时候不为零，且这时 $\omega_{m,m\pm 1} = \omega$ 。这样，公式 8.76 的加和还可以进一步简化为：

$$2m_e \omega (|[\hat{x}_0]_{m,m+1}|^2 - |[\hat{x}_0]_{m,m-1}|^2) = \hbar$$

公式 8.77

进而：

$$|[\hat{x}_0]_{m,m+1}|^2 = |[\hat{x}_0]_{m,m-1}|^2 + \frac{\hbar}{2m_e \omega}$$

公式 8.78

下面，我们就可以基于这个公式，把 $\hat{x}_0$ 这个矩阵写出来。

假设把能量最低的能级编号为0，由于-1的能级并不存在，因此有 $[\hat{x}_0]_{0,-1} = 0$ 。我们可以从它出发，通过公式 8.78 来写出 $\hat{x}_0$ 这个矩阵。按上升的顺序，依次有：

$$|[\hat{x}_0]_{0,1}|^2 = \frac{\hbar}{2m_e \omega}$$

公式 8.79

x_0 的厄米性会导致：

$$|[\hat{x}_0]_{1,0}|^2 = |[\hat{x}_0]_{0,1}|^2 = \frac{\hbar}{2m_e \omega}$$

公式 8.80

之后，有：

$$|[\hat{x}_0]_{1,2}|^2 = |[\hat{x}_0]_{1,0}|^2 + \frac{\hbar}{2m_e\omega} = \frac{\hbar}{m_e\omega}$$

公式 8.81

以及：

$$|[\hat{x}_0]_{2,1}|^2 = |[\hat{x}_0]_{1,2}|^2 = \frac{\hbar}{m_e\omega}$$

公式 8.82

总结起来就是：

$$|[\hat{x}_0]_{m+1,m}|^2 = |[\hat{x}_0]_{m,m+1}|^2 = \frac{(m+1)\hbar}{2m_e\omega}$$

公式 8.83

而 $[\hat{x}_0]_{m+1,m}$ 、 $[\hat{x}_0]_{m,m+1}$ 的本意是振幅。因此，矩阵 $\hat{x}_0$ 可进一步写为：

$$[\hat{x}_0] = \sqrt{\frac{\hbar}{2m_e\omega}} \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & \dots \\ \sqrt{1} & 0 & \sqrt{2} & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

公式 8.84

基于这个表达式，我们就可以来求总能了。

要做的很简单，就是将公式 8.84 以及尤其确定的矩阵 x 代入下面这个简谐振子哈密顿量的表达式：

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m_e} + \frac{1}{2}m_e\omega^2\hat{x}^2$$

公式 8.85

并且记住 $\hat{p}$ 、 $\hat{x}$ 都是矩阵， $\hat{p}^2$ 、 $\hat{x}^2$ 的意思就是 $\hat{p}$ 这个矩阵乘上 $\hat{p}$ 这个矩阵、 $\hat{x}$ 这个矩阵乘上 $\hat{x}$ 这个矩阵，就可以。这样操作的话，得到的 H 这个矩阵的对角项就是：

$$\begin{aligned}
[\hat{H}]_{nn} &= \frac{1}{2}m_e \left([\dot{\hat{x}}^2]_{nn} + \omega^2 [\hat{x}^2]_{nn} \right) = \frac{1}{2}m_e \sum_l \left([\dot{\hat{x}}]_{nl} [\dot{\hat{x}}]_{ln} + \omega^2 [\hat{x}]_{nl} [\hat{x}]_{ln} \right) \\
&= \frac{1}{2}m_e \sum_l \left((-i\omega_{nl}) [\hat{x}_0]_{nl} e^{-i\omega_{nl}t} (-i\omega_{ln}) [\hat{x}_0]_{ln} e^{-i\omega_{ln}t} \right. \\
&\quad \left. + \omega^2 [\hat{x}_0]_{nl} e^{-i\omega_{nl}t} [\hat{x}_0]_{ln} e^{-i\omega_{ln}t} \right) \\
&= \frac{1}{2}m_e \sum_l \left(\omega_{nl}^2 [\hat{x}_0]_{nl} [\hat{x}_0]_{ln} + \omega^2 [\hat{x}_0]_{nl} [\hat{x}_0]_{ln} \right)
\end{aligned}$$

公式 8.86

其中 x_0 这个矩阵又满足公式 8.84，将起直接代入，就有：

$$\begin{aligned}
[\hat{H}]_{nn} &= m_e \omega^2 \left(|[\hat{x}_0]_{n,n+1}|^2 + |[\hat{x}_0]_{n,n-1}|^2 \right) = m_e \omega^2 \frac{\hbar}{2m_e \omega} (2n+2) \\
&= \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega
\end{aligned}$$

公式 8.87

这也就意味着对于第 $n+1$ 个简谐振子的定态（这里是从 $n=0$ 开始算的），它的能量是 $\left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega$ 。这个能量首先是量子化的。其次，对于第一个定态，也就是最低能量态，它的能量是 $\frac{1}{2} \hbar \omega$ 而非零。这个能就是量子系统的零点能。

到这里，矩阵力学的核心内容我们就介绍完了。简单来说，就是海森堡从力学量应该基于可观测量来进行描述这样一个思想出发【Heisenberg, 1925】，建立了一套运算规则来描述量子的粒子的运动。这个规则后来被玻恩发现就是矩阵运算规则【Born, 1925】【Born, 1926a】。基于这样一个对微观粒子的运动学(kinematics)的描述的改进，人们可以通过对应性原理直接将经典的力学方程（Mechanical Equation）用于量子系统的描述，唯一需要注意的就是运动学需要遵循量子的规则。这样，既可以推出量子力学的不对易关系，又可以在一些简单的系统（比如谐振子）中得到量子化的能量。1926年，泡利将矩阵力学应用于氢原子电子能级的描述【Pauli, 1926】。至此，量子力学的第一种表述形式（矩阵力学）彻底建立。

8.4.3 薛定谔的波动力学

在德布罗意的关于电子的物质波理论以及来自哥廷根学派的矩阵力学的一人、两人文章之后³⁵⁰，量子力学发展过程中出现的第三个里程碑式的工作是薛定谔的波动力学理论（矩阵力学的三人文章在薛定谔的波动力学理论之后）

【Schrödinger, 1926a–1926f】。应该说，波动力学是直接受到德布罗意的工作的影响产生的，与矩阵力学没有直接联系。在自己的波动力学出来后，薛定谔证明了它与矩阵力学等价【Schrödinger, 1926g】。本小节，我们针对波动力学的产生展开介绍。

笔者首先需要说明的是波动力学与能量量子化的联系是极其直接的，它体现在“固定边界条件下的一个波动方程的本征振动”上。早在十九世纪，人们在利用偏微分方程研究振动问题的时候，就已经非常清楚地认识到了这种振动模式的能量是分立的了（生活经历更早一些，比如我们弹的琴弦）。关于这一点，读者可以从 1926 年初薛定谔发表的一系列德文文章的题目 *Quantisierung als Eigenwertproblem*（作为本征值问题的量子化）中体会。我们在量子力学中学到的本征值、本征态中，“本征”对应的德语单词是 *Eigen*。这个词根在薛定谔的文章题目中得到了最直接的体现。因为这个历史的原因（力学中本征振动的研究已经有了传统），加上当时的物理学家已经很习惯偏微分方程这个数学工具，以及波函数求解相比于矩阵求解在数学处理上确实更加直接（虽然它们的本质是一样的）等一系列原因，波动力学在推动量子力学被整个物理学界接受的过程中起到了极其关键的作用。至今，它也是量子力学的诸多表述中被应用地最为广泛的一个。

³⁵⁰ 这里我们强调是哥廷根学派，不是哥本哈根学派。那三篇文章的署名单位，都是哥廷根大学。

就本小节的写作，考虑到要有通识性和科普性，我们会先按讲故事的方式引出薛定谔为什么会想到要建立薛定谔方程这样一个问题。然后，再通过两种方式理解来薛定谔方程。第一种方式，是针对电子运动状态的波函数表达直接与经典力学进行类比。第二种方式，是从哈密顿力学在半经典近似出发，推出薛定谔方程。这两种方式中，前一种比较直接（毕竟是类比），但不严格。第二种在数学形式上要优美很多。至少它可以让我们在经典力学的框架下体会到其更深层次的力学的根。这些内容合在一起，相信可以对多数同学理解波动力学提供一定的帮助。

我们先从“薛定谔为什么会关注这个问题”讲起。薛定谔是奥地利人，他在年龄上比海森堡、泡利、约当、狄拉克这拨在量子力学发展的关键几年（集中在1924-1926年）以学生、博后身份从事最一线研究的青年才俊要大不少，比他们的导师辈的玻恩仅仅小五岁。早在1914年，薛定谔就完成了自己的教授资格考试。在经过了几个中间阶段的教职调整之后，他于1921年来到苏黎世大学担任理论物理的教授。应该说，在1925年这个时间节点之前，他的研究与量子理论几乎没有关系。在1920年，他在耶拿曾经当过一个叫维恩（Max Wien, 1866-1938年）的教授的助手。但这个维恩并不是我们在黑体辐射中讲的那个维恩（Wilhelm Wien, 1864-1928年），而是那个维恩的堂弟。彼时，薛定谔的研究与电磁现象更加相关，但不涉及量子的理论。

同时，我们需要说明的是在1925年这个时间节点，欧洲已经有了几个在量子理论方面形成了很好的学术传承的团体了，比如位于哥廷根玻恩领导的团队、慕尼黑索末菲领导的团队、哥本哈根玻尔领导的团队，以及柏林的爱因斯坦与普

朗克等人。甚至在相对遥远一些的剑桥大学，狄拉克也已经开始活跃了³⁵¹。薛定谔和他们并没有直接联系。按照学科发展的普遍规律，他与量子理论之间，是需要一个桥梁的³⁵²。这个桥梁就是德拜。而这个桥梁能够在时空上与薛定谔有交集，则又和 1920 年的一个事件有关。本着通识性读物尽量强调趣味性的原则，我们先从 1925 年的薛定谔说到 1920 年的德拜，再说回 1925 年的他们。

说起德拜，又绕不开哥廷根【Schirmacher, 2019】。于是，我们不嫌麻烦，再深挖一步，聊聊哥廷根。应该说，哥廷根大学对物理学革命是有着极其关键的影响的。就量子力学而言，重要贡献围绕三个人物：希尔伯特、德拜、玻恩【Schirmacher, 2019】。希尔伯特虽然没有直接参与量子力学发展过程中的任何一个重要工作，但是他与线性代数密切相关，这是量子力学的数学基础。同时，他在哥廷根大学工作的时间非常长，从 1895 年受克莱因的邀请担任教职开始一直到 1943 年去世。哥廷根在他手里成为了世界数学的中心。像索末菲、玻恩、德拜、魏格纳、冯·诺伊曼、约当这些对量子力学的发展产生过实际贡献的人，都在他所创造的这个环境中受益。

德拜在哥廷根工作的时间相对短一些，从 1913 年到 1920 年。他是最早接受爱因斯坦关于固体热容的量子模型的人，并且对其进行了改进（1912 年的工作）

³⁵¹1925 年的夏天海森堡访问剑桥大学，参加了卡皮查 (Pyotr Leonidovich Kapitsa 或 Peter Kapitza, 1894–1984 年) 组织的一个学术俱乐部的活动 (Kapitza Club) 并给了报告。卡皮查是卢瑟福的学生，当时在剑桥工作，还没会苏联。他的这个 club 在当时的剑桥很活跃。狄拉克实际上没有去听海森堡的报告。但他的导师福勒听了这个报告，并建议狄拉克跟进海森堡的研究。这才造就了狄拉克进入这个领域。

³⁵²这个只能说是普遍规律，也有例外，比如玻色 (Satyendra Nath Bose, 1894–1974 年)。他的玻色-爱因斯坦凝聚的工作就是在很闭塞的情况下，在印度完成的。他先是把这个工作投到了英国的一个杂志。但很遗憾并没有被接受。于是，他把这个文章寄给爱因斯坦。爱因斯坦看完，非常喜欢，并把它翻译为德语，最终发表在 Zeitschrift für Physik。

【Debye, 1912】。在哥廷根期间，他的研究集中在对玻尔模型的改进、温度对 X 射线的影响等问题。应该说，这些问题都是典型的具备量子论特质的问题。

1920 年，因为苏黎世理工提供了更好的工作与生活条件，德拜辞去了自己在哥廷根大学的教职。玻恩恰恰就是他的继任者。应该说正是哥廷根这个舞台，成就了玻恩，更促成了矩阵力学的诞生。就他在哥廷根做出的对量子力学的关键贡献而言，如果主角换做德拜，或许这场革命不会按历史上的这种形式发生。更有趣的是，德拜到达苏黎世理工后，他也一直关注量子力学的进展。而本小节的主角，波动力学的关键人物薛定谔（Erwin Schrödinger, 1887–1961 年），恰恰在这个城市的另外一所大学工作³⁵³。1925 年，薛定谔正是因为参加德拜组织的研讨会（Seminar），才获悉德布罗意的博士论文。历史就是这样的巧妙，几个关键人物，就像是演戏一样，在几个平台间穿梭。这些关键人物之间的互动，促进了剧情的发展，也促成了量子力学的波动理论的诞生。

德布罗意的论文的核心思想是电子既是粒子又是波。关于这一点，相信其他的研究组看完也有这个理解，因为德布罗意说的已经很清楚了。薛定谔相对于其他读者，最关键的贡献是他写出了电子作为一个波动的粒子的波动方程。而这个波动方程，对于一个束缚态的电子，就应的就是固定边界条件下的偏微分方程。前面我们提到过，固定边界条件的偏微分方程是有本征振动的。而这些本征振动的能级，也是分立的。而薛定谔之所以能够将关注点放在电子的波动方程上，德拜跟他说的一句话是很重要的。德拜跟薛定谔说：自己的导师索末菲当年告诉过

³⁵³ 薛定谔工作的学校叫苏黎世大学（University of Zurich），德拜工作的学校叫苏黎世理工（就是我们常说的 ETH）。德语区的很多主要城市，比如柏林、慕尼黑、苏黎世、维也纳，都会有两所大学，一个是综合性大学，一个是工业大学。像柏林，就有柏林大学（二战后分裂为洪堡大学与柏林自由大学）、柏林工业大学。慕尼黑，也有慕尼黑大学与慕尼黑工业大学。

自己“要想理解一个波，一定要写出这个波的波动方程”。薛定谔正是带着这个疑问在参加了德拜的组会后去度假，并在度假的时候想到薛定谔方程的。

在德布罗意那里，我们提到过他最大的贡献就是德布罗意关系（公式 8.41-8.42）。此关系是德布罗意对电子进行物质波的描述的数理基础。到了薛定谔这里，他意识到可以基于这两个关系建立一个偏微分的关于电子的物质波的方程。为了讨论方便，我们将基于约化普朗克常数 $\hbar$ 重新讨论波粒二象性，并在此基础上以第一种方式引入薛定谔方程。

这种方式的关键点就是类比。首先我们需要明确的是利用 $\hbar$ ，公式 8.41 和公式 8.42 可分别重新写为：

$$E = \hbar\omega$$

公式 8.88

与

$$p = \hbar k$$

公式 8.89

其中，矢量 $\mathbf{k}$ 与公式 8.42 中的 $1/\lambda$ 的关系大家可以用一维系统作为例子来理解。

在一维系统中，它不是矢量，变成了 $k = 2\pi/\lambda$ 。这样的话， $p = h/\lambda$ 就变成了 $p = \hbar k$ 。对于三维体系， $p = \hbar k$ 两边的 p 与 k 只需分别变为欧氏空间的矢量 $\mathbf{p}$ 与 $\mathbf{k}$ 即可。

这个时候，对于一个动量为 $\mathbf{p}$ 平面波，它的波函数为：

$$\Psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t) = (2\pi\hbar)^{-3/2} e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r} - Et)/\hbar}$$

公式 8.90

如果将能量 E 对应为一个哈密顿算符：

$$\hat{H} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$$

公式 8.91

将动量 $\mathbf{p}$ 对应为一个动量算符：

$$\hat{p} = -i\hbar\nabla$$

公式 8.92

那么，公式 8.90 的平面波函数很显然会因为 $E = |\mathbf{p}|^2/2m$ 而满足：

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r},t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r},t)$$

公式 8.93

此公式就是自由电子的薛定谔方程。它是通过将自由电子描述为平面波并将哈密顿量、动量对应为算符得到的。

对于非平面波，我们可以将公式 8.93 右边的 $-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2$ 变为 $-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \hat{V}(\mathbf{r})$ 。这是因为平面波对应的是自由电子，能量 E 就等于 $|\mathbf{p}|^2/2m$ 。把公式 8.92 代入，就对应 $-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2$ 。而非自由电子能量 E 等于 $|\mathbf{p}|^2/2m + V(\mathbf{r})$ ，如果仅仅对比形式，我们很自然会想到哈密顿算符应该对应 $-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \hat{V}(\mathbf{r})$ 。因此，对于非自由电子，公式 8.93 就演化为：

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\mathbf{r},t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \hat{V}(\mathbf{r})\right]\Psi(\mathbf{r},t)$$

公式 8.94

这样，我们就通过类比的方式得到了薛定谔方程。

这时，如果对比公式 8.52 和公式 8.51，我们可以注意到波函数 Ψ 的下标 $\mathbf{p}$ 没有了。这是因为对于非自由电子，因为平移对称性没有了，动量不再是一个守恒量。因此，它也不是一个好量子数，也不能用来描述一个非自由电子的能量本征态³⁵⁴。对于一个给定的能量 E ，还可以定义其“定态波函数” $\psi(\mathbf{r})$ ，形式满足：

³⁵⁴这几句讨论相对专业一些。其中，平移对称性决定动量守恒这样一个关系来自于著名的女性科学家诺特（Emmy Noether，1882—1935 年）。她在 1918 年左右发现了这个规律。而守恒量对应的算符与哈密顿算符互易进而可用来标识量子态，则是《量子力学》课程的学习中才能接触到的

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}-Et)/\hbar}\psi(\mathbf{r})$$

公式 8.95

这样的话，公式 8.95 中的波函数 $\Psi(\mathbf{r})$ 同样满足³⁵⁵：

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \hat{V}(\mathbf{r}) \right] \Psi(\mathbf{r}) = E\Psi(\mathbf{r})$$

公式 8.96

对于被束缚的电子，这个方程是一个典型的固定边界条件的偏微分方程，它的解为分立的能量 E 。这样，像原子的分立光谱、普朗克在解释黑体辐射的时候假设的简谐振子能量分立这样的在量子论中人们一直使用的以假设形式存在的“物理知识”，就有了坚实的“力学理论”的基础了。量子论自然也演化为量子力学。

上面的通过类比来讲解薛定谔方程的方式比较直接。但我们必须承认它既不严格，也不是薛定谔在得到薛定谔方程时使用的方法。它只是量子力学成熟之后，我们在讲解薛定谔方程的时候经常用到的一种解释方法。作为一个具有深厚的数学功底的物理学家，薛定谔在得到薛定谔方程的过程中，是从哈密顿-雅可比方程获得灵感的。要想具有这样的获得灵感的能力，对理论力学的深刻认识是必不可少的。无疑，薛定谔是这样一个理论物理学家。我们现在对这个思路进行一个相对简单但不完整的介绍，供感兴趣的同学参考。更深入的讨论，请参考薛定谔的原始文章【Schrödinger, 1926a】。

为了简单起见，我们关心一个一维体系。这个系统的哈密顿-雅可比方程（一个经典力学中人们经常使用的方程）的具体形式是：

一个性质。在这里，读者可以不用过于纠结为什么，接受“这个下标应该在这里消失”这样一个事实即可。

³⁵⁵ 这个方程，我们一般在量子力学的教材中也称为定态薛定谔方程。

$$\frac{\partial S(x,t)}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S(x,t)}{\partial x} \right)^2 + V(x) = 0$$

公式 8.97

$S(r,t)$ 被称为欧几里得作用量 (Euclidean Action, 简称作用量, Action), 它是拉格朗日量 (Lagrangian, 记为 L , 它是动能和势能的差) 的积分, 其定义是:

$$S(r,t) = \int_{t_0}^t L dt = \int_{t_0}^t (T - V) dt$$

公式 8.98

对于一个处在特定能量 E 的状态, 时间平移对称性决定了它的作用量可以写成:

$$S(x,t) = W(x) - Et$$

公式 8.99

把公式 8.99 代入公式 8.97, 就意味着在经典力学的框架下, 有:

$$\left(\frac{\partial S(x,t)}{\partial x} \right)^2 = 2m[E - V(x)]$$

公式 8.100

在一个特定的时刻 t_0 , 在经典力学的理论框架下, 公式 8.99 中的作用量为定值 S_0 的, 就是一个位置 x_0 。它们之间的关系是:

$$S(x_0, t_0) = W(x_0) - Et_0$$

公式 8.101

在薛定谔的推导中, 他的关注点是这个定值点随着时间的移动。对于高维的情况, 这个点对应一个曲线或者曲面。

现在, 考虑作用量为这个定值的点在下一个时刻的位置, 一定有:

$$S(x_0, t_0) = W(x_0 + dx) - Et_0 - Edt = W(x_0) + \left. \frac{dW(x)}{dx} \right|_{x=x_0} dx - Et_0 - Edt$$

公式 8.102

这样，用公式 8.102 减去公式 8.101，就有：

$$\left. \frac{dW(x)}{dx} \right|_{x=x_0} dx - E dt = 0$$

公式 8.103

这个时候，我们看公式 8.99。它左边的 $S(x, t)$ 有两个变量，右边的 $W(x)$ 有一个变量。因此，

$$\left. \frac{\partial S(x, t)}{\partial x} \right|_{x=x_0} = \left. \frac{dW(x)}{dx} \right|_{x=x_0}$$

公式 8.104

这样，公式 8.103 就又进一步化为：

$$\left. \frac{\partial S(x, t)}{\partial x} \right|_{x=x_0} dx - E dt = 0$$

公式 8.105

这样的话，这个点在时间 dt 内移动位置 dx ，两者之间的关系就是：

$$\frac{dx}{dt} = E / \left(\left. \frac{\partial S(x, t)}{\partial x} \right|_{x=x_0} \right)$$

公式 8.106

而公式 8.100 告诉我们：

$$\left. \frac{\partial S(x, t)}{\partial x} \right|_{x=x_0} = \sqrt{2m[E - V(x_0)]}$$

公式 8.107

因此，公式 8.106 进一步演化为：

$$\frac{dx}{dt} = \frac{E}{\sqrt{2m[E - V(x_0)]}}$$

公式 8.108

这个 dx/dt ，我们可以记作 u 。它代表的是作用量为 S_0 的点在 x 轴上移动的速度。如果是高维情况，这个点对应曲线或曲面。而这个速度，就是这个曲线或曲面在其法向方向移动的速度。这样，由这个作用量定值点定义的相速度就是：

$$u = \frac{E}{\sqrt{2m[E - V(x_0)]}}$$

公式 8.109

至此，薛定谔的推导中的经典力学的部分就结束了。下面，他会基于作用量再定义一个波函数。之后，就是基于这个波函数中的相位的运动，结合公式 8.109 得到薛定谔方程了。换句话说，在这条路下，薛定谔方程与经典力学之间存在一个天然的、紧密的纽带。薛定谔的创新点，依然是电子的运动学表述，也就是需要基于波函数而非轨道来描述电子运动。这是从德布罗意那里来的。

具体而言，在薛定谔 1926 年的一系列文章中【Schrödinger, 1926a–1926f】，他假设在一个能量守恒的系统中，电子具有如下形式的波函数：

$$\Psi(x, t) = A(x)e^{iS(x, t)/K} = A(x)e^{i[W(x) - Et]/K}$$

公式 8.110

如果对应德布罗意的自由电子，也就是公式 8.90，波函数的含时项为 $e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$ 。而这里，波函数的含时项为 $e^{-iEt/K}$ 。因此，薛定谔说：One cannot resist the temptation of supposing K to be a universal constant, independent of E and independent of the nature of the mechanical system, because if this be done and K be given the value $\hbar/(2\pi)$, then the frequency will be given by $\nu = E/\hbar$ 。这里，薛定谔说的 $\hbar/(2\pi)$ 就是本小节开始的时候我们定义的约化普朗克常数 $\hbar$ 。换句话说，公式 8.108 中的 K 就是 $\hbar$ 了。相应的，公式 8.110 变为：

$$\Psi(x, t) = A(x)e^{iS(x, t)/\hbar} = A(x)e^{i[W(x) - Et]/\hbar}$$

公式 8.111

之后，薛定谔想到了经典波动方程的普遍形式（第五章的公式 5.2，我们在介绍偏微分方程的时候就提到过，早在 18 世纪就由达朗贝尔提出）：

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi(x, t) = u^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x, t)$$

公式 8.112

这样，根据公式 8.110，我们就知道公式 8.111 的左边，等于：

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi(x, t) = -\frac{E^2}{\hbar^2} \Psi(x, t)$$

公式 8.113

而其右边，又因为从经典力学推出的相速度(公式 8.109 代入公式 8.112 的右边)，
等于：

$$u^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x, t) = \frac{E^2}{2m[E - V(x)]} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x, t)$$

公式 8.114

这样，将公式 8.112 至公式 8.114 联立，我们就有：

$$\frac{E^2}{2m[E - V(x)]} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x, t) = -\frac{E^2}{\hbar^2} \Psi(x, t)$$

公式 8.115

它可进一步化为：

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x, t) = -[E - V(x)] \Psi(x, t)$$

公式 8.116

进而：

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \hat{V}(\hat{r}) \right] \Psi(x, t) = E \Psi(x, t)$$

公式 8.117

这时，再结合波函数的定义式（公式 8.111），我们也就可以得到薛定谔方程：

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \hat{V}(\hat{r}) \right]$$

公式 8.118

这也是公式 8.94。这里，为了读者读起来方便，我们再写一下。

从上述推导，我们应该可以感受到薛定谔这个人对于经典力学的掌握、对于波动方程的理解，对于他完成那个工作是发挥了极其关键的作用的。在笔者看来，思维的跳跃并不大，一切都是力学很合理的推导。突破的，就是对运动(kinematics)的描述。相对于经典力学中的问题，他将微观的粒子处理为一个波。这个总结仅供参考。

最后，我们再次强调这样的一个波动方程应用到束缚电子体系，对应的就是固定边界条件的偏微分方程。它的解是分立的。薛定谔将其应用到了氢原子体系³⁵⁶、简谐振子体系，得到的结果都很完美。对于氢原子体系，它的解析解可以直接解释与自旋无关的所有实验结果（薛定谔方程中也并没有自旋自由度）。对于简谐振子，其解与之前海森堡利用矩阵力学的解也是一致的。考虑到波动方程在数学上更易于求解，同时这套理论对于当时的物理学家来说也更友善，波动力学很快就收到了广泛的欢迎。连玻恩本人也在研究散射问题的时候使用了薛定谔的方法，并在那里给出了波函数的物理意义的统计性几率诠释。

³⁵⁶ 这里不像矩阵力学，海森堡、玻恩、约当都没有把它用到氢原子体系，知道泡利的工作的出现。所以我们前面也说泡利的工作对于多数人接受矩阵力学是非常重要的！波动力学用到氢原子体系并不需要非常繁琐的数学，薛定谔直接就做了。这在一定程度上也能反映出量子力学的这两种表达在应用层面的难易程度和实用性差别。玻恩在 1926 年研究散射问题的时候直接使用波动力学，也就很好理解了。

8.4.4 玻恩对波函数的物理意义的统计性几率诠释

现在我们把时间节点移到 1926 年末。这个时候，量子力学的两种最重要的表述（矩阵力学与波动力学）都已产生。它们之间的等价性也被证明。下一个最重要的问题，自然就是要搞明白波动力学中的波函数的物理意义到底是什么？

在回答这个问题的过程中，和矩阵力学的发展一样，玻恩也起到了至关重要的作用。他之所以能够起到这个作用，与他长期浸淫于量子理论与量子力学的研究是密切相关的。他除了是量子力学这个概念的提出者、矩阵力学的一个重要贡献人，还在德布罗意的电子波理论获得实验验证的过程中扮演了极其重要的作用³⁵⁷。当矩阵力学与波动力学成型后，他马上使用它们研究了散射问题。在这个过程中，他发现矩阵力学并不好用。这是由于在当时的矩阵力学的形式中，定态是作为基被直接使用的。而它的具体形式，是要求解完这个量子力学的问题才知道的。散射过程是会造成散射前、散射中、散射后定态会不同，这会带来很多实际计算中的麻烦。这个时候，作为一个思想开明的物理学家，玻恩是会注意到薛定谔的方法在处理类似问题中的优势的。既然两者等价，为什么不用波动力学来研究这个问题？

实际上，也就是在研究这个问题的过程中，玻恩意识到了波函数的物理意义【Born, 1926b】。我们这里直接引用孙昌璞老师在其《量子力学现代教程》1.2.3 小节中的原话来描述这种意义：玻恩发现量子力学对微观系统的描述本质上是概率性的，刻画量子系统的运动状态的波函数代表一个观察者对于量子系统所能知道的全部知识【孙昌璞, 2024】。大家可以注意“运动状态”这个词。笔者总是感

³⁵⁷在 8.4.1 节，我们提到过他向戴维森推荐了德布罗意的工作，并指出他们之前的实验与之有关。G. P. Thomson 也是从那次会议中得到灵感，开展自己的实验的。最终，他们两个人因为这项工作获得了 1937 年的诺贝尔物理奖。

觉是量子力学在运动学方面的神秘性，导致我们必须借助新的数学工具（线性代数）来对它进行表达。力学层面的很多内容（当然并不是所有内容），是可以通过对应性原理找到对应的。但运动学层面的变革，则是革命性的。

具体到玻恩的这篇关于散射的文章中的原始表述，玻恩认为 $|\Psi(x,t)|^2$ 代表的是人们在这个量子系统中，在 t 时刻、在 x 点附近发现这个粒子的概率密度。在一个粒子朝向一个散射中心运动之后被散射的过程中，人们可以将散射前的粒子描述为一个波包。但是散射后，如图 8.17 所示，粒子将分布于整个空间。如果是这样，那这个粒子就被打碎了。其被打碎之后的运动状态如何与粒子的波粒二象性联系起来呢？

针对这个问题，玻恩想到了“概率波”这样一个概念。他认为通过散射中心后，入射粒子会选择彩色曲线表示的散射通道中的一条进行散射。这是其粒子性的体现。而波动性，则通过对一系列散射轨迹的统计平均获得。通过这种处理，在描述散射粒子的运动时，波动性与粒子性得到了完美的结合。量子态的相干性也得以保持（因为波的性质得到了保持，波是可以相干的）。这样的话，波函数的物理意义就彻底清楚了。

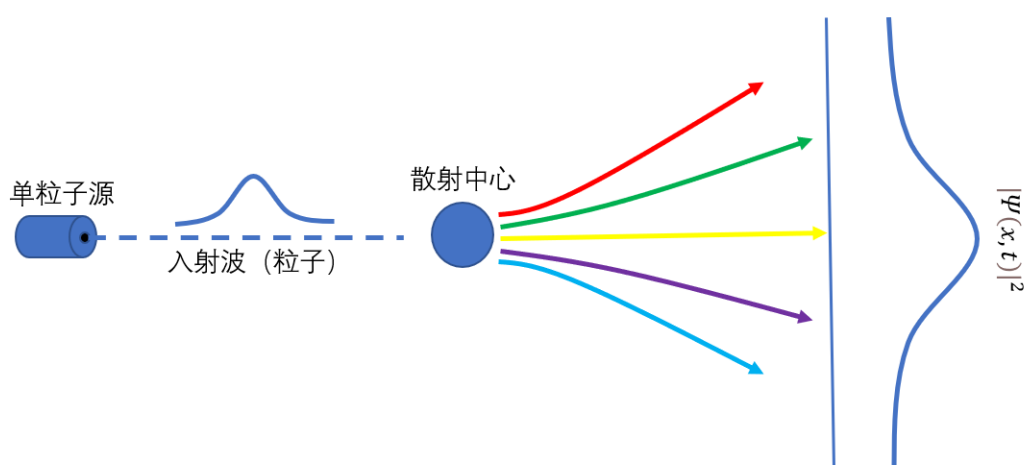


图 8.17 玻恩基于散射过程对波函数的概率诠释，根据孙昌璞老师《量子力学现代教程》中

图 1.1 绘制【孙昌璞, 2024】。通过几率波的概念, 可以将散射粒子的波粒二象性进行完美的表达。

在很多科普读物中, 这个诠释被称为“哥本哈根诠释”。和前面我们讲到的很多误解类似, 这个工作与哥本哈根根本就是无关的, 他是由玻恩独立提出的【Born, 1926b】, 而玻恩在当时是哥廷根大学的教授(泡利、海森堡也是他在哥廷根大学的助手)。不光这个诠释和哥本哈根没有关系, 玻尔本人甚至认为这个诠释可以通过量子力学的其它假设得到。这个认识, 当然是极其错误的。现在, 人们能够很清楚地认识到这个诠释在量子力学的理论体系中具有独立的、基础的逻辑地位, 不能被其它任何假设所推出。但是历史上形成的这个误解依然广泛流传。庆幸的是, 相比于大众, 专业人员的评价还是要公平很多。1954 年, 玻恩因为这项贡献与博特(Walther Bothe, 1891–1957 年) 分享了那一年的诺贝尔物理学奖³⁵⁸, 他的得奖理由是: for his fundamental research in quantum mechanics, especially for his statistical interpretation of the wavefunction。

8.4.5 测不准关系、互补原理

在矩阵力学、波动力学建立后, 特别是它们之间的等价性被证明后, 人们开始明白量子力学背后的数学工具是线性代数。这里, 力学量通过特征值为实数的厄米矩阵来进行表达。而矩阵乘法相对于数的乘法, 最大的一个特定就是矩阵之间的乘法与数的乘法不同, 往往是不可以互易的。这也是玻恩和约当提出的不对

³⁵⁸博特是一名实验物理学家, 他的获奖理由是发明了研究散射过程的新方法, 具体表述为: for the coincidence method and his discoveries made therewith。这个自然也是与玻恩的那篇关于散射的文章中的物理相关的【Born, 1926b】。

易关系（公式 8.45）之所以能够存在的根本原因。从公式 8.45 出发，以位置、动量算符为例，测不准关系就很容易被推出了。我们在本小节进行这样一个推导，并论述与之相关的由玻尔提出的互补原理。

我们首先需要理解的是在针对位置、动量这些物理学量进行测量的时候，在量子力学的语言中，我们完成的是如下动作：

$$\hat{x}|\alpha\rangle \rightarrow x|\alpha\rangle$$

公式 8.119

这里， $|\alpha\rangle$ 是我们要测量的量子态。 $\hat{x}$ 是坐标算符。它作用到这个量子态上，进行了一次位置测量。 x 是一个实数，是这次测量的测量值。在公式 8.115 中我们没有用等号，是因为不同次的测量可以给出不同的结果。我们用 $\rightarrow$ 来强调这是一次测量的结果。后面，我们不再做这种强调。当我进行了很多次测量之后，这些测量值可以有一个统计平均值 $\bar{x}$ ，它是一个实数。

由于量子力学从本质上是统计性的，这个 $\bar{x}$ 只能理解为好多次测量的测量值的平均。这个时候，如果我们稍微学过一些统计，我们就知道我们每次的测量值都是在这个平均值附近分布的。这个分布有个不确定度（均方差），它可以用 $\sqrt{\langle(\Delta x)^2\rangle}$ 来表示。其中，

$$\Delta x = x - \bar{x}$$

公式 8.120

它代表的是我每次测量的值 x 对统计平均值 $\bar{x}$ 的偏离。我们每进行一次测量，都有个 Δx ，它可正可负。我们对这个测量出来的 Δx 取平方，再对 $|\alpha\rangle$ 这个量子态进行统计平均再求根号，对应的就是在针对这个态进行测量的时候的测量值的均方差。它应该用 $\sqrt{\langle(\Delta x)^2\rangle}$ 表示，描述的就是对坐标进行测量的不确定度。

同样，对这个量子态，也可以测量动量，每次有个偏差：

$$\Delta p = p - \bar{p}$$

公式 8.121

其中 p 是每次的测量值， $\bar{p}$ 是多次测量的平均值。按统计的方法来描述，每次的测量值都在 $\bar{p}$ 附近分布，均方差为 $\sqrt{\langle(\Delta p)^2\rangle}$ 。这些，和位置的测量都是对应的。

测不准关系，说的并不是某次测量的 Δx 和 Δp 之间的乘积的关系，而是对位置进行测量的均方差 $\sqrt{\langle(\Delta x)^2\rangle}$ 和对动量进行测量的均方差 $\sqrt{\langle(\Delta p)^2\rangle}$ 两者相乘，满足的关系。它可以表达为：

$$\sqrt{\langle(\Delta x)^2\rangle}\sqrt{\langle(\Delta p)^2\rangle} \geq \frac{\hbar}{2}$$

公式 8.122

这一点我们必须首先明确！在明确这一点后，我们就可以利用公式 8.45，来推公式 8.122 了。

起点，自然是由公式 8.119–8.121 给出的 $\sqrt{\langle(\Delta x)^2\rangle}$ 与 $\sqrt{\langle(\Delta p)^2\rangle}$ 的定义。这两个数是基于 $\langle(\Delta x)^2\rangle$ 与 $\langle(\Delta p)^2\rangle$ 的，它们分别满足：

$$\langle(\Delta x)^2\rangle = \langle\alpha|(\hat{x} - \bar{x})^2|\alpha\rangle = \langle\alpha|(\hat{x} - \bar{x})(\hat{x} - \bar{x})|\alpha\rangle$$

公式 8.123

这里，由于 $(\hat{x} - \bar{x})$ 是个厄米算符，我们知道：

$$\langle(\Delta x)^2\rangle = \langle(\hat{x} - \bar{x})\alpha|(\hat{x} - \bar{x})\alpha\rangle$$

公式 8.124

它代表的，是希尔伯特空间中一个向量 $(\hat{x} - \bar{x})\alpha$ 和它自身的内积，是一个大于等于零的实数。和公式 8.123–124 对应，我们还有：

$$\langle(\Delta p)^2\rangle = \langle\alpha|(\hat{p} - \bar{p})^2|\alpha\rangle = \langle\alpha|(\hat{p} - \bar{p})(\hat{p} - \bar{p})|\alpha\rangle$$

公式 8.125

同样，由于 $(\hat{p} - \bar{p})$ 是个厄米算符，它继续等于：

$$\langle(\Delta p)^2\rangle = \langle(\hat{p} - \bar{p})\alpha|(\hat{p} - \bar{p})\alpha\rangle$$

公式 8.126

它代表的，也是希尔伯特空间中一个向量 $|(\hat{p} - \bar{p})\alpha\rangle$ 和它自身的内积，也是一个大于等于零的实数。

这个时候，如果我们记：

$$|f\rangle = |(\hat{x} - \bar{x})\alpha\rangle$$

公式 8.127

以及

$$|g\rangle = |(\hat{p} - \bar{p})\alpha\rangle$$

公式 8.128

那么，很显然：

$$\langle(\Delta x)^2\rangle\langle(\Delta p)^2\rangle = \langle f|f\rangle\langle g|g\rangle$$

公式 8.129

这一步是我们理解测不准关系的一个非常重要的中间步骤。

之后，我们就可以利用希尔伯特空间中关于向量内积的柯西-施瓦茨不等式

(Cauchy-Schwarz Inequility)：

$$\langle f|f\rangle\langle g|g\rangle \geq |\langle f|g\rangle|^2$$

公式 8.130

得到：

$$\langle(\Delta x)^2\rangle\langle(\Delta p)^2\rangle \geq |\langle f|g\rangle|^2$$

公式 8.131

这里， $\langle f|g\rangle$ 代表向量 $|f\rangle$ 、 $|g\rangle$ 之间的内积，它是一个复数。这个复数的模，是大于它的虚部的平方的(任何复数的模都等于其实部平方加虚部平方进而大于其虚部平方)。因此，继续有：

$$\langle(\Delta x)^2\rangle\langle(\Delta p)^2\rangle \geq |\langle f|g\rangle|^2 \geq \left[\frac{1}{2i} (\langle f|g\rangle - \langle g|f\rangle) \right]^2$$

公式 8.132

这个时候，我们再把 $|f\rangle$ 、 $|g\rangle$ 本身的定义代入（公式 8.127、公式 8.128），一切就会很明朗了。

其细节，可以描述为：

$$\langle f|g\rangle = \langle (\hat{x} - \bar{x})\alpha | (\hat{p} - \bar{p})\alpha \rangle = \langle \hat{x}\alpha | \hat{p}\alpha \rangle - \bar{p}\langle \hat{x}\alpha | \alpha \rangle - \bar{x}\langle \alpha | \hat{p}\alpha \rangle + \bar{x}\bar{p}\langle \alpha | \alpha \rangle$$

公式 8.133

由于 $\hat{x}$ 、 $\hat{p}$ 的厄米性，以及 $|\alpha\rangle$ 的归一性，它进一步等于：

$$\langle f|g\rangle = \langle \alpha | \hat{x}\hat{p} | \alpha \rangle - \bar{x}\bar{p}$$

公式 8.134

与这个等式相应，也有：

$$\langle g|f\rangle = \langle \alpha | \hat{p}\hat{x} | \alpha \rangle - \bar{x}\bar{p}$$

公式 8.135

这样，把公式 8.134 和 8.135 代入公式 8.132，就有：

$$\langle (\Delta x)^2 \rangle \langle (\Delta p)^2 \rangle \geq \left[\left\langle \alpha \left| \frac{1}{2i} [\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x}] \right| \alpha \right\rangle \right]^2$$

公式 8.136

这个时候，把公式 8.45 代入上式，就有：

$$\langle (\Delta x)^2 \rangle \langle (\Delta p)^2 \rangle \geq \left[\left\langle \alpha \left| \frac{1}{2i} i\hbar \right| \alpha \right\rangle \right]^2 = \left[\frac{\hbar}{2} \right]^2$$

公式 8.137

这样的话，就有公式 8.122，也就是我们常说的海森堡不确定性关系了。1927 年，海森堡在他的文章 *Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik*（英文对应是：On the Perceptual Content of Quantum Theoretical Kinematics and Mechanics）中将这个关于测量的不确定关系明确提出【Heisenberg, 1927】。之后，它也成了量子力学中一个极其关键的内容。它是量子力学统计性

的一个重要体现。

历史上，海森堡的这个工作出来以后，就是著名的 1927 年索尔维会议了。在这个会议上，量子力学的统计性解释成为了核心话题。其中，既有玻恩的波函数统计性解释的部分，也有海森堡的测不准关系的部分。当然，我们知道玻尔在这个讨论中扮演了一个非常重要的角色。他把这个测不准关系再次上升到了一个哲学的层面，将其描述为“互补原理”。但客观的讲，当我利用线性代数的方法来描述微观粒子的运动（具体形式可以是矩阵力学、可以是波动力学），当我承认在量子力学中的观测需要基于统计来进行解释之后，测不准关系是在数学上可以推导出来的确定的结果。这里，我们无需再把问题虚化（或者说复杂化），上述到哲学的高度。

8.4.6 电子自旋

截至目前，我们给出的量子力学理论中对于微观粒子的描述依然局限于“具有空间自由度的微观粒子”这个层面。这里，量子力学的新奇之处体现在波动性。波函数，是一个依赖于空间坐标的波函数。它的解释是基于统计的、几率性的。这种“量子的、对于微观粒子的运动学描述”不光适用于电子，也适用于其它的微观粒子，比如原子核、光子。在量子力学的语言中，它们也应该被描述为依赖空间坐标的波。1927 年，玻恩和奥本海默（Julius Robert Oppenheimer, 1904–1967 年）就是把薛定谔方程应用到分子体系，让其描述一个由电子、原子核形成的多体系统在量子力学层面的运动，进而提出了著名的玻恩-奥本海默近似【Born, 1927】。之后，这个近似也很快成为了我们理解分子物性、凝聚态体系物性的基础。

这个情况如果换一种方式表达的话，可总结为：在 1927 年这个时间节点，在矩阵力学、波动力学建立后，针对微观粒子的空间运动进行描述的量子力学就建立了，它适用于包含电子在内的所有微观粒子。这里，关键点是“波粒二象性”，它是对微观粒子“运动学”性质的重新表达。“波”指的是这些粒子的空间运动具有“波动性”；“粒”指的是当我们关注粒子性的时候，它可以被描述为一个点³⁵⁹。这是对微观粒子“运动”的一种完全不同于经典力学的表达，一种“量子的”表达。在这种表达中，微观粒子会被描述为欧氏空间（或闵可夫斯基空间，如果考虑相对论效应）中的波。但必须要说明的是，它的量子的“运动学”性质中还有一个重要的属性没有触及，这个属性就是微观粒子的自旋。

在科普读物，我们会经常看到类似于电子、原子核这样的微观粒子的“自旋”属性的讨论。考虑到量子力学关键理论的发展（不管是关于波粒二象性的理解，还是对自旋的认识）都是围绕电子展开的，我们这里会选择以“电子的自旋”为题来让读者体会一下这个在经典体系中完全没有被触及的微观粒子在量子力学的理论层面上的自由度：自旋。其它的微观粒子（不要求是基本粒子）当然也有自旋，它和“（空间的）波动性”一样，是微观粒子的一个内在属性。我们在这里，仅仅是“通过”电子来引入“自旋”这个概念。

在正式开始关于电子自旋的讨论之前，我们还有两点需要说明。第一点，就是“自旋”是一个与空间自由度完全不同的全新的“运动学”自由度。关于它的运动学表述不管是在数学形式上还是在物理内涵上，都与空间自由度的量子力学描述完全不同。严格意义上，这属于相对论量子力学的范畴。因此，要想理解自旋，对《量子力学》、《群论》、《高等量子力学》、《量子电动力学》这些课程的学习

³⁵⁹ 这是我们在空间进行测量引起的塌缩的结果。

习是绕不过去的³⁶⁰。但从通识教材撰写的角度，我们也不能过于严格地来追求这些东西。

基于这个考虑，我们会分两个部分来展开本节。首先，是关于人们在历史上是如何认识到有“电子自旋”这个事情的介绍。这会让读者对那段历史有段整体的了解。之后，为了给读者学习上述课程进行一定程度的铺垫和对自旋所体现出来的新的“运动学”内容进行强调，我们也会讲一下关于“自旋”运动进行描述的数学语言。这个数学语言和人们利用“仅包含空间坐标的希尔伯特空间中的矢量”来描述微观粒子在实空间中的波函数是完全对应的。人们可以把它理解为在实空间的基础上，加入一个分立的、二维的线性空间来进一步描述自旋自由度。这里，两个关键词。一个是描述电子自旋算符的“二阶、零迹、厄米矩阵”，一个是描述其变化的“二维特殊酉群(SU(2)群)”。其中，后者相对复杂一些。前者，还是可以用比较简单的语言不牵扯过多数学解释清楚的。因此，本节将分：1) 电子自旋自由度被发现的历史过程，2) 泡利矩阵的引入以及自旋所蕴涵的新的运动学内容，两个小节来展开。同时，我们还需要强调在上世纪二十年代末，人们仅仅是在几个当时认识地相对比较好的体系中意识到了自旋的存在(比如电子、光子、氢分子)，并对它们进行了一定程度的刻画。对更为普遍的微观粒子的自旋自由度的研究一直持续到了上世纪中叶【Milner, 2013】。

第二点需要说明的是从时间顺序上，人们关于自旋的认识与前面讲的不包含自旋内容的量子力学的认识是相互穿插的。换句话说，人们并不是先认识了空间自由度上的量子力学再开始考虑自旋自由度上的量子力学的。比如，1925 年的春

³⁶⁰ 这些课实际上多为研究生课程。在笔者读书的年代，很少有同学在本科学习它们。但在现在这种整体比较“卷”的环境下，很多本科生也都已经学了。于是，我在这里提一些。

天，克罗尼格和海森堡同时在哥本哈根的玻尔研究所访问。当时，克罗尼格已经有了非常令人兴奋的关于电子自旋的新理论（虽然这个理论还远远不完美）。同样在这个时间节点，海森堡也提出了矩阵力学的核心思想。有趣的是，玻尔在当时对这两个新思想的反应是完全不一样的。他认为海森堡的矩阵力学的物理意义是非凡的，但对克罗尼格的自旋理论却持质疑态度。由于泡利在之前也对自己的理论提出了质疑，克罗尼格甚至放弃了他的想法。幸运的是，乌伦贝克（George Eugene Uhlenbeck, 1900–1988 年）、高德施密特（Samuel Abraham Goudsmit, 1902–1978 年）在大半年之后提出了同样的想法，并将文章于 1926 年底正式发表。之后，在仅仅一年的时间内，电子自旋的概念就被物理学界广泛接受。基于电子自旋的概念，狄拉克更是在 1928 年提出了狄拉克方程。这也标志着量子论到量子力学的转变的完成，物理学革命正式结束。

8.4.6.1 电子自旋自由度被发现的历史过程

为了尽量准确并简洁地描述清楚这段历史，我们先从人们是如何关注这个自由度的开始介绍。这和人们在空间自由度上认识到量子力学的历史进程是有很大的相似性的，也和针对原子光谱的研究相关。但不同之处，是在这里人们必须关注磁场对原子光谱的影响。与之相关的效应叫塞曼效应，它是 1896 年由荷兰物理学家赛曼（Pieter Zeeman, 1865–1943 年）发现的，具体表现就是塞曼观测到磁场下钠原子的 D 谱线不再是之前的一条，而是劈裂为三条【Zeeman, 1896】。在此之前，类似谱线和原子是一一对应的。从 1860 年基尔霍夫认识到这一点开始，人们就认识到可以基于这一现象进行元素分析。基尔霍夫的学生门捷列夫甚至还基于这种研究建立了元素周期表来帮人们理解不同元素的物理与化学性质。

这塞曼这里，他认识到即使是同样的元素，只要加磁场，谱线也会发生变化。这是超出了传统的元素分析的内容，自然，也会蕴涵新的物理。

在塞曼发现塞曼效应之后，他的老师洛伦兹（Hendrik Antoon Lorentz, 1853–1928 年）马上基于量子化的电子轨道磁矩对其在理论上进行了一定程度的解释。他们也因此一起获得了 1902 年的诺贝尔物理奖³⁶¹。但需要说明的是在这个奖被颁布之前，在 1897 年，爱尔兰物理学家普雷斯顿（Thomas Preston, 1860–1900 年）就已经发现塞曼最早看到的钠原子 D 谱线的劈裂并非三条，而是很多条，谱线的结构也比塞曼最早的报道复杂很多【Preston, 1898】。洛伦兹的理论可以解释塞曼观测到的结果，因此人们把那个现象叫做正常塞曼效应。对于洛伦兹的理论解释不了的更为复杂的原子光谱劈裂现象，人们称之为反常塞曼效应。

这个疑问困扰了人们很久，直至电子自旋自由度的出现，才得以最终解决。期间，人们尝试了各种原子模型，甚至也会借助原子实而非价电子的角动量来进行解释。在这个过程中，玻尔-索末菲模型扮演了非常重要的角色【Sommerfeld, 1916a–1916b】。在 8.3.3 节，我们介绍过玻尔的原子模型。这个玻尔-索末菲模型是它的升级版。玻尔模型解释氢原子非常成功，但在解释其它原子的时候，就遇到了不少困难。其根本原因与对称性相关。在氢原子模型中，除了转动对称性，原子核与电子的相互作用势满足 $-1/r$ 这样一个特殊的数学形式，与电子原子核的距离成反比。这个数学形式会让电子轨道的对称性从转动群的 $SO(3)$ 变成一个

³⁶¹他们的获奖词是：in recognition of the extraordinary service they rendered by their researches into the influence of magnetism upon radiation phenomena。应该说，原子光谱的外场的响应这种现象一定是蕴藏新物理的。另一个粒子就是斯塔克效应，它由德国物理学家斯塔克（Johannes Stark, 1874–1957 年）在 1913 年发现，他也因此获得了 1919 年的诺贝尔物理奖。斯塔克的获奖词是：for his discovery of the Doppler effect in canal rays and the splitting of spectral lines in electric fields。从这些奖项的确定，读者也可以感受到“场与物质的相互作用”在物理学中的地位。

对称性更高的叫做 $SO(4)$ 的对称群 (图 8.18)。这也让相对简单的玻尔模型在这个体系中非常适用。但其它原子的外层电子和原子核的相互作用因为收到了内层电子的屏蔽, 不再满足 $-1/r$ 这样一个距离依赖关系。与之相应, 电子能级的能量不光依赖于主量子数 n , 还依赖于角量子数 l 。

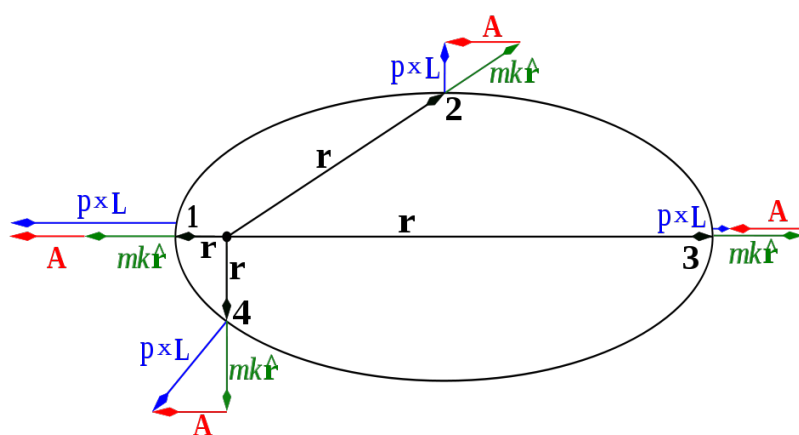


图 8.18 在势能满足 $-1/r$ 这样一个特殊形式的中心力场体系, 系统的对称群不是简单的转动群 $SO(3)$ 。在具有转动群 $SO(3)$ 对称性的体系, 物理上的守恒量仅仅是能量、总角动量、以及总角动量在某个方向的分量。因此, 在玻尔-索末菲的原子模型中, 有 n 、 l 、 m 三个量子数。在具备 $-1/r$ 这样一个势能项的中心力场体系, 除了这些守恒量, 本图中的红色箭头标出的矢量 $\vec{A}$ 也守恒。人们认识到这个守恒量的存在经历了一百多年, 从 18 世纪末、19 世纪初的拉普拉斯 (Pierre-Simon Laplace, 1749-1827 年) 开始, 到 20 世纪出的龙格 (Carl David Tolmé Runge, 1856-1927 年) 和楞次 (Wilhelm Lenz, 1888-1957 年)。因此, 这个守恒量也叫做 Laplace-Runge-Lenz 守恒量。具有这个守恒量的体系就是氢原子, 更高的对称性也保障了更高的能量简并度, 这也是为什么比玻尔-索末菲的原子模型更为简单的玻尔原子模型可以在氢原子中获得成功的原因。

这时, 如果再加上外磁场, 角量子数在某个方向的分量 m 也会起作用。因此, 磁场中即使只考虑电子的空间自由度, 其能量都会依赖于 n 、 l 、 m 这三个量子数。这三个量子数恰恰来自于空间的三个自由度。在玻尔-索末菲的原子模型中, 它们可以被考虑。因为这个原因, 在二十世纪第二个十年的后半部分和 20 年

代开始的时候，以索末菲课题组为中心，人们进行了很多的关于反常塞曼效应的研究【Debye, 1916】【Lande, 1921】【Lande, 1923】【Sommerfeld, 1923】。比如，有德拜、朗德（Alfred Landé, 1888 – 1976 年）、泡利、海森堡，都是他的学生。

在所有这些工作中，突破性的认识，目前人们认为是来自于 1922–1923 年期间索末菲、朗德、泡利的合作³⁶²。这些合作让他们开始认识到辅助量子数对理解反常塞曼光谱的重要性，也就是之前的 n 、 l 、 m 不够了。但开始，他们认为这个辅助量子数与原子实有关。1924 年底，泡利意识到原子的角动量只能来源于外层电子，否则塞曼效应分叉的宽度就将依赖于原子序数，而这与事实不符。但泡利没有往自旋这个方向进行思考。1925 年，来自美国的年轻学生克罗尼格（Ralph Kronig, 1904 – 1995 年）访问已经在图宾根大学任职的朗德³⁶³。朗德向他展示了泡利给自己的信件，其中提到在解释反常塞曼效应的时候， n 、 l 、 m 之外的第四个量子数不能归于原子实这样一个观点。既然来自于价电子，克罗尼格马上想到

³⁶²泡利当时刚刚从索末菲组里拿到博士学位毕业，海森堡还是学生。朗德毕业的要早一些。德拜比他们大很多，这个时候已经在哥廷根做过教授转到苏黎世理工学院的教授了。因此，在 1922–1923 这两年，主要是朗德、泡利、海森堡在做。

³⁶³这里有两点可以说明。第一点，在上世纪的 20 年代，美国最好的博士生在毕业之后到欧洲游学是一个时尚。像前面提到的鲍林、奥本海默、拉比，以及这里的克罗尼格，都是其中的代表。他们从欧洲游学回去之后，将最先进的量子力学、统计物理带回美国。加之一些欧洲科学家的加盟（比如爱因斯坦，以及后面要提到的乌伦贝克、高德施密特）、二战对欧洲的毁灭性打击，美国在短短十几年时间内一跃成为全世界的科学中心。第二点，朗德在 1921 年曾经被帕邢（Friedrich Paschen, 1865–1947 年）热情的邀请到图宾根大学工作，朗德也接受了邀请，并在那里工作了一段时间。但据朗德本人的回忆，那段经历很痛苦。图宾根大学的教授委员会中，有一帮非常反对聘用他的人。这些人认为他既是犹太人（当时的德国是反犹的）又是共产主义者（这个也是当时的一个社会现象）。朗德承认自己的犹太血统，但他早已放弃了犹太教（类似的事情也发生在玻恩身上，这是当时一批德国的犹太科学家的统一问题，他们更认同自己是德国人，但仍因为血缘被排斥），同时他也否认自己是共产主义者。上世纪 20 年代末，朗德访问美国后，迅速选择在那里生活。因此，很多文献介绍朗德的时候，就是 German-American Physicist。这个，和玻恩、海森堡、泡利他们的介绍方式是很不一样的。

如果不把电子当作点电荷，它自己是可以有一个自旋自由度的。只要将这个自由度量子化，并通过以电子为中心的坐标系与以原子核为中心的坐标系进行坐标变换，就可以引入一个自旋-轨道耦合项，来对反常塞曼效应进行一定程度的解释。当然，这个解释并不完美。比如，克罗尼格算出来的劈裂值是实验值的一半。并且这个差别是系统性的，不依赖于到底是哪个具体的能级。

当克罗尼格满怀期待找到泡利进行讨论的时候，泡利对他这个想法又提出了更多的质疑。泡利的理由非常简单，可总结为两个。一个是前面提到的理论值是实验值的一半的问题。另一个，是当时人们知道电子的半径大概的估计是 10^{-15} 米。对于这样一个尺寸的带点球体，如果想产生解释反常塞曼效应所需要的磁矩，那么这个球的边缘的转动速率需要比光速大一到两个数量级。这个是不符合狭义相对论的基本假设的。后来，有人说泡利在当时就因为这两点意识到了这个自由度意义非凡，并且认为它本质上一定没有经典对应的，只是他的追求完美的性格让他不能赞同克罗尼格当时对电子自旋的略显经典的描述。但作为一个历史事实，就是克罗尼格身为一个 21 岁的小伙，在当时确实很受挫。之后，克罗尼格结束了对图宾根的访问，来到哥本哈根。在这里，克罗尼格的观点同样遭到了玻尔、海森堡、克拉默斯（Hans Kramers，1894–1952 年）等人的冷遇。前面提到过，这个时间点恰恰也是海森堡提出矩阵力学的关键想法的时间点。考虑到克罗尼格只是一个从美国过来交流学习的小伙儿，之前并没有在这个群体中建立所谓的学术信誉，玻尔、海森堡、泡利、克拉默斯等人或许在心理上有轻视其想法的倾向³⁶⁴。同时，克罗尼格本人也还是太年轻，因此没有坚持，这也导致他最终没

³⁶⁴ 毕竟很多科学的思想在提出的那一刻都不是完美的，认可思想远比认可结果重要，就像他们认可海森堡的矩阵力学理论，在提出的时候也不是完美的，但他们认可海森堡的思想。

有将他的这个想法写成文章并发表。这无疑，是一个非常令人遗憾的决定。

仅仅几个月之后，1925 年夏，在荷兰的莱顿大学，埃伦费斯特的两个学生乌伦贝克 (George Eugene Uhlenbeck, 1900–1988 年)、高德施密特 (Samuel Abraham Goudsmit, 1902–1978 年) 关注了同样的问题。他们也注意到了泡利的关于第四个自由度的理论。之前，他们对量子理论就有“每个量子数都对应一个自由度”这样一个理解。因此，他们认为这第四个量子数既然和价电子相关，那么价电子必然有个人们之前忽略掉的自由度。对于点电荷，欧氏空间的三个自由度就已经对应了 n, l, m 这三个量子数。那么第四个量子数一定是要超越“电子是点电荷”这样一个“运动学描述”的。很自然，他们也想到了自旋。只要将自旋自由度量子化，反常塞曼效应就有可能被更好地解释。基于这样一个理解，他们在 1925 年完成了关于电子自旋的理论工作，并于 11 月发表在一个德文杂志 *Naturwissenschaften* > (我们翻译为《自然科学》) 上³⁶⁵ 【Uhlenbeck, 1925】。

1925 年 12 月，莱顿大学举办了一个庆祝洛伦兹获得博士学位 50 周年的活动。在这个活动中，爱因斯坦对乌伦贝克、高德施密特的工作进行了鼓励【傅海辉，2002】。有趣的是，在玻尔、海森堡又一次听到与克罗尼格类似的想法的时候，他们都选择了一定程度的接受，虽然之前克罗尼格的理论中的两个问题依然存在。因此，玻尔也与乌伦贝克、高德施密特进行了进一步的交流。但遗憾的是，泡利依然坚持之前的想法。1926 年 2 月，*Nature* 杂志刊登了乌伦贝克、高德施密

³⁶⁵ 这个过程中，埃伦费斯特对于这两个年轻人的新想法始终是支持的。他也带着这两个年轻人找了洛伦兹。洛伦兹在很认真地听取了他们的想法后，并没有马上给答复，而是跟他们说自己要想一段时间。在这个过程中，乌伦贝克和高德施密特完成了第一篇文章并进行了投稿。之后，洛伦兹对他们进行了回复，从经典电动力学的角度提出了不少问题。这两个人当时也想过撤稿。但埃伦费斯特对他们说的是“你们年轻，犯些错误没什么”。类似这种包容性的态度，在笔者看来是好导师的一个重要标准。

特与玻尔就自旋概念进行讨论的邮件及评论【UhlenBeck, 1926】。

同样在这个时间，来自英国的托马斯（Llewellyn Hilleth Thomas, 1903 – 1992 年）通过引入相对论效应，解决了理论值与实验值相差一倍的问题【Thomas, 1926】。至于经典图像中电子球边界的速度依然超过光速，那与量子力学当时的问题一样，属于“运动学”方面的新内容，并不影响观测。至此，电子自旋这个概念被物理学界接受。人们也开始针对它进行各种理论与实验的深入研究，包括 1927 年泡利通过泡利矩阵将薛定谔方程变为两分量方程进而描述自旋-轨道耦合的工作【Pauli, 1927a】、同期达尔文的类似工作【Darwin, 1927】、1928 年狄拉克的相对论波动方程【Dirac, 1928】。这些内容，加上之前已经存在的 1924 与 1926 年费米和狄拉克完成的关于费米-狄拉克分布的工作【Fermi, 1924】【Dirac, 1926】、1925 年泡利完成的不相容原理的研究【Pauli, 1925a–1925b】，我们教科书中经常呈现的关于电子自旋的基本内容就基本成型了。

最后，需要说明的是在很多材料上人们会通过介绍 1921–1922 年的施特恩-格拉赫实验 (Stern–Gerlach Experiment) 来引入电子自旋【Stern, 1921】【Gerlach, 1922a–1922c】。但实际上，在这个实验最初的理论解释中，并不牵扯到电子的自旋自由度，而是基于量子化的轨道角动量来进行的。现在，人们习惯于从这个实验出发开始解释电子自旋自由度与量子力学基本原理的【Sakurai, 2017】【孙昌璞, 2024】【曹庆宏、杨李林, 2025】。从知识传播的角度，这当然是非常高效的。但为了能够让读者更加准确的了解这段历史并在以后的类似环境中进行相同的思考，我们在接受这种利于知识传播的做法时，也必须把这些细节交代清楚。

同时，我们也需要说明这个施特恩-格拉赫实验本身也没有获得诺奖。斯特恩 (Otto Stern, 1888 – 1969 年) 在 1944 年获得了 1943 年的诺贝尔物理奖，他的

获奖词是：for his contribution to the development of the molecular ray method and his discovery of the magnetic moment of the proton。而格拉赫，则始终没有获得诺奖。上面这些在电子自旋发现过程中起到关键作用的物理学家们，他们有不少是获得过诺奖的，但得奖理由都不是自旋。乌伦贝克、高德施密特也一直都没有获得来自诺奖委员会的认可。作为一个从事物理学研究若干年的一个科研人员，笔者能够感受到我们的民众对诺奖的渴望。如果将这种渴望看作是对科学精神的渴望，笔者肯定是非常认同的。但很多时候，笔者也能感受到很多时候我们的实际情况并不是这样，对世俗荣誉的渴望或许占据了更大的比重。这就使我们的科学研究完全偏离了本书强调的自然哲学、物理学的本质。电子自旋，在笔者看来是一个极其深刻的物理学内容。本小节提到的这些工作，也都是意义远大于相关荣誉的工作。值得我们慢慢品味。

8.4.6.2 泡利矩阵的引入以及自旋所蕴涵的新的运动学内容

在讲完上述故事之后，作为从事物理学研究的教研人员，笔者还是忍不住想简单解释一下自旋为什么神奇？它是怎样扩展了量子力学背后的“运动学”内容？以及如何用数学来描述这个全新的自由度的？这就把我们带到了本小节的第二部分。

这里有四个关键词：泡利矩阵（Pauli Matrix）、二阶零迹厄米矩阵、二维特殊酉群（SU(2)群）、旋量波函数（spinor wave function）。它们听起来都比较抽象，至少笔者当年在面对这些概念的时候，曾经花了很多时间来学习但依然容易搞错。这些年，随着笔者承担的一些课程的教学工作的进行以及科研上对相关内容的尝

试，渐渐有了一些新的理解。基于这些理解，笔者认为它们背后的逻辑实际上是非常简单的！我们只需把自己放到上世纪二十年代，把自己想象成泡利或者狄拉克这样的人物，在理解了薛定谔的量子力学的基础上来理解塞曼效应即可。

通过这种方式，具有一定物理学基础的读者应该都能比较容易地理解与自旋相关的物理内容。基于这个考虑，笔者曾经尝试在本小节分三个部分来完成这个任务。但在进行了几天的努力之后，笔者还是不得不放弃。原因，很简单，就是中间还是会牵扯到一些群论的内容，具体体现在文献【李新征, 2024】的第五章。如果想展开的话，还是需要花比较长的篇幅。最后，笔者不得不进行一个妥协，把重点放到泡利矩阵的引入以及它对二阶、零迹、厄米矩阵的遍历上。这样做的一个好处是通过泡利矩阵，读者应该能够在一定程度上理解自旋自由度在“运动学”上为微观粒子赋予的量子力学的新的内容。同时，也不至于过多的陷入在描述类似空间转动这样的操作对电子自旋自由度的影响时必须引入的二维特殊酉群这样的偏数学的语言的理解中。笔者希望通过这一个小节，能让读者理解泡利在 1924 年为什么要引入泡利矩阵？以及泡利矩阵带给了我们什么样的比薛定谔方程更多的量子力学的新内容？

为了达到这个目的，我们要把自己放到泡利的位置。我们需要明确的第一点，是他是索末菲的学生，一直关注反常塞曼效应的研究。我们还需要知道他的师弟海森堡在 1921 年的时候就引入了角动量半量子数的概念来理解反常塞曼效应（当时这个角动量还是轨道角动量）。之前，像玻尔、索末菲等人使用的都是整数量子数【Bohr, 1913a–1913c】【Sommerfeld, 1916】。当然，在 1921 年这个时间节点，量子力学远远没有建立，自旋的概念也没有被提出。因此，海森堡的轨道角量子数为半整数的概念虽然获得了包括其导师索末菲在内的一些人的认可，但

也同样备受争议。有一种说法是这种争议也使得他的博士论文不得不选择另外一个关于湍流的题目来完成³⁶⁶。

有趣的是，泡利在海森堡提出这个半量子数的概念的时候（1921年），是这个概念的一个反对者。他的理由很简单：既然有 $1/2$ ，为什么没有其它分数？但是到了1924、1925年这个时间节点，当泡利认识到第四个量子数必须来自于价电子，而实验上在加入外磁场后，最简单的反常塞曼效应就是把原来一个峰的谱线劈裂成了两个， $1/2$ 对应的 $2L+1$ 恰恰等于2。他也就在一定程度上接受海森堡关于存在半量子数的主张。这就为泡利矩阵的诞生奠定了最重要的基础。

我们现在如果理解泡利矩阵的话，我们知道它对应下面三个简单的 2×2 的矩阵：

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

公式 8.138

它们都是二阶、零迹、厄米的。电子自旋算符，最为一个算符，有两个性质。首先它是一个矢量，第二它是基于泡利矩阵这样一些 2×2 的矩阵构建的。它的形式为：

$$\hat{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma} = \frac{\hbar}{2} [\sigma_x \vec{i} + \sigma_y \vec{j} + \sigma_z \vec{k}] = \frac{\hbar}{2} \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{i} + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \vec{j} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \vec{k} \right]$$

公式 8.139

这里，已经有了一个非常新奇的运动学内容，就是我这个矢量在欧氏空间是有三个分量的。同时，我的每个分量不是数，而是一个 2×2 的矩阵。

之后，当公式 8.139 表达的自旋算符与外磁场相互作用的时候，这个作用项

³⁶⁶更糟糕的是，他的博士论文答辩表现也不好。维恩是主考官，对他很不满意。这也给年轻的海森堡造成了一定的打击。好在导师索末菲对他还是足够认可的，使得他可以顺利毕业。

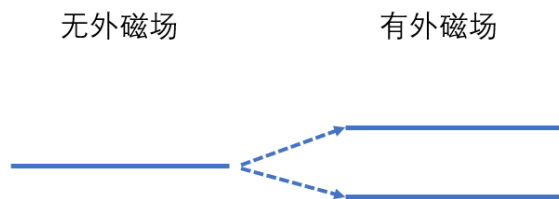
对系统哈密顿量的贡献就等于：

$$-\frac{e}{m_e} \hat{S} \cdot \vec{B} = -\frac{e\hbar}{2m_e} [\sigma_x B_x + \sigma_y B_y + \sigma_z B_z] = -\frac{e\hbar}{2m_e} \begin{pmatrix} B_z & B_x - iB_y \\ B_x + iB_y & -B_z \end{pmatrix}$$

公式 8.140

从公式 8.138，我们可以看到泡利矩阵包含了二阶零迹厄米矩阵的所有三个维度。这是因为既然厄米零迹，就说明对角项必须为实数且合为零，而非对角项就必须实部相等、虚部相反。当这样一个自旋算符通过其自旋角动量与外场的耦合的时候，通过外场参数 B_x 、 B_y 、 B_z 的变化，人们可以遍历所有的二阶、零迹、厄米矩阵。这也给了实验观测所有的磁场变化的自由度。下面我们需要解释的是，就是泡利是怎么想到要引入这三个矩阵来遍历所有的二阶、零迹、厄米矩阵的？

这个原因也很简单，从 8.4.3 节的讨论，我们知道固定边界条件的波动方程会给出分立的本征振动模式。这些分立的本征振动模式的本征值就是量子力学中的本征态的能量，本征振动模式是本征态。这些本征态可以有分立的轨道角动量。这些分立的轨道角动量可以用来解释塞曼效应。由于轨道量子数是整数，因此塞曼效应中观测到的劈裂的能级数都可以用奇数（ $2L+1$ 为奇数）来描述。而反常塞曼效应对应的劈裂的能级数需要用偶数来描述，对应的角动量量子数是半整数。这就意味着为了理解反常塞曼效应，在公式 8.118（薛定谔方程）对应的能级劈裂的基础上，需要再引入一个 2×2 的矩阵让能级再劈裂一次（图 8.19）。后来，人们意识到这个对应的物理就是电子自旋。历史上，真实的时间顺序是泡利在研究反常塞曼效应的时候根据海森堡轨道半量子数的概念首先提出泡利矩阵，然后人们引入自旋，最后人们再认识到需要借助于泡利矩阵来理解电子自旋。其中，这个关键的一分为二的劈裂，可参考图 8.19 来理解。



$$-\frac{e}{m_e} \hat{S} \cdot \vec{B} = -\frac{e\hbar}{2m_e} [\sigma_x B_x + \sigma_y B_y + \sigma_z B_z] = -\frac{e\hbar}{2m_e} \begin{pmatrix} B_z & B_x - iB_y \\ B_x + iB_y & -B_z \end{pmatrix}$$

图 8.19 自旋 1/2 引入后，能级在外磁场下从 1 劈裂为 2 的示意图。这里，泡利矩阵既简洁又准确。它完美地刻画出了一个力学量在这里应该有的性质（二阶、零迹、厄米）。与外场的耦合，通过外场参数的变化，人们也可以通过泡利矩阵来遍历所有的二阶、零迹、厄米矩阵。这也给了实验观测所有需要的自由度。

这样的话，关于自旋的运动学在逻辑上就变得非常简单了。结合图 8.19 的图示，我们还可以把它再进行一个展开。为了描述自旋引入的劈裂，人们需要一个力学量算符。既然是力学量算符，它就必须是厄米的。同时，在外场引入后，这个劈裂是在原来的基础上向上、向下等间距移动，劈裂为两个，因此它必须也是二阶的和零迹的。合在一起，对自旋算符就有了二阶、零迹、厄米的要求。相应的，泡利就提出了公式 8.138 中的三个泡利矩阵，来遍历这些二阶、零迹、厄米矩阵所描述的力学量算符了。

在这个基础上，人们还可以进一步考虑自旋与轨道之间的耦合。我们用最简单的单电子的例子来进行说明，它的总的角动量 $\hat{J}$ 是其轨道角动量 $\hat{L}$ 与自旋角动量 $\hat{S}$ 的矢量和：

$$\hat{J} = \hat{L} + \hat{S}$$

公式 8.141

由于电子自旋角动量在任何一个方向的分量就是量子化的 $\hbar/2$ 与 $-\hbar/2$ ，其波函数也会变成下面这种所谓“旋量（spinor）波函数”的形式：

$$\Psi_{jm}(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} \Psi_{jm}(\vec{r}, \hbar/2, t) \\ \Psi_{jm}(\vec{r}, -\hbar/2, t) \end{pmatrix}$$

公式 8.142

这里，我们把这个方向选为 z 轴。公式 8.138 中的 $\Psi_{jm}(\vec{r}, \hbar/2, t)$ 就是该本征态自旋在 z 轴投影为 $\hbar/2$ 的空间依赖部分， $\Psi_{jm}(\vec{r}, -\hbar/2, t)$ 为该本征态自旋在 z 轴投影为 $-\hbar/2$ 的空间依赖部分。大家可以理解为：考虑了电子自旋的波函数，是在原来的不考虑电子自旋的波函数的基础上，维度又增加了一倍即可。

至此，关于物理学革命中人们就电子自旋这个自由度的探索过程和关键的关于“运动学”的量子力学新内容我们也都介绍完毕。至于如何在物理学研究中运用这些新内容，感兴趣的读者请参考相关专业文献来进行进一步的学习【Sakurai, 2017】。对于高自旋维度的体系，人们只需把公式 8.142 描述的旋量波函数改为一个 $2S + 1$ 维的旋量波函数即可³⁶⁷。相应的 $2S + 1$ 维度的自旋与外场的相互作用，人们也需要将 2×2 的泡利矩阵替换为这些 $2S + 1$ 维度的自旋空间中的角动量生成元所对应的矩阵来进行相似处理。物理学革命中人们在量子力学层面对微观粒子的新的“运动学描述”，在考虑了实空间的矩阵以及自旋空间的类似于泡利矩阵（自旋 $1/2$ 粒子体系）的新内容之后，也基本完整。剩下的，就是对这些物理学新思想的细化与进一步应用了。

8.4.7 力学理论的传承与革命

到这里，量子力学的主要内容我们就基本讲完了。我们最后用一个小节来讨论一下量子力学相对于传统的经典物理学，到底给了我们什么样的对物理学的新

³⁶⁷对单电子， $S = 1/2$ ，因此 $2S + 1 = 2$ 。对高自旋的体系， $2S + 1$ 就是更大的整数。

的认识？在笔者读书期间，经常听到的观点就是“不要企图去理解量子力学，会用就行”。笔者对这种观点极度不认同！因此，在本节结束的时候，希望用一个小节来针对这个问题进行一些讨论。

首先笔者希望说明的是量子力学在“力学”层面，与统计物理与经典力学有着千丝万缕的联系。像经典力学，量子力学中的很多我们看起来很奇怪的方程，都有其经典力学的对应。比如，在 8.4.2 小节，讲矩阵力学的时候，针对简谐振子这个例子，运动方程直接就是从经典力学来的。再比如，在 8.4.3 小节，讲波动力学的时候，薛定谔方程也可以通过与经典力学的对应得到。实际上，在量子力学中，我们经常会接触到一个名词，叫对应性原理 (Correspondence Principle)。它是由玻尔在 1920 年提出来的【Bohr, 1920】，在矩阵力学与波动力学的产生过程中都起到了非常重要的作用【Heisenberg, 1925】【Schrödinger, 1926a】。它的意思就是量子力学在经典极限下，必须给出与经典力学相同的结果。这也是量子力学与经典力学内在联系的一个体现。

除了经典力学，统计物理在量子力学出现之前也已经是物理学里面的一个基础理论了。我们经常说量子力学从本质上来讲是统计的，这也是对其与统计力学的内在联系的一种强调。就像图 8.17，我们在讲解波函数的物理意义的时候，采用的就是系综与几率的解释。历史上爱因斯坦一直对这个说法持否定态度，但从现在看的话，这或许也是爱因斯坦为数不多的被证明错误的观点。毕竟在历史上我们一次一次的被爱因斯坦的预言或者由爱因斯坦的理论推出的结论所震撼，比如时空扭曲【Dyson, 1920】、引力波【Abbott, 2016】、玻色-爱因斯坦凝聚【Anderson, 1995】【Davis, 1995】、激光【Maiman, 1960】、黑洞【侯嘉昊, 2020】【Giacconi, 1962】。像量子力学里面的波函数的统计性诠释这种在后期被无数实验证明但又

被爱因斯坦断然拒绝接受的具有如此深邃的思想内容的物理学理论确实不是太多。因此，毫不夸张地说，量子力学虽然新颖，但它与经典力学、统计力学都还是存在千丝万缕的联系。

同时，我们也需要强调量子力学是经过物理学革命产生的力学，革命这个特质在量子力学里面有明确的体现。在 8.4.1–8.4.3 小节，我们强调了波粒二象性、粒子运动的矩阵描述。在这里，人们对于微观粒子的运动的描述一定要脱离传统的经典力学中的“轨道”概念的理论框架。传统的轨道可以用傅里叶变换来描述。而一个含时演化的波，则是这种傅里叶变换的扩展，必须依赖于线性代数的工具进行表达。这是与经典粒子的“运动学”完全不一样的微观粒子运动的“运动学”表达。

作为这种表达的结果，在力学层面，我们又会得到很多新的内容。比如，我们无法同时确定位置与动量。再比如，我们对微观粒子的描述必须基于“几率波”这样的概念来进行。在海森堡、薛定谔的原始文章中，我们应该都可以看到作者对这个关键词的强调。区别的地方，就是在矩阵力学中，分立的能量通过矩阵的分立的本征值获得。而在波动力学中，分立的能量通过固定边界条件的偏微分方程的本征振动模式来表达。

最后，我们可以看一下自旋。在量子力学最终被建立的最后一个阶段，人们对“自旋”这个自由度的认识也为其添加了全新的、量子的内容。这个内容体现在 8.4.6 小节中我们对泡利矩阵的介绍上，也体现在不包含自旋的“标量波函数”在考虑自旋后必须被“旋量波函数”所替代这一点上。薛定谔方程这样一个波动方程本身并不需要用矩阵来进行表达（虽然求解的时候需要借助矩阵进行求解），而狄拉克方程这样一个方程本身必须用矩阵来进行表达，其本质的不同，就是自

旋自由度的引入。与之相应，“标量波函数”也被“旋量波函数”所替代【Sakurai, 2017】。

8.5 破局 2：相对论

目前，我们在 8.1 与 8.2 节提到的十九世纪末、二十世纪初涌现出的对经典物理学提出了严重挑战的物理学实验中，除了迈克尔逊-莫雷实验，基本上都可以被量子理论以及量子力学的发展所解释。人们取得这个成就的时间节点是上世纪二十年代末。

就历史发展的前后顺序而言，迈克尔逊-莫雷实验获得解释的时间节点实际上要更早一些。它在 1905 年就被爱因斯坦的狭义相对论完全解释清楚。在此之后，爱因斯坦更是将引力引入其相对论的理论框架，于 1915 年底完成了广义相对论。一定程度上，我们可以说两者合在一起形成的相对论理论体系是针对“高速运动的物体”从“时空”的角度对“运动”的超越“经典理论”的表达，量子力学是针对“微观粒子”从“波动性”、“自旋”的角度，对“运动”的超越“经典理论”的表达。相对论与量子力学，构成了我们目前使用的新物理的基石³⁶⁸。

在前面的讨论中，出于从基尔霍夫开始的研究的连续性的考虑，我们一直关注的就是量子力学这一支³⁶⁹。现在，我们再回过头，将时钟拨回到十九世纪末，来体会爱因斯坦的这套顶级的物理学理论。为了阅读起来顺畅，我们按：1) 相

³⁶⁸当然，物理学革命之后还有很多新的发展。比如，我们现在说新物理的时候喜欢使用“场”的语言。这与量子力学发展起来之后，人们在对光场的进一步量子化的过程中发展起来的量子电动力学理论是密切相关的。再比如，量子色动力学、弱电统一理论。这些都是物理学革命之后的物理学的新的进展。基石，只有量子力学与相对论。

³⁶⁹毕竟这一支都可以从基尔霍夫的研究延展下来进行讨论。

对性原理、绝对时空、以太, 2) 斐茨杰拉德、洛伦兹与庞加莱, 3) 狭义相对论, 4) 广义相对论, 共四小节来展开。

8.5.1 相对性原理、绝对时空、以太

本小节我们讨论三个概念, 相对性原理、绝对时空、以太。其中, 相对性原理是爱因斯坦的狭义相对论两条最基本的假设之一³⁷⁰。但需要说明的是人类关于这一原理的思考并不是从爱因斯坦才开始的。爱因斯坦能够获得突破的关键点是他针对十九世纪末麦克斯韦的电动力学面对的问题, 在这个原理以及光速不变原理的基础上理解了同时性问题 (simultaneity, 我们在 8.5.3 小节会详细介绍)。

之后, 基于对同时性的认识, 他从相对性原理、光速不变原理出发导出了洛伦兹变换这个由洛伦兹提出但没有解释的时空变换形式, 进而构造了狭义相对论的力学理论体系。在讲解这个理论体系之前, 这本小节开始的时候, 我们先将讨论的重点放在“人类关于相对性原理的思考”上, 进行一些针对历史的回顾。这与物理学的一个核心任务就是理解运动是密切相关的。在人们对相对性原理进行思考的初期, 绝对时空与以太是两个绕不过的概念(我们把自己放在古人的位置, 我们也绕不过)。但基于这些概念来理解自然界的话, 会带来一些问题。电动力学在十九世纪末对绝对时空观的挑战就是最典型的一个例子。因为这个历史顺序, 我们会把这个挑战当做本小节的落脚点来处理。

公元二世纪, 当托勒密建立地心说的时候, 他在他的著作《至大论》(<Almagest>) 中, 为了驳斥古希腊也有过的日心说³⁷¹, 就有这样的话: 如果地

³⁷⁰ 另一条为光速不变假设, 两个假设都以原理的形式提出, 后面我们会细讲。

³⁷¹ 2.6 节我们提到过, 古希腊存在过日心说, 代表人物是阿里斯塔克斯 (Aristarkhos, 约公元前 310-230 年)。

球绕太阳运动，那么天上的云将按相反的方向运动，但实际上我们并没有看到这些³⁷²。很显然，这是基于古希腊、古罗马的时候人们对运动的认识展开的讨论³⁷³。托勒密认为，如果地球绕着太阳转，那么地球上的其它物体（比如云）和地球并没接触，就应该不动。这样的话我们看到的云就应该沿相反的方向运动。但事实是，我们并没有看到云向另一个方向运动。因此，他推断地球就不可能绕太阳转动³⁷⁴。从这段论述，我们可以看到在托勒密那里，他已经对运动的相对性有了一定的思考。

到了哥白尼的时代，虽然他于去世前发表了《天体运行论》(< De revolutionibus orbium coelestium>），但客观来讲这本书在之后的几十年并没有获得很大的影响，直到伽利略的出现。从一个学物理的学生来看哥白尼与伽利略的区别的话，除了第三章讲到的伽利略那个时候更新版的日心说与天文观测更符合，从力学角度看，哥白尼提出的日心说描述的是宇宙的一个新的结构，而伽利略的学说则包含了更多的关于运动的思考。最简单的一个例子就是我们在第四章提到了牛顿力学的第一定律就来自伽利略。它说的是物质在不受外力的情况下，将保持静止或匀速直线运动状态。我们总强调的近代物理学开始于伽利略，在这里也有体现。

除了这个例子，本节的主题“相对性原理”也是又伽利略明确提出的。它来自于伽利略在其代表作《两个世界的对话》(全称是《关于托勒密和哥白尼两大世

³⁷²<Almagest>, Book 1, Section 7.

³⁷³相信初中的时候很多读者都会被老师问为什么跑起来能感受到风？这与托勒密在这里进行的思考在本质上就是一样的。

³⁷⁴这里，甚至他都没有提到地球的自转。这与他的宇宙观（地心说）也是一致的。

界体系的对话》，<Dialogue Concerning the Two Chief World Systems>，有时也简称《对话》）中来自自己的代言人萨尔维亚蒂（Salviati）的一个思想实验：假想你自己和一些朋友处在一个船舱里，船舱中有沙漏以及蝴蝶这样的小飞虫，还有一个鱼缸。那么这个船静止时，以及匀速运动的时候，你处在船舱中观察这些物体的运动，你是无法区分这个船是在运动还是静止的。换句话说，在伽利略的时候，他就给出了惯性系中的力学规律不会随速度发生变化这样一个物理学规律。在牛顿的力学体系中，它可以作为三大定律的一个推论存在。与之相应的时间和空间的变换，我们在后来也称为伽利略变换。二十世纪初出现的洛伦兹变换，就是对伽利略变换的修正，进而使得麦克斯韦方程组在这个变换下具有不变的性质。当然，这是后话。从伽利略到洛伦兹、庞加莱与爱因斯坦，人们还是经历了“经典的时空观的一系列的改变”所带来的阵痛的。

整体而言，十九世纪中后期之前，人们对牛顿力学以及伽利略的相对性原理还是非常满意的。比如，当人们认识到地球由于自转并不是一个很好的惯性系的时候，人们可以借助于傅科摆这样的设备，在室内就可以“看到”这个自转带来的效果³⁷⁵。这个力叫做科里奥利力，我们在高中物理的学习过程中也接触过。对于自转中的地球这样的非惯性系统，人们可以把它放到一个惯性系里面，基于这个惯性系，利用牛顿力学来进行理论上的描述。不自转的地球可以被近似为这样一个惯性系。同样，太阳系本身也可以定义一个惯性系，银河系也可以定义一个。其中，基于银河系定义的惯性系在与其它近似的惯性系进行比较的时候，在绝对

³⁷⁵傅科摆由法国物理学家傅科（Jean Bernard Léon Foucault，1819 - 1868 年）于 1851 年设计并在巴黎著名的建筑先贤祠（Paris Panthéon，原意是巴黎的众神殿）中展示给大众。现在大家去巴黎旅游的话也可以参观。

时空观的理论框架下，更是可以被认为是静止的那个绝对惯性系³⁷⁶。

需要说明的是，这样一个绝对惯性系的图像与十九世纪的宇宙观是一致的。1918 年之前，人们一直认为太阳系就在银河系相对中心的位置，而不是边缘【Shapley, 1918】。同时，直到二十世纪二十年代，人们才逐渐认识到银河系只是宇宙中的一个极其普通的星系，除了银河系还有其它的系外星系【Hubble, 1926】。因此，在十九世纪末，把银河系当作绝对静止的惯性系就是一个很合理的选择。太阳系绕其中心运动，整体被认为是一个平动。

这个时候，按照亚里士多德的哲学（认为月上世界充满了以太），当时的物理学是完全基于银河系这个充满以太的绝对惯性系通过各种坐标变换来构建的（图 8.20）。从太阳发出的光到达地球，按照传统的波动理论的观点，是需要介质的。当时，人们认为这种介质就是以太。既然是介质，太阳系在其中运动的时候，运动的相对性一定会带来风，就像我跑动起来会感受到风一样。但很遗憾，人们并没有观测到这个“以太风”。同时，由于我们在地球上可以看到太阳光这样一个“电磁波”，像“luminiferous aether theory（传播光的以太理论）”这样的词在当时的物理学论文中就经常出现。现在我们教科书上，人们在讲到当时的电动力学所面临的相对运动的时候，也会经常用到“以太”这样的名词，虽然它的存在始终没有被实验观测所证实。

³⁷⁶这个定义在哲学上已经蕴藏了一个问题，那就是银河系到底动不动？所有这些疑点，在相对论出来之后，都得到了很好的解答。

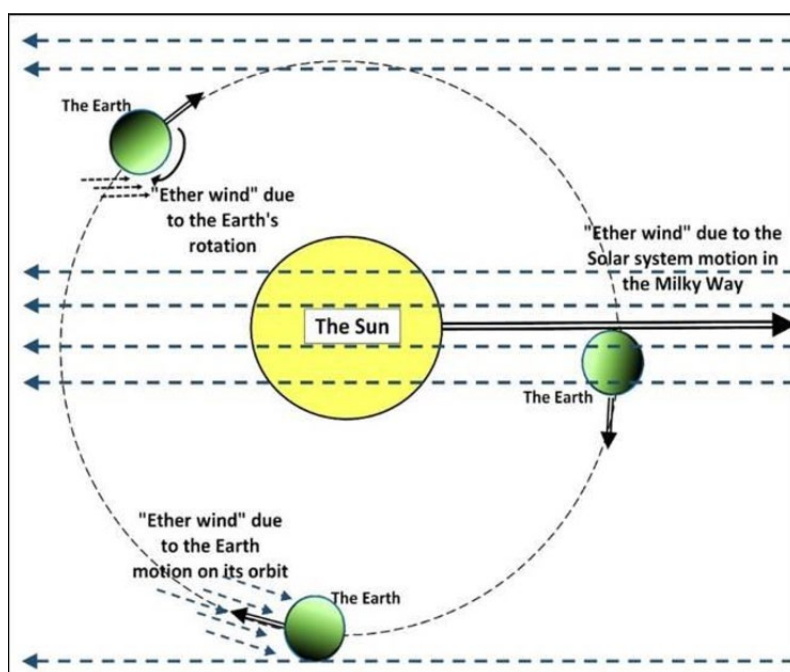


图 8.20 假设宇宙（十九世纪末人们以为就是银河系）中存在绝对惯性系，其中又充满了以太。那么，就会在太阳系都应该会感受到一个“以太风”。绕太阳运动的地球，在这个基础上，还有一个公转与自转带来的部分。虽然人们当时针对以太风进行的所有测量没有检测到它的存在，但在当时人们脑子中的时空观，还是图中的这个绝对时空观，直到狭义相对论的出现。

同时，我们还需要说明在十九世纪末人们对力的来源有两个认识，一是万有引力，二是电磁力³⁷⁷。人们虽然不知道万有引力的来源³⁷⁸，但与万有引力相关的诸多现象，人们是可以很好的描述的。比如，在绝对时空的概念中，科里奥利力就可以被很好地描述。除了科里奥利力，其它问题也都可以被描述地很好。1846年海王星的发现更是将这个基于绝对时空观与牛顿力学的理论体系的成功推到了顶峰。当时唯一的一个类似理论无法解释的现象是水星近日点的进动问题（图 8.21）。这个问题在当时的天文观测中已经非常明显了，但并没有引起很多人的关

³⁷⁷强相互作用与弱相互作用都是物理学革命之后人们才认识到的。

³⁷⁸这个需要等到广义相对论出来。

注。说原因的话，一个或许是对这个非常专业的天文观测感兴趣的人也不是那么多。另外，人们也在尝试在经典力学与绝对时空观的理论框架下的需要一些新的可能的解释机制。因此，我们可以说真正让人们认识到经典时空观必须做出改变的实验，是来自于电磁学的。

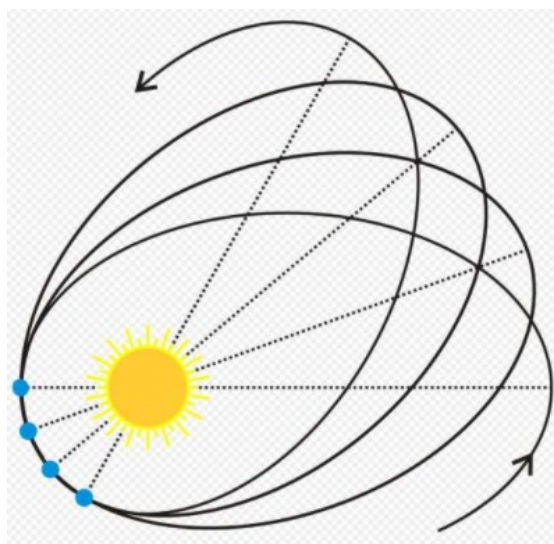


图 8.21 水星近日点的进动问题示意图。在水星绕太阳的进行的轨道运动过程中，近日点会在每个周期发生一定的进动（图中以夸张的手法用蓝色点标出了这个的变化）。这是在 1859 年，法国天文学家勒威耶发现这个进动值与天文观测的数据存在明显分歧（观测值比理论计算值要快大约 38 角秒/世纪，后来更精细的计算表明这个值应该说 43.11 角秒/世纪）。我们前面提到过，勒威耶在海王星的发现过程中发挥了关键作用。按照类似思虑，勒威耶认为比水星更近应该有个水内行星。这就是我们在正文中提到的“人们也在尝试在经典力学与绝对时空观的理论框架下的需要一些新的可能的解释机制”。但经过多年观测，人们并没有发现这个水内行星。由于没有发现并不代表没有，这与迈克尔逊-莫雷实验对绝对时空观的直接挑战在性质上是不一样的。人们一直没有认识到这个一定就是绝对时空观的问题，直到爱因斯坦理论广义相对论对其进行了解释。

1865 年，当电动力学的四个基本方程以较为繁琐的二十个分量方程的形式

出现的时候，与电、磁、光相关的现象的理论描述就已经得到了统一³⁷⁹。基于这个理论，1883年，作为麦克斯韦理论的一个鉴定的支持者，来自爱尔兰的理论物理学家斐茨杰拉德（George Francis FitzGerald，1851–1901年）预言振荡的电流可以产生电磁波。1887年，赫兹的实验证实了电磁波的存在。这也为麦克斯韦方程组这样一个基于“场”来描述电、磁、光相关现象的统一理论提供了一个最强有力的支持。但麦克斯韦方程组的成功，很快就被迈克尔逊-莫雷实验对绝对时空观的之一蒙上了一层深深的阴影（关于这个实验，我们在8.2.1节已经进行了相对详细的介绍）。

综上，如果用一句话来总结当时物理学在这个方面遇到的困境的话，我们可以进行如下表达：在十九世纪末这样一个时间节点，人们知道力有两种来源，一种是电磁力，一种是万有引力。上述讨论告诉我们与万有引力相关的问题中水星近日点的进动是一个问题，但当时人们并没有意识到³⁸⁰。让人们意识到绝对时空观的问题的，是与电磁现象相关的实验与思考。其中，迈克尔逊-莫雷实验以最直接的方式对绝对时空观提出了挑战。以爱因斯坦为代表的物理学家们正是在对这类现象寻求理论解释的过程中，发展出了相对论的相对时空理论。

8.5.2 斐茨杰拉德、洛伦兹、庞加莱

目前多数教材在讲到相对论的时候，都会把1905年爱因斯坦发表论文《论运动物体的电动力学》作为最重要的标志事件【Einstein, 1905b】，从这个事件出

³⁷⁹在4.5.3节我们提到过，我们现在熟悉的麦克斯韦方程的形式来自十九世纪末期亥维赛（Oliver Heaviside，1850–1925年）、吉布斯（Josiah Willard Gibbs，1839–1903）、赫兹（Heinrich Rudolf Hertz，1857–1894）对起进行了整理。这个不影响1865年麦克斯韦的原始方程组的物理意义。

³⁸⁰直到爱因斯坦的出现。

发进行阐述。但在 1905 年之前，比爱因斯坦更资深的一些物理学家们，实际上已经进行了一些卓有成效的探索。本着尊重历史的原则，我们有必要对这些前期的探索进行一些介绍。

十九世纪的八十年代，麦克斯韦已经去世了³⁸¹。在电动力学的研究中，斐茨杰拉德作为麦克斯韦理论一直以来的一个坚定支持者，是有很高的学术地位的。他当然会注意到迈克尔逊-莫雷的实验。但他无力从根本上解决这个问题。于是，他提出了一个运动物体在运动方向会随着速度的增加长度收缩的假设来企图让迈克尔逊-莫雷的实验结果合理化【Fitzgerald, 1889】。这个工作，应该说是人们在解释迈克尔逊-莫雷实验的过程中最初的一个理论尝试。

基于这个假设，1904 年，洛伦兹提出了著名的洛伦兹变换公式【Lorentz, 1904】。这个公式的基本思想是对于运动的物体（以沿 x 方向运动的为例），如果引入如下左边变换：

$$\begin{aligned}x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \\y' &= y \\z' &= z \\t' &= \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}\end{aligned}$$

公式 8.143

就可以基于上一节利用以太所定义的绝对时空，为相对于绝对时空运动的惯性系

³⁸¹麦克斯韦并不是很长寿，1879 年在他 48 岁的时候就去世了，这是一个遗憾！但庆幸的是在他的有生之年他提携了不少优秀的晚辈，并与同辈人的关系也都很友善。有些被提携的晚辈与他甚至素不相识。一个典型的例子就是来自遥远的美国的吉布斯。这和牛顿是形成鲜明对比的。牛顿去世之后，我们提到过，英国的物理学有过相当长的时间的沉寂。但麦克斯韦去世后，英国的物理学一直都保持在一个非常高的水平。

中斐茨杰拉德所引入的“长度伸缩假设”提供一个理论解释。基于这个变换，迈克尔逊-莫雷实验也可以得到完美地解释。同时，人们还可以对运动物体的电动力学展开一些非常实用的理论描述。

这篇文章一出，迅速引起了两个天才的注意。一个，是庞加莱。另一个，则是爱因斯坦。他们基于洛伦兹变换，分别在 1905 年完成了自己的代表作《关于电子动力学》、《论运动物体的电动力学》【Poincare, 1905】【Einstein, 1905b】。可以说他们是相互独立地完成了自己的狭义相对论【金晓峰, 2022a-2022d】【金晓峰, 2023】。风格，却非常迥异。相对于洛伦兹，他们的进步体现在他们都否认了图 8.20 所显示的那个禁锢在当时绝大多数的物理学家脑子里的绝对时空的概念的存在。其中，庞加莱的方法比较偏数学。他证明了在洛伦兹变换下，麦克斯韦方程组具有协变性。需要说明的是很多人认为这一点在洛伦兹那里就已经清楚了，但实际上不是那样。关于这一点的更为详细的说明，读者可以参考复旦大学物理系金晓峰老师在《物理》杂志上撰写的《庞加莱的狭义相对论》系列文章中的第一篇来进行了解【金晓峰, 2022a】。基于这一点，庞加莱更是第一次在一个物理学理论中引入了群论的方法，基于洛伦兹变换定义了一个洛伦兹群，并指出这个群的存在可以保持物理规律（麦克斯韦方程组）在不同惯性系之间进行变换时的不变性。这个数学处理的物理意义是非凡的！

相对于庞加莱，爱因斯坦的理论则更加物理一些。他的出发点，是从我们的生活经历抽象出来的内容。一个，是相对性原理。另一个，则是光速不变原理。这两点，都是以原理（principle）的形式在他的理论中呈现的。庞加莱的相对论由于他去世地比较早³⁸²，加上方法过于数学，并没有产生非常大的影响。只是后来

³⁸²他 1912 年就去世了。

当对称性这样的思想在物理学中变得重要的时候，人们才开始意识到其中的一些核心思想的价值。另外，在二十世纪七十、八十年代，当人们对一些具有鲜明的“多体特征”的问题进行研究的时候，发现了混沌现象。这时，人们回顾历史，才发现庞加莱早在十九世纪八十年代研究天体中的三体问题的时候就提出过类似的概念【Chenciner, 2015】。这些，都能够反映出来庞加莱所研究的物理学的“深邃之处”。但具体到相对论理论本书，考虑到爱因斯坦在其中扮演绝对主导性的角色，我们还是以爱因斯坦的理论为主，在介绍完其他人的贡献后，来展开本节后续部分的讨论。

8.5.3 狭义相对论

应该说，相对论理论的写作与牛顿的《原理》的写作是按照同样的风格完成的。具体，体现在：基于几个不与任何经验冲突的定律或原理为出发点，建立一个物理的理论体系，然后基于这个理论体系来描述现象界。不同之处，在于牛顿力学的基础（三大定律）是以定律（law）的形式提出的。这三个定律的内容和我们的生活经验密切相关，牛顿把它们进行了抽象化。而相对论理论，包括狭义相对论中的光速不变原理、相对性原理，以及广义相对论中的广义相对性原理、等效原理，都是以原理（principle）的形式给出的。这些原理和我们的生活经历也相关，爱因斯坦也把它们进行了抽象化。这里，定律和原理的叫法不同，本质区别应该说不明显。

作为一个通识教材，覆盖狭义相对论的核心内容就阅读难度而言是可以被读者所接受的。对这部分写作也是在笔者能力范围内的。广义相对论的数学形式则过于复杂。因此，我们将针对狭义相对论，挑出三点（相对性原理与光速不

变原理、同时性问题、洛伦兹变换), 来结合数学进行介绍。基于这三点内容, 动尺收缩、动钟变慢、速度迭加公式、质量公式、质能公式都可以被推出, 狭义相对论的大厦也可以被建立起来的。广义相对论, 我们则避免所有数理方面的内容, 仅仅介绍历史与思想。

8.5.3.1 相对性原理与光速不变原理

相对性原理与光速不变原理的内容我们在 8.5.1 节已经介绍过。我们这里只是强调一下爱因斯坦在这里通过相对性原理想强调的是所有的惯性系中物理规律必须有相同的形式。他企图利用这一点, 来强调惯性系之间的等价性, 避免图 8.20 中的以太对应的绝对惯性系这样一个定义。光速不变原理的内容是光速在所有的参考系中都是一个定值, 它是用来对信息传递进行限制的。套用康德的语言, 形而上学将物自体 and 现象界进行区分后, 物理学只需关心现象界的内容即可。

应该说, 这两个原理都是建立在丰富的经验证据上, 并在高度抽象后将这些经验证据加以普遍化, 进而形成的物理模型必须遵从的约束。基于这样的两个原理, 爱因斯坦抓住了同时性这个关键问题, 构造出了一个符合洛伦兹变换规律的力学理论。在下一小节, 我们将从这两个概念出发来讲解爱因斯坦的狭义相对论。

8.5.3.2 同时性问题

爱因斯坦在谈同时性问题的时候, 喜欢用行驶中的火车作为例子。有一个说法是他在提出狭义相对论的时候工作的地点是伯尔尼的瑞士联邦专利局 (图

8.22a 与 b)。从图 8.22a 中的地图可以看出，这里紧邻铁路。观测火车进站与出站，或许能对爱因斯坦进行同时性的思考提供帮助（图 8.22c）。因此，笔者不否认这种说法，毕竟物理学描述的就是我们能感受到的世界。所谓物理学的直觉，往往也都是通过将物理学与一些生活经验联系获得的。

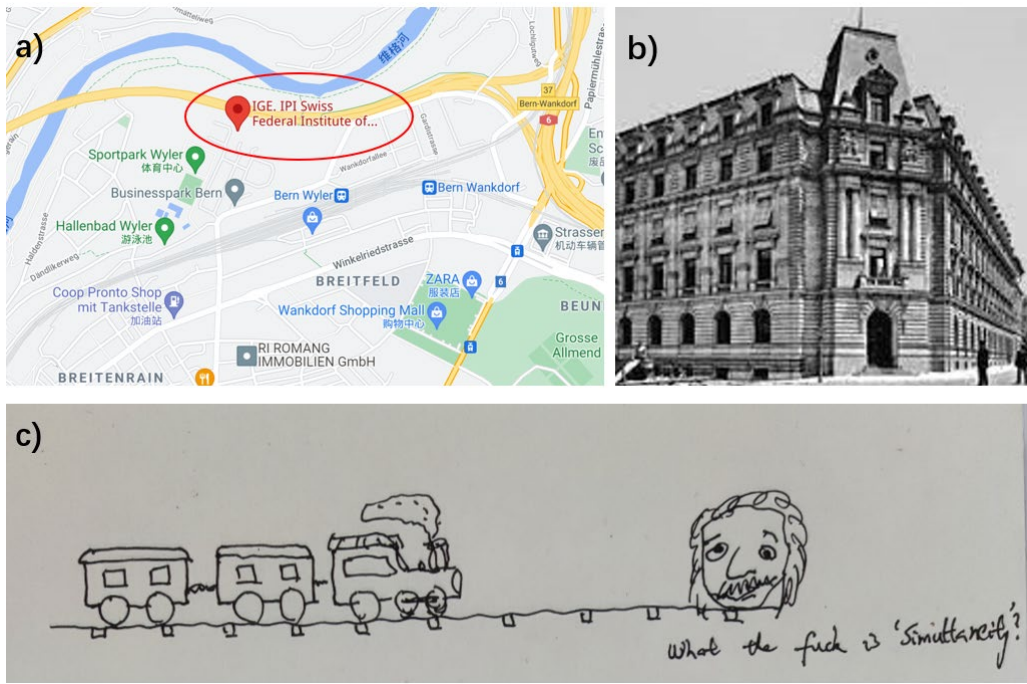


图 8.22 爱因斯坦工作的瑞士联邦专利局（Swiss Federal Institute of Intellectual Property）附近的地图（a）、办公大楼（b）、以及爱因斯坦在面对火车进站与出站时对同时性的思考（c）。前两个为网络截图，第三个为笔者手绘。

将这样的生活经历进行抽象化，可以很直接。我们只需要用四个图，就能够把爱因斯坦从上述两个原理出发得到洛伦兹变换的过程讲清楚³⁸³。但在这个图的绘制过程中，如果取国际单位制，图 8.23 中的红色参考线（光速线）会无限接近于水平线。这就导致“等时线”很难被画出（图 8.23a）。基于这个考虑，

³⁸³ 要理解这样一个伟大的理论，四个图已经相当少了。

我们先取光速 $c = 1$ 来展开下面的讨论（图 8.23b）。这是第一个图。

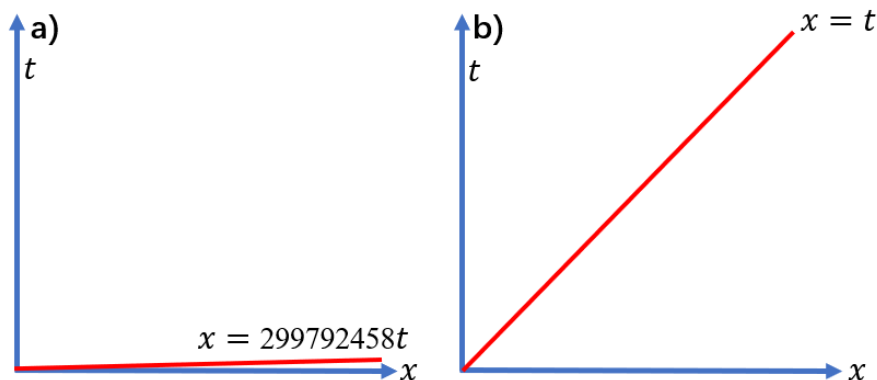


图 8.23 用国际单位制画出的理解同时性的参考线几乎水平 (a)，如果取光速为 1，画出的参考线就比较适合我们对照等时线来理解同时性问题 (b)。

之后，我们看第二个图（图 8.24）。我们将爱因斯坦所处的静止的坐标系设为图 8.23 中所示的坐标系（由 x 、 t 组成的坐标系）。火车上，按图 8.24a 所示的顺序，从左到右坐着小明、小红、小芳。在火车上的小明经过爱因斯坦（下面称老爱）的那一刻，他们两人对了一下表。这个时候，在老爱的坐标系（由 x 、 t 组成）中，这个事件（记为事件 a）的时间、空间坐标为 $x = 0$ 、 $t = 0$ 。在小明所处的坐标系（火车这个运动的惯性坐标系，由 x' 、 t' 组成）中，这个事件的时间、空间坐标为 $x' = 0$ 、 $t' = 0$ 。

这里的关键点是同时性。火车上的其他人也要充分利用这一点来体验世界。我们可以假设火车上小芳也要通过某种方式，和小明对一下表，确保她的 t' 也等于零。这样的话，对于 $t' = 0$ 这条线，除了小明经过老爱这一刻的事件 a 所定义的老爱这个坐标系中的坐标原点 ($x = 0$ 、 $t = 0$)，另外一点就可以由小芳在火车上与小明通过某种方式确定同时性这个事件确定下来。只要这两点定了，图 8.24b 右下方的 $t' = 0$ 这条线就定了。这条线的物理意义是运动坐标系中的“同时”，在静止坐标系中如何表达？理解这条线在老爱所处的这个坐标系中的坐标满足什

么样的规律，就会帮助我们理解狭义相对论的基本思想。

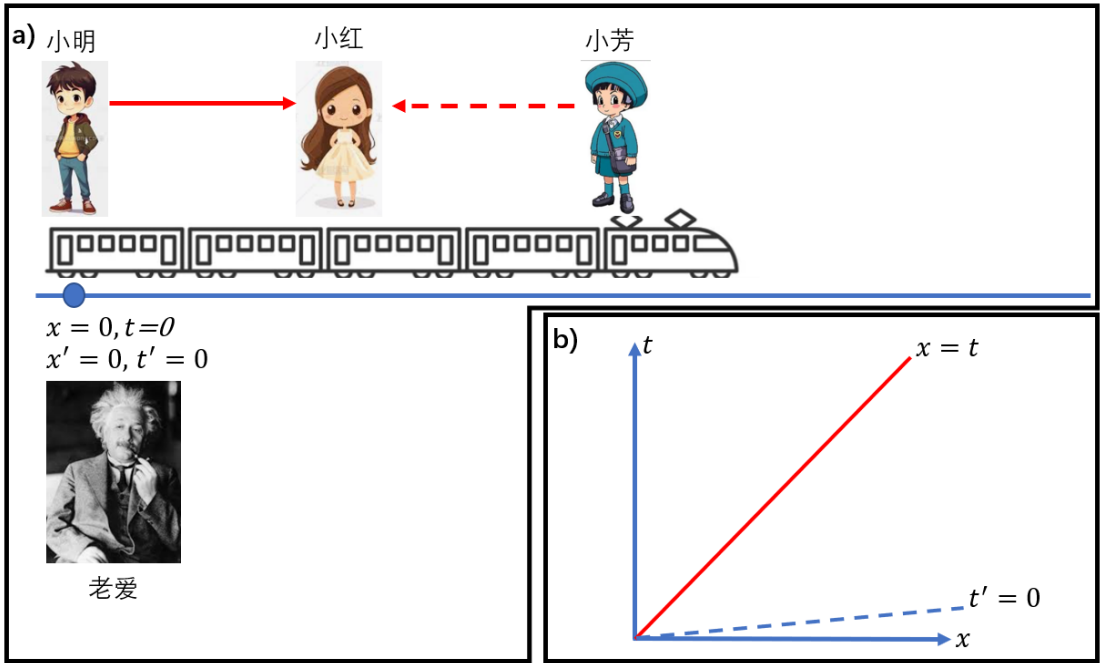


图 8.24 理解 x' 、 t' 这样一个坐标系（火车）的同时性的示意图（a）。如正文所讲，关键点就是在 $x = 0$ 、 $t = 0$ ，同时也是 $x' = 0$ 、 $t' = 0$ 这样一个时刻，老爱与小明对表这个事件。以及火车上小芳与小明对表这个事件。通过这两个事件，就可以确定出运动的火车上 $t' = 0$ 这样一个等时线在老爱这样一个坐标系中的表达了（b）。

有了这个思路，下面的任务就很简单了，我们可以通过两个图来完成。先看图 8.25。我们假设小芳与小明确定同时性是通过下面这种方式完成的：在小明经过老爱那一刻，和老爱对表的同时，小明也向小红发出一束光。在时空轴上，这是一个事件（同一时间、同一地点），同样标记为事件 a，图 8.25 中有显示。另外，为了描述运动的坐标系中小芳与小明同时，我们还需要一个事件。我们把这个事件定义为在火车上小明向小红发出一束光的同一时刻，小芳也向小红发出一束光（事件 b，图 8.25）。只要这束光和小明发出的光同时到达小红（事件 c，图 8.25），小红就可以作为裁判，以同时接收到信息为由，根据三者等间距且光速在

任何坐标系中都是定值，判定小明和小芳是同时发的。这样的话，既然小明发信号是在火车上的 $t' = 0$ 这样一个时刻，小芳发信号与他同时，那小芳发信号的事件 b 就一定也发生在火车上的 $t' = 0$ 这样一个时刻。这个时候，我们只需要将事件 b 在老爱这个坐标系中的横坐标与纵坐标确定下来， $t' = 0$ 这条线自然也就定了（因为另一点已经定了，就是事件 a 这一点， $x = 0$ 、 $t = 0$ ，大家可以从图 8.25 中看出来）。

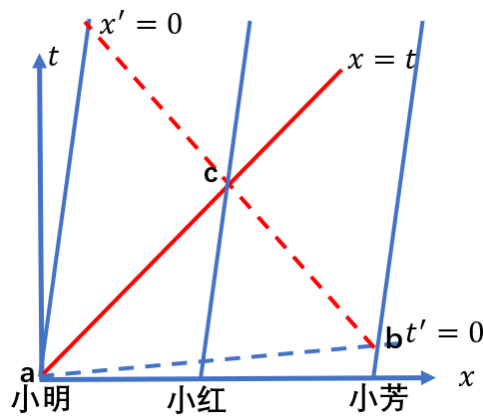


图 8.25 确定 $t' = 0$ 这条线的具体方案。按主文章中的描述，关键点就是要弄清事件 b 在老爱所处的坐标系的纵坐标与横坐标。这里，红色实线描述的是小明向小红发的那束光到达小红的过程。红色虚线描述的是小芳向小红发的那束光达到小红的过程。

这样的话，下面要做的就是确定事件 b 在图 8.25 中的坐标。由于时空的伸缩是均匀的，我们可以假设等间距分布的三个人的距离在老爱的坐标系里面看是 1。这样，我们可以用两步把事件 b 的坐标确定下来。

第一步，是确定事件 c 的坐标。它是 $x = t$ 这条线（图 8.25 中的红色实线）和图 8.25 中三条平行的湖蓝色实线里面中间那条（从小红）的交点。这三条湖蓝色的平行线中最左边那条是老爱看来小明的位置随时间的挪动，表述为 $x = vt$ 。第二条是从(1,0)这一点出发的等斜率的线，表述为 $x = vt + 1$ ，代表的是小红的

移动。因此，c 点是由：

$$\begin{aligned}x &= t \\x &= vt + 1\end{aligned}$$

公式 8.144

这两条直线定义，代表的是小明发出的光（红色对角线）到达小红（中间的湖蓝色实线）。公式 8.144 的解为：

$$\begin{cases}x_c = \frac{1}{1-v} \\t_c = \frac{1}{1-v}\end{cases}$$

公式 8.145

这里的下标指的是事件 c。这样，事件 c 的坐标就先定下来了。

第二步，就是确定事件 b 的坐标了。这个时候，我们需要从 c 出发，画一下斜率为-1的直线。这对应的是图 8.25 中的红色虚线，它代表的是小芳在 $t' = 0$ 那个时刻向小红发出的光的轨迹。事件 c 标识的是这束光和小明发出的那束光同时到达小红这个事件。而事件 b，标识的是在 $t' = 0$ 时刻小芳向小红发光那个事件。它是图 8.25 中的红色虚线与老爱看来小芳的位置移动（也就是图 8.25 中的最右边的湖蓝色的线）的交点。这两条线的方程是：

$$\begin{aligned}x + t &= \frac{2}{1-v} \\x &= vt + 2\end{aligned}$$

公式 8.146

它们联立的解是：

$$\begin{cases}x_b = \frac{2}{1-v^2} \\t_b = \frac{2v}{1-v^2}\end{cases}$$

公式 8.147

这样的话，由原点和 (x_b, t_b) 定义的这条 $t' = 0$ 的线在老爱看来，就是：

$$x = \frac{t}{v}$$

公式 8.148

这样的话，对于老爱而言，由 $x' = 0$ （也就是小明的坐标）所定义的火车上的等位线与由 $t' = 0$ 所定义的火车上的等时线在类似 8.24 的图中，就有如 8.25（第四个图）所示的那种完全对称的形式。

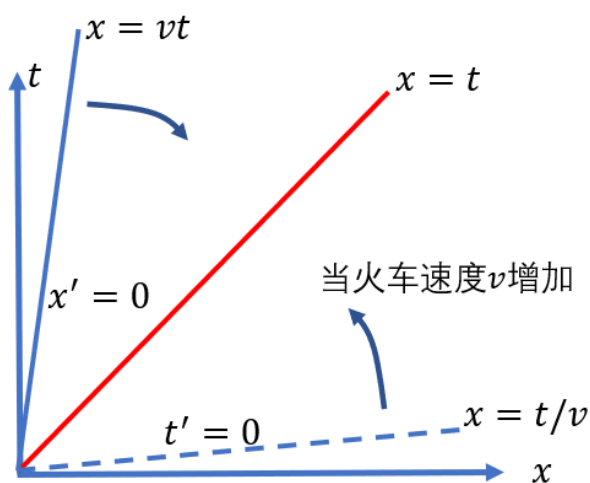


图 8.26 由上述推导所给出的火车上的同时线与等位线的示意图。当火车速度几乎为零的时候，在老爱看来，它们对应的就是过原点的几乎竖直的轴与基于水平的轴。随着火车运动速度的增加，它们向红色的那条对角的参考线移动。这种移动是完全对称的。

8.5.3.3 洛伦兹变换

有了图 8.26 所示的同时线与等位线，我们下一步就是要理解洛伦兹变换。我们首先要明确的是在老爱看来的小明移动的曲线 $x = vt$ ，对应的就是火车上的坐标系的 $x' = 0$ 这一点在老爱的坐标系中的移动。在前面的讨论中，我们把它称为（移动的坐标系中的）等位线。对于火车上的其它的点，在老爱看来是另一个坐标 (x, t) 。这个点在火车上的时空中，也有坐标 (x', t') 。洛伦兹变换，描述的就是

同样一点（这个点是任意点），在老爱的坐标系下的坐标与在运动的火车上的坐标之间的关系。换句话说，是 (x, t) 到 (x', t') 之间的投影。

这个投影，当然要依赖于火车移动的速度（这是第一点限制）。同时，它要满足的关键限制是对：

$$x = vt$$

公式 8.149

上的点，它给出的 x' 必须为零。这个对应图 8.26 中的湖蓝色实线所描述的等位线的限制（这是第二点限制）。另外，对于：

$$x = t/v$$

公式 8.150

上的点，它给出的 t' 必须为零。这个对应图 8.26 中的湖蓝色虚线所描述的同时线的限制（这是第三点限制）。

综合上述三点限制，我们可以把这个投影关系设为：

$$\begin{cases} x' = (x - vt)f(v) \\ t' = (t - vx)g(v) \end{cases}$$

公式 8.151

下面的任务，就是理解 $f(v)$ 、 $g(v)$ 到底等于什么？这个时候，我们可以继续使用光速不变原理，去看图 8.26 中的那条对角的红色参考线。那条线描述的是在 $t = t' = 0$ 时刻，从小明（与老爱）那里发出的一束光。这束光在老爱这里，速度为 1（我们在这里已经设定 $c = 1$ ）。在小明那里，同样要等于 1。这就要求这条线上的点所对应的 x' 除上 t' 要等于 1，也就是：

$$\frac{x'}{t'} = \frac{(x - vt)f(v)}{(t - vx)g(v)} = \frac{(t - vt)f(v)}{(t - vt)g(v)} = \frac{f(v)}{g(v)} = 1$$

公式 8.152

这也就意味着公式 8.151 中的 $f(v)$ 等于 $g(v)$ 。公式 8.147 的坐标变化也就变成了：

$$\begin{cases} x' = (x - vt)f(v) \\ t' = (t - vx)f(v) \end{cases}$$

公式 8.153

下面，我们只需要把 $f(v)$ 求出来即可。

这个时候，我们再利用一下相对性原理，也就是说老爱看小明是以速度 v 运动的，小明看老爱则是以速度 $-v$ 运动的。同时，假设投影中的伸缩因子只依赖于速度的绝对值。这就意味着公式 8.153 会有完全一样的下述对应：

$$\begin{cases} x = (x' + vt')f(v) \\ t = (t' + vx')g(v) \end{cases}$$

公式 8.154

这个时候，只需要将公式 8.153 与公式 8.154 联立，就会有：

$$x = [(x - vt)f(v) + v(t - vx)f(v)]f(v) = x[1 - v^2] [f(v)]^2$$

公式 8.155

这样，就有：

$$f(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}$$

公式 8.156

这个时候，如果我们回到三维空间，假设运动沿方向 x 方向，并去掉光速 $c = 1$ 这样一个设置，再考虑量纲的问题，洛伦兹变换的公式就可以直接写出了：

$$\begin{cases} x' = (x - vt)/\sqrt{1 - (v/c)^2} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = (t - vx/c^2)/\sqrt{1 - (v/c)^2} \end{cases}$$

公式 8.157

至此，洛伦兹变换也就有了坚实的物理学的基础。

基于洛伦兹变换，动尺收缩、动钟变慢、速度迭加公式、质量公式、质能公式等相对论效应都可以被推出，狭义相对论的大厦也可以被建立起来的。我们也

可以感受到，在这个推理的过程中，我们只需要把关键点放在同时性问题上，抓住同时线与等位线，一切还都是非常直接。

8.5.4 广义相对论

狭义相对论出来之后，按照赵峥老师在文献【赵峥，2015】中讲到的，人们还是花了一段时间来接受这个理论的³⁸⁴。针对其的批评意见不绝于耳。但是很多批评意见，在爱因斯坦看来，都是因为提出者没有看懂他的理论造成的。同时，我们也要明确的是在爱因斯坦看来，当时的“（狭义）相对论”到底有没有问题呢？答案，当然是有！主要体现在两个方面。第一个方面，与惯性系的定义有关。第二个方面，与万有引力有关。但有趣的是，这些都不是那些批评者讨论的问题。很显然，当时的那些批评者对这个问题的理解并没有达到爱因斯坦的高度。

8.5.4.1 广义相对论的诞生

先说第一点。爱因斯坦 1905 年的理论，是建立在“惯性系”的基础上的。但是，在他的新理论中，“惯性系”却无法定义了。这是因为在牛顿的经典力学中，存在一个绝对空间，但凡是相对于绝对空间进行匀速直线运动或者静止的参考系，都是惯性系。这一点，非常明确且良定义。但爱因斯坦的狭义相对论却认为没有绝对空间。这样一来，牛顿力学中的定义方法就因为失去了参考而失效了。

针对这个问题，一个解决方案是根据牛顿第一定律，看不受力或者合力为零的物体是否静止或做匀速直线运动？但问题是我们无法准确地知道一个物体是

³⁸⁴ 本书的这一小节，大幅参考了文献【赵峥，2015】。

否受力？毕竟万有引力无处不再，而合力为零又无从判断。因此，判断它是否受力又必须把它放到一个惯性系中看它的运动情况？如此循环，问题始终无法解决！这个困难是 fundamental 的困难，在爱因斯坦看来，是灾难性的！

第二个问题，与万有引力有关。前面提到过，在十九世纪末、二十世纪初，物理学革命完成之前，人们认识到的作用力只有两种。一种是电磁力，另一种就是万有引力。狭义相对论针对电动力学，解决了不同参考系中理论形式需要一致的问题。电磁力没有问题，但万有引力却没有被纳入这个理论框架。换句话说爱因斯坦用相对性理论解释了迈克尔逊-莫雷实验，但他还没有用相对性理论解释水星进动。这也是后面我们提到的在 1915 年的夏天，当爱因斯坦利用广义相对论解释了水星进动他会给希尔伯特写信来表达兴奋的原因。

对上述两个问题的思考，把爱因斯坦引向了广义相对论的研究。这个工作，用我们现在的流行语“十年磨一剑”，或许再合适不过。从 1905 年狭义相对论完成【Einstein, 1905b】，到 1915 年底广义相对论的文章投出，恰巧十年【Einstein, 1916a】。虽然爱因斯坦并不是从一开始就把全部精力放在广义相对论上面³⁸⁵，但思考（包括前面提到的对狭义相对论的问题的总结，这个实际上也是在为广义相对论的提出做准备），肯定是不间断的。

在构建广义相对论的过程中，当爱因斯坦意识到惯性系的定义出现问题后，他采取的解决方案非常决断：放弃惯性系。他认为惯性系之所以在传统的理论中重要，是因为人们需要它来表述相对性原理。这里，笔者感觉能够再一次体现康德哲学在爱因斯坦的相对论理论中扮演的重要作用。当物理上的逻辑遇到问题的

³⁸⁵严格意义上，是 1907 年开始。

时候，爱因斯坦与其他物理学家的区别是他会从现象界的感知者与描述者，也就是“哲学上的人”的角度，来思考问题。既然惯性系无法定义，人们定义惯性系是为了描述相对性原理，那能不能把相对性原理进行一个推广，把物理规律的描述推广至非惯性系统，然后去写出一个在所有参考系（包括非线性系）统一的物理规律呢？这里的“统一”，指的是在某种变换下³⁸⁶，物理学规律的数学表达不变。有时，也被称为是“协变的”。这样的“物理学规律保持协变性”的原理，被称为是广义的相对性原理。这样的一个不局限于惯性系，而是适用于普遍的参考系，且保持“协变性”的理论，被称为是广义相对论。“广义的相对性原理”也相应地取代“相对性原理”在狭义相对论中的位置，成为了广义相对论的一个基本原理。

除此之外，爱因斯坦还注意到在牛顿力学的绝对空间中，存在惯性力。它与物体的质量成正比。而万有引力，也与物体的质量成正比。前者，称为惯性质量。后者，称为引力质量。但在《原理》一书中，质量被定义为物质的“量”³⁸⁷，即物体所包含的物质的多少。它与物体的重力成正比。这样定义的质量，是引力质量（因为重力是引力）。在《原理》的另一处，牛顿又谈到物质的质量与它的惯性成正比。因此，质量又是惯性的量度。以惯性为量度确定的质量叫惯性质量。牛顿不认为引力质量一定要等于惯性质量。但是从牛顿到爱因斯坦的年代，所有测量给出的引力质量与惯性质量在实验精度内，都是相等的。基于这样一个事实，

³⁸⁶在惯性系之间，由于时空不扭曲，就是坐标变换。牵扯到非惯性系，因为有时空扭曲，这个变换是微分变换。

³⁸⁷在 4.1.1 节，我们讲过这个问题。质量是个基本物理量，需要有单位。我们现在说的“物质的量”对应的是摩尔数。这是阿伏伽德罗之后的事情。在牛顿那个时代，他的意思就是物质的“量”。

爱因斯坦进一步认为，惯性问题和引力问题实际上是同一个问题。换句话说，前面提到的他总结出的狭义相对论的两个问题（惯性系的问题和质量的问题），实际上是一个。惯性问题与引力问题，也是可以一起解决的。基于以上理解，他进一步提出了等效原理：惯性场与引力场局域等效。

之后，基于这两个原理（广义相对性原理、等效原理），利用黎曼几何而非欧氏几何，爱因斯坦构建出了广义相对论。在这个过程中，爱因斯坦从 1907 年至 1915 年的 6 月都没有遇到任何竞争。1915 年 6 月，应希尔伯特的邀请，爱因斯坦访问哥廷根大学，并在这里做了自己的关于广义相对论新进展的报告。由于高斯、黎曼、克莱因、希尔伯特这条关于非欧几何的主线就是在哥廷根发展起来的，希尔伯特肯定非常清楚爱因斯坦所面临的数学问题。这也给爱因斯坦造成了很大的压力。同时，希尔伯特在这个时候也因为爱因斯坦的报告开始关注这个问题了，并且取得了不错的进展。但爱因斯坦毕竟是在这领域耕耘了太长的时间，其思考深度并不是一个刚刚开始此方面研究的人（即便是希尔伯特）可以比拟的。最终，爱因斯坦在 1915 年的 11 月 25 日完成了关于场方程的论文的投稿【Einstein, 1916a】。他的场方程也是正确的³⁸⁸。至此，这场关于相对性力学理论的马拉松彻底结束，爱因斯坦从始至终扮演了最为关键点的角色。

8.5.4.2 与广义相对论相关的代表性实验

如果用一句话来描述广义相对论的核心思想的话，我们会借用美国物理学家

³⁸⁸据说希尔伯特也写出了场方程，但他的有错误。本书的图 1.3 反映的也是他们在当时的竞争。

惠勒 (John Archibald Wheeler, 1911–2008 年) 所讲的: 物质告诉时空如何弯曲, 时空告诉物质如何运动 (matter tells space-time how to curve, space-time tells matter how to move)。这种时空的弯曲, 读者可以参考图 8.27 来进行理解。

在广义相对论提出之前, 时间和空间虽然在狭义相对论的框架下是一个整体³⁸⁹, 但时空作为一个整体与物质之间是独立的。物质不会影响时空的性质。当然物质之间有万有引力的相互作用。但这个相互作用在牛顿力学框架下的情况就是牛顿通过将三大定律建立起来的力学用于行星运动, 然后通过天文观测对比, 确定存在的力。至于这个力的来源是什么? 牛顿力学没有涉及。狭义相对论更是完全没有涉及引力。

在爱因斯坦的广义相对论中, 他将物质与时空放在一起考虑。物质可以改变时空的性质, 使得时空弯曲。而时空弯曲, 又决定了时空中物质的运动。时空弯曲的程度, 由时空弯曲度规来刻画。这个量是体现在爱因斯坦的场方程中的。这也带来的一系列的新奇现象, 比如: 水星轨道近日点的进动、光线偏折、引力红移、黑洞、引力波。这里, 我们针对这些现象进行一定程度的讲解。

首先是水星轨道近日点的进动³⁹⁰, 这个爱因斯坦寻找场方程的过程中就已经解决了的问题【赵峥, 2015】。我们需要明确的是关于这个现象的天文观测结果早在十九世纪就已经成熟。爱因斯坦在相对论场方程的建立过程中, 一直是把新理论算出的进动值与天文观测的比较当作引导他寻求场方程的灯塔来使用的。

³⁸⁹在狭义相对论之前, 时间和空间之间也是独立的。

³⁹⁰在 8.5.1 节, 我们介绍过这个问题。我们当时讲的是其它物理学家意识到绝对时空观的问题, 都是通过迈克尔逊-莫雷实验。没有人意识到水星近日点的进动会与这个有关。在爱因斯坦研究广义相对论的时候, 他对开始关注这个物理问题。这反映的也是他对当时他的理论与当时的物理学, 是深度理解的。这种理解真的远远领先于那个时代。

1915 年的下半年，他也利用自己的理论完美地解释了困扰人们多年的这个天文学问题。为此，他还专门给希尔伯特与洛伦兹写信表达了自己的兴奋【赵峥, 2015】。一定程度上讲，这是广义相对论正确的第一个强有力的证据。它解释了旧理论一直无法解释的一个关键科学问题，在广义相对论提出的时候就发挥了极其重要的引导与佐证作用。

第二个例子，是光线偏折。它的意思是在质量很大的星体附近，由于时空弯曲比较厉害，光走的路线不再是直线而是会发生弯曲的（图 8.27a）。这是爱因斯坦在 1911 年就提出的理论预言【Einstein, 1911】。这个现象可以在日全食的时候被看到，因为在这个时候某个恒星发出的光在经过太阳附近的时候会走一个扭曲的路线到达地球。这样的话，如果对比这个光不经过太阳附近到达地球的时候的观测，恒星位置就会发生偏转。爱因斯坦最初算出的光通过太阳表面的偏折值是 0.83 弧秒。1915 年，爱因斯坦将其更正为 1.75 弧秒。在广义相对论完成的时候，它还是作为一个预言存在的。

我们都知道第一次世界大战是在 1918 年底结束的。在这次战争中，英国与德国是敌对方，而德国是战败国。广义相对论，是爱因斯坦在一战期间完成的一个基础的理论³⁹¹，一个可以挑战牛顿力学的理论³⁹²。1919 年 5 月 29 日，有一次日全食。来自英国的爱丁顿（Sir Arthur Stanley Eddington, 1882 – 1944 年）与戴森（Sir Frank Watson Dyson, 1868 – 1939 年）利用这次天文现象，基于当时太阳

³⁹¹他关于引力场可以引起光线完全的文章是 1911 年完成的【Einstein, 1911】。1915 年（一战期间），他对他就太阳能够多大程度上对光线进行弯曲的计算结果进行了修正。同样在 1915 年，广义相对论完成。爱丁顿是在 1916 年开始关注广义相对论。之后，经过认真准备，他策划了 1919 年那次改变历史的天文观测。

³⁹²牛顿力学自提出开始可一直都是英国的骄傲！科学成就与民族情绪在这里是会有融合的。

附近的毕宿星团 (Hyades Cluster) 的光, 针对广义相对论的理论预言进行了观测。

爱丁顿的观测在非洲西部进行, 戴森的观测在巴西进行。最终爱丁顿的观测值是 1.61 弧秒, 戴森的观测值是 1.98 弧秒。它们都验证了爱因斯坦 1.75 弧秒的理论值 (图 8.27) [【Dyson, 1920】](#)。一定程度上, 人们也将这次观测作为战争中的两个敌对国在科学上的一次成功的新合作加以宣传。作为一个结果, 广义相对论不光在科学界, 也面向大众展示了其巨大的成功。爱因斯坦在全世界的范围内 (不光在科学界) 声名鹊起。

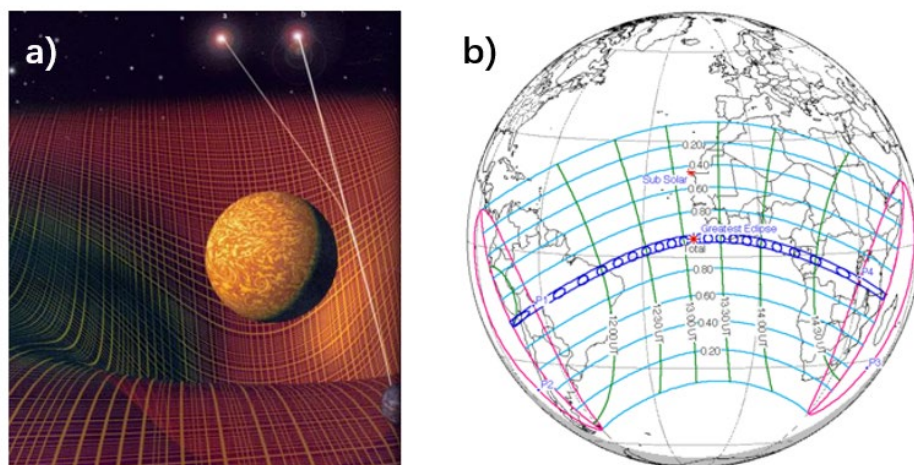


图 8.27 a) 太阳附近的引力场造成的光学扭曲的示意图。1911 年, 爱因斯坦预言贴着太阳的边缘到达地球的光, 相对于不经过这个引力场, 会发生 0.83 弧秒的偏折。1915 年, 爱因斯坦将其更正为 1.75 弧秒。1919 年 5 月 29 日, 会有一次日全食。在地球上可观测区域如 b) 所示。爱丁顿针对这次天文现象进行了长期准备。最终, 验证了爱因斯坦的理论。

第三个例子, 是引力红移。它说的是一个光子在逃离引力场的时候, 会损失能量。与之相应, 它的频率也会降低, 产生红移 (图 8.28)。这也是爱因斯坦提出的一个广义相对论效应。从这个例子开始, 到黑洞、引力波, 就都是爱因斯坦提出, 但是由后人经过长期的努力才得以证实的关于广义相对论理论正确性的证据了。它们和玻色-爱因斯坦凝聚 [【Anderson, 1995】](#) [【Davis, 1995】](#)、激光 [【Einstein,](#)

1917】【Maiman, 1960】等内容一样，一次次地向我们强调爱因斯坦是如何领先于他的时代。

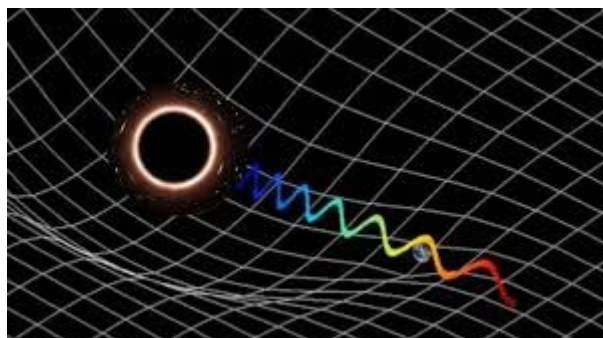


图 8.28 引力红移的示意图。逃离引力场的时候，光子损失能量。与之相应，频率发生红移。

第四个例子，是黑洞。由于这个名词在我们的科普读物中出现的频率非常高，我们稍微多解释一些【侯嘉昊, 2020】【Giacconi, 1962】。应该说，它在很长时间内只是一个存在于理论假设中的神秘的天体。早在经典力学统治天文学的年代，英国地质学家米歇尔（John Michell, 1724 – 1793 年）和法国天文学家拉普拉斯（Pierre-Simon Laplace, 1749–1827 年）就分别在 1783、1796 年提出了相关的设想。当时，光的粒子说还占据统治的地位。因此，如果假设光粒子的质量是 m 。同时，还假设存在一个质量为 M 、半径为 r_s 的星体。这个时候，还可以假设光粒子这个星体表面的动能等于重力势能，也就是：

$$\frac{1}{2}mc^2 - \frac{GMm}{r_s} = 0$$

公式 8.158

这里 G 是万有引力常数、 c 是光速。那么，如果我这个星体的半径小于 r_s ，光粒子就不可能利用动能克服其在这个星体表面的势能。人们也就无法在观测中看到此

星体。应该说,这是最早的关于黑洞的理论。这样的星,在当时也被称为暗星³⁹³。

1915 年底,广义相对论完成。这在德国的物理学、天文学,甚至包括数学界,都引起了很大的轰动。1916 年初,身处一战中德国对俄作战前线的施瓦西(Karl Schwarzschild, 1873–1916 年)利用爱因斯坦的场方程研究一个球对称、不带电、不自转的物体的重力场的精确解³⁹⁴【Schwarzschild, 1916】。他发现前面提到的描述引力场的度规函数的解里面,有这样两项。一项是依赖于 $1 - r_s/r$,另一项依赖于 $1/(1 - r_s/r)$ 。这个 r_s ,就是公式 8.158 里面的那个 r_s 。施瓦西的这个发现意味着这个体系的引力场方程的解在两个地方是发散的,一个是 $r = 0$ 这一点,另一个是 $r = r_s$ 这个面上。这个 r_s ,后来就被称为施瓦西半径。施瓦西的研究,也将前面提到的经典力学框架下关于“暗星”的讨论引导了广义相对论的理论框架下。

应该说,自施瓦西发现其模型中的奇点后,关于这些奇点的物理意义的讨论持续了好多年。人们一般会认为施瓦西半径对应于黑洞的事件视界。除去施瓦西黑洞,1963 年,新西兰数学家克尔(Roy Patrick Kerr, 1934 年出生)发现了爱因斯坦的场方程的轴对称的旋转解【Kerr, 1963】。和施瓦西的解类似,这里也有奇点。与之对应,也有克尔黑洞的概念【侯嘉昊, 2020】。当然,这也是一个对宇宙中物质存在形式进行了假设后的场方程的解。

³⁹³黑洞这个名词是由惠勒在 1968 年起的,它当然更加形象。虫洞这个名字,也是他起的。惠勒确实有这样的能力,让一些非常物理、非常抽象的概念形象化。他的学生费曼(Richard Phillips Feynman, 1918–1988 年)、索恩(Kip Stephen Thorne, 1940 年出生)。这种能力使得他们可以很好的面向大众,普及科学。在现代社会,这也是非常重要的!

³⁹⁴施瓦西是德国著名的天文学家、物理学家,数学也非常好。一战开始,他已经 40 岁了。但还是自愿地到军队服役,重点是炮弹的轨迹计算。1915 年 11 月,他在休假的时候,听了爱因斯坦利用广义相对论解释水星近日点进动的报告,进而接触到广义相对论。

同样在 1963 年，彭罗斯（Sir Roger Penrose，1931 年出生）开始深入研究宇宙中黑洞是否存在的问题。他放弃了施瓦西、克尔所采用的球对称的假设，仅对能量密度提出了正定的要求。为此，他引入了拓扑学并提出了俘获面（Trapped Surface）的概念，于 1965 年发表文章证明了时空奇点存在的必然性【Penrose, 1965】。2019 年 4 月 10 日，天文学家发布了首张大质量黑洞的照片（图 8.29）。2020 年，彭罗斯也因为其关于黑洞的理论工作，被授予 1/2 的诺贝尔物理奖。他的获奖词是：for the discovery that black hole formation is a robust prediction of the general theory of relativity。与他一同获奖的是两位从事观测的天文学家根策尔（Reinhard Genzel，1952 年出生）和盖兹（Andrea Ghez，1965 年出生）。他们通过观测银河系中心恒星的运动，证实了银河系中心存在一个质量约为太阳 400 万倍的暗天体³⁹⁵。在诺奖网站上，对应的获奖理由是：for the discovery of a supermassive compact object at the centre of our galaxy。



图 8.29 于 2019 年 4 月 10 日公布的人类首张黑洞照片。

最后一个例子，是关于引力波的。在牛顿力学中，前面提到过，万有引力就是被证明存在。至于其存在原因以及如何描述，牛顿力学并没有涉及。这在爱因

³⁹⁵对于黑洞，因为光出不来，只能通过它对周围物质的影响并于理论模型对比来佐证其存在。

斯坦的广义相对论中找到了答案。至于引力是如何传播的？在牛顿的理论体系中，因为没有合适的理论进行描述，被处理为瞬时传播，不需要时间。但是在广义相对论中，它的存在的理由是时空弯曲，而时空弯曲效应是按光速传播的。因此，如果构成引力源的物质做非球对称运动，则引力源附近的时空弯曲情况就会向四面八方传播，形成引力波。广义相对论创立不久，爱因斯坦就意识到了引力波的存在【Einstein, 1916b】【Einstein, 1918】。但爱因斯坦对这个现象的观测，是非常不乐观的。

目前，与引力波相关的比较重要的天文观测有两个。第一个，来自于1974年。两个美国天文学家，赫尔斯（Russell Alan Hulse, 1950年出生）和泰勒（Joseph Hooton Taylor Jr., 1941年出生），在天文观测中发现一个名为PSR B1913的脉冲双星的轨道在不断减小。相关文章在1975年初发表【Hulse, 1975】。这个现象，可以用引力波导致能量损耗的机理来解释。这在一定程度上，算是间接观测到了引力波。他们两个，也因此获得了1993年的诺贝尔物理学奖。他们的获奖理由是：for the discovery of a new type of pulsar, a discovery that has opened up new possibilities for the study of gravitation。第二个，则发生在2015年³⁹⁶。2016年，美国“激光干涉引力波天文台（Laser Interferometer Gravitational Wave Observatory, 简称LIGO）”项目的研究人员宣布他们利用LIGO的两个探测器于2015年9月14日探测到来自两个黑洞合并产生的引力波信号【Abbott, 2016】。这个观测的一个直接结果就是2017年，诺贝尔物理奖被授予三名与之相关的物理学家：魏斯（Rainer Weiss, 1932年出生）、巴里什（Barry Clark Barish, 1936年出生）、索

³⁹⁶观测结果是2016年公布的【Abbott, 2016】。

恩 (Kip Stephen Thorne, 1940 年出生)。其中这个索恩, 就是前面 tidao 提到的惠勒的学生。他们的获奖理由是: for decisive contributions to the LIGO detector and the observation of gravitational waves。

8.6 物理学革命的影响

至此, 关于物理学革命的进程的介绍就结束了。物理学革命后, 现代物理学的理论框架基本确立³⁹⁷。物理学革命对于物理学而言就是一次思维范式的彻底变革, 它彻彻底底地改变了我们的物理学。

在物理学革命之前, 虽说开尔文爵士描述当时的物理学天空万里无云, 但我们回过头去看的话当时物理学对于微观世界的认识是支离破碎的, 对于宇宙的认识也是极其有限的。物理学革命之后, 量子力学、相对论成为了基本工具, 它们又为之前以基本成型的统计力学、电动力学提供了关键的补充与修正。这样的话, 加上早已成熟的理论力学, 人们在认识世界的过程中从微观、到介观、到宏观、到宇观, 不管在那个层面都有了可以信赖的物理学理论。物理学也得以以一种全新的面貌来发展。在第九章, 我们会对这种改变与进一步的发展展开讨论。

这次物理学的升级是如此的成功, 以至于即使对不从事物理学研究的人, 相信很多朋友也可以真真切切地感受到物理学革命彻彻底底地改变了我们这个世界和我们的生活方式。套用杨振宁先生的话: 二十世纪就是物理学的世纪【杨振宁、翁帆, 2018】。

因为物理学革命, 人们理解了质量与能量之间是可以互换的。以此为基础, 关于核反应的研究被提上日程。在二十世纪中叶这样一个时间节点, 这些研究所

³⁹⁷之后, 当然还有一些新的发展, 在第九章引言部分我们会讲。

带来的成果甚至深深地影响了世界的格局。因为物理学革命，半导体工业诞生、信息产业得到了发展，这些技术的进步完全改变了我们现在的生活。因为物理学革命，人们也开始能够彻底理解了化学反应的微观机制。很多关键的生活物资的生产效率得到了极大改善。因为物理学革命，人们也开始从分子的角度去理解生命现象，生命科学的研究也获得了一系列重大的突破。因为物理学革命，人类得以迈向深海、太空，并对地球内部结构产生重新的认识，开始新一轮的针对世界的探索。毫不夸张地将，物理学革命对于我们当今社会的影响是方方面面的，它重新定义了我们的世界。

在本章，我们针对物理学革命的过程展开了一定的解读。物理学革命之后，不光物理学的研究进入了新的篇章，人类历史也进入了新的篇章。在各个国家的人才储备与人才竞争中，物理学人才以及由物理学、数学支撑起来的STEM(Science、Technology、Engineering、Mathematics)人才储备与竞争也成为了一个关键的领域。这与我们物理学在认识自然、利用自然、改造自然这些方面的内在的特质是密切相关的。这也是我们的基础教育永远不能忽视物理学的一个根本原因！

同时，我们也要问自己在物理学革命之后，人类真的就掌握了关于我们所面对的客观的物质世界的终极真理了吗？在笔者与笔者身边的多数同行看来，当然不是！在面对复杂的物质世界的时候，物理学离成熟、有力还相差甚远！因为物理学革命，我们可以用更多的经过历史考验的物理学知识去理解这个世界，这是我们的幸运。但同时，我们也会对目前的物理学、科学的局限，有更加深刻的认识。第九章，我们会对针对目前物理学的各个领域中的关键问题，分方向展开讨论。作为本章的一个总结，我们应该说我们要感谢物理学革命让我们成长，但同时我们也应该更加清楚地认识到永远年轻的物理学永远不缺乏挑战！

第九章 物理学革命之后的现代物理学

上一章的结尾，我们说物理学革命彻彻底底地改变了物理学。在物理学革命之前，根据不同的研究领域，人们往往会用一些比较分散而不是统一的理论来针对各种各样的实验进行解释。之后，量子力学、相对论这些在物理学革命中发展起来的力学理论，成为了物理学研究中人们统一使用的理论工具。这种变化可以体现在我们大学物理的课程设置上。在本科阶段，我们会学习由理论力学、统计力学、电动力学、量子力学构成的四大力学。其中，理论力学在物理学革命之前已经彻底成型。在物理学革命中诞生的量子力学作为一个新成员加入，它又给了统计力学重要的补充。狭义相对论给了电动力学重要的补充³⁹⁸。我们在进行后续学习和研究的时候，使用的语言都是基于这四门课（这已经是一个非常统一的知识体系了）的各种扩展。

基于这样一个变化，物理学研究的领域也被重新定义。在此之前，人们一般会根据我关心的问题来对物理学研究进行划分，比如热学问题、电磁学问题、声学问题、光学问题、量子理论与量子力学的问题。相应的，我的研究领域就是电磁学、声学、光学、量子论。在物理学革命之后，在这种分割方式的基础上³⁹⁹，人们也开始基于统一的理论工具（前面提到的四大力学）按照研究对象来对物理学的研究领域进行划分了。这样的话，固体物理（后转为凝聚态物理）、原子与

³⁹⁸ 广义相对论修正的是力学，但它本身是个独立的高阶课程，并不属于四大力学。属于下面提到的四大力学的各种扩展的范畴。

³⁹⁹ 比如声学、光学、热学的领域依然存在，但整体会转向偏应用的方向。而基础研究，则开始按对象来进行划分。

分子物理、等离子体物理、核物理、粒子物理、生物物理等分支也一个个诞生并发展成型。现在，以研究对象来对物理学进行划分，甚至成为了主要判据。

同时，物理学革命之后物理学理论的发展也没有停滞。比如，在上世纪二十年代末发展起来的量子力学中，电子、原子核这些粒子是被当作量子的粒子来处理的，但电磁场是被当作经典的场来描述的。为了解决这个问题，上世纪的三十、四十年代，人们花了很多精力来发展量子电动力学理论，并获得了很大的成功。在这个过程中，场论方法被提出，并在后续研究中得到了各种应用。1965年，朝永振一郎（Sin-Itiro Tomonaga, 1906–1979年）、许温格（Julian Schwinger, 1918–1994年）、费曼（Richard Feynman, 1918–1988年）也因此获得了诺贝尔物理学奖。戴森（Freeman Dyson, 1923–2020年）虽然没有获奖，但他的戴森方程反而成了我们教科书中经典中的经典。现在，“场”这个概念也被经常当作物质世界的本质来进行使用【曹天予，2024】。再比如，从上世纪中叶开始，人们对原子核内部结构的研究也取得了重要的进展。之后，量子色动力学理论也得到了发展【黄涛，2011】。这些当然都是物理学革命之后物理学获得的极其重要的新的进步！

这些进步固然重要且令人欣喜！它们也都是我们现在物理学研究的极其重要的基石。但客观的讲，对于一个大学物理学专业的学生，在大学毕业需要进入研究生阶段开展研究的时候，将笔者在前面八章所总结的物理学基础课的内容学好，再加上一些你确定了研究方向后需要学习的高阶课程⁴⁰⁰，那本科阶段的学习就

⁴⁰⁰比如凝聚态物理方向的固体物理、量子统计力学、高等量子力学、群论，光学方向的量子统计力学、高等量子力学、量子光学、群论，粒子物理方向的高等量子力学、量子统计力学、群论、量子场论。笔者不一一列举。这里，我们强调这个仅仅是本科阶段的后期，可以但不强制学习的课程。这些课本质上都是研究生课。在进入研究生阶段后，当然要根据导师和所在学校/科研院所的要求来进行具体的选课。

算是非常出色地完成了⁴⁰¹！本书面向的读者，前言中我们提到过，是对物理学感兴趣的物理学专业与非物理学专业的学生与年轻教师。假定的读者应该具备的基础，就是完成了高中阶段的物理学习，希望了解大学物理，特别是了解它与高中物理的区别的。物理学革命后新理论的进展并不是大学物理教育需要覆盖的范畴，同时我们前面八章覆盖的内容已经可以很清楚地交待清楚了大学与高中物理的差别了。在了解这些内容后，完成从学生到科研人员的转变应该说已经不再是课程学习的问题，而是科研实践的问题了。因此，我们不会讲解这些物理学革命后的物理学新理论的进展。取而代之，我们希望针对现在物理学研究的各个分支，展开一些介绍，让读者来体会一下完成物理学本科阶段的学习后进入课题组，会面对什么样的研究？

这些分支，按照 1.5 节的介绍，分为若干方向。我们把这些方向整合后，按凝聚态物理与统计物理、AMO（原子与分子物理、光学）、核物理与粒子物理、生物物理与软物质、物理学与天文，共五节来展开。最后，在 9.6 节，是一个简单的总结与展望。

9.1 凝聚态物理与统计物理

首先是凝聚态物理与统计，笔者来自于凝聚态物理这个方向，同时，也非常喜欢统计物理。笔者将它们放在一起，是因为笔者感觉两者之间是有非常内在的紧密联系的。这个联系可以归结为一句话，就是：相互作用带来不同，或者叫多带来不同。没有相互作用，物理系统是可以还原论的方法来进行描述的。但凝

⁴⁰¹再卷的话，在笔者看来就没有任何意义了！这只会伤害从业人员对学科的兴趣！作为一个大学毕业的学生，掌握前八章对应的内容然后选定一个方向，开展具体的研究并在研究中逐步获得成就感进而继续专业的学习，在笔者看来或许是更为合理的选择。

聚态物理中的问题和统计物理中的问题则完全不同，它们必须是基于相互作用才能够产生的。没有相互作用，所有的性质都是 trivial（不新奇）的⁴⁰²！只有在有了相互作用的情况下，non-trivial 的物性才能够产生。物理学，也就迎来了相应的描述复杂系统中的真实存在的任务！这个任务是如此的间距，使得笔者可以看到其无限的可能性。

9.1.1 凝聚态物理

9.1.1.1 凝聚态物理的学科特点及发展历史

我们从凝聚态物理的学科特点和发展历史开讲。首先，我们要说的是凝聚态物理最大的特点就是它的研究内容非常丰富，甚至有种琳琅满目的感觉。笔者认为，这与凝聚态物理这个学科产生的历史背景是密切相关的。物理学革命结束的时候（上世纪二十年代末），物理学的从业人员在面对学科发展方向的时候，实际上是有两种选择的。

第一种，就是不满足于原子是由原子核与电子组成，进而寻求其内部结构以及更为基本的粒子。沿着这条路，物理学取得了长足的进步。像我们都非常熟悉的中子，就是上世纪三十年代被发现并被确认的。查德威克（James Chadwick，1891–1974 年）也因此获得了 1935 年的诺贝尔物理奖⁴⁰³。1936 年，卡尔·安德

⁴⁰²当然，凝聚态物理经历了气体理论、液体理论、More is Different 三个阶段。在早期的气体理论阶段，相互作用或许还没有那么重要。我们这里也需要解释一下。关于这个注脚，读者会随着阅读的进行更加理解。

⁴⁰³他的获奖理由是：for the discovery of the neutron。

森 (Carl David Anderson, 1905 – 1991 年) 因为正电子的发现, 也被授予了诺贝尔物理奖⁴⁰⁴。之后, 1949 年获得诺贝尔物理奖的汤川 (Hideki Yukawa, 1907 – 1981 年) 的关于介子的工作, 1957 年得奖的李政道、杨振宁先生关于弱相互作用中宇称不守恒的工作, 应该说都是这个方面的典型的例子。核物理、粒子物理这些二级学科, 也是在这个思虑下发展起来的。

第二种选择, 就是满足于上世纪二十年代末的量子力学的理论框架, 面对除了氢原子之外的更为复杂的原子与更为真实的分子和凝聚态体系, 用量子力学、统计物理、相对论的语言把它们物性描述出来。在体系逐渐变得复杂的时候, 也会有一些新奇的物性, 需要从实验和理论上进行研究。与之相应, AMO、凝聚态物理、等离子体物理这些学科也发展了起来。其中, 凝聚态物理从多体的角度来讲, 无疑是最复杂的体系。早期, 它也不叫凝聚态物理, 叫固体物理。后面, 随着与之相关的基础物理的内容与新奇现象越来越多, 在上世纪七十年代正式更名为凝聚态物理。

上面这个特征, 就决定了只要是“多带来不同”的问题, 都与“凝聚态”这样一个关键词相关【吴从军, 2022】。传统的凝聚态体系包含固体 (晶体、非晶体、准晶体)、液体、软物质, 也包含表面 (一部分是固体/液体, 一部分是气体)、界面体系 (一部分是固体、一部分是液体)。它们与原子/分子物理最大的不同就是这里的体系是原子/分子凝聚在一起形成的体系, 基元之间有相互作用。这些相互作用后决定凝聚后的物质的状态与物性。同时, 在这些体系中, 物理学家又会关心不同的物性, 比如电学性质 (往往由电子主导, 少数体系中由离子主导)、热学性质、磁学性质、力学性质, 以及这些性质之间的耦合 (比如多铁性质)。

⁴⁰⁴ 他获得了 1/2 的诺奖, 理由是: for his discovery of the positron。

此外，像超导、超流这种宏观量子现象，也是存在于凝聚态体系中的，但它们又不是简单的电学、光学、热学性质的问题，因为它们是一种状态，在这种状态中所有这些性质都会表现出奇特性。最后，“多带来不同”也意味着相变也是凝聚态物理中具有核心价值的一个问题，这让凝聚态物理与统计物理又有了内在的联系。因此，不夸张地讲，与物理学中其它兄弟方向相对单一的研究内容相比，凝聚态物理就会显得非常的“丰富”。

这种“丰富”客观上讲，会带来两个效果。其一，是它会带来无穷无尽的问题。对科学而言，有问题是好的。因为问题多，凝聚态物理的从业人员也多。目前，超过一半的物理学从业人员从事的都是凝聚态物理相关研究。同时，又因为凝聚态体系与材料、化学、信息等学科的内在联系，很多从业人员也会分布在这些兄弟学科。这就造成了凝聚态物理在物理学科内部，至少从目前看，应该说是影响力最大的一个二级学科。因为它的辐射面广。另一个效果，就是因为内容琳琅满目，价值判断标准也会分散一些。在凝聚态物理内部，很难说哪个领域比哪个领域重要⁴⁰⁵。当面向大众的时候，人们又很难用一句话把凝聚态物理讲清楚，并吸引眼球。这就导致了我们需要不停的强调“多带来不同”。至于是什么样的不同？这种不同到底为什么重要？读者就只能通过非常专业的深入阅读来体会了。客观来讲，从科普的角度来看，这是非常是不利的。但不管怎样，我们需要承认凝聚态物理这样一个“丰富”的特征，并基于这个特征来理解凝聚态物理。

历史上，人们最早关于凝聚态物理（开始的时候叫固体物理）的研究可以追溯至十八世纪末的晶体学。代表人物，是法国人阿羽依（René-Just Haüy, 1743–

⁴⁰⁵就像大众了解地最多的超导，也不能代表凝聚态物理。因为我们的磁学、热学、电学、计算等问题同样可以给我们带来很多惊喜！

1822)。他的主业是一个牧师，喜欢观察晶体结构的几何规律⁴⁰⁶。但他使用的，是砖块模型 (bricklike model)。这种砖块模型可以解释晶体的解理面，但是不能解释晶体结构随外界条件的变化，比如随温度变化的热胀冷缩性质、随外力变化的弹性。1824 年，高斯的学生西伯尔 (Ludwig August Seeber, 1793 – 1855 年) 在阿羽依的思想的基础上，引入了十九世纪初由道尔顿提出的原子论的思想。他指出晶体学中的晶格就是由原子或分子作为基元组成的。这些基元是球状颗粒⁴⁰⁷，它们之间有吸引与排斥力。晶体是由它们在这些力的作用下处于平衡位置构成的。

应该说，这是一个极其具有前瞻性的概念。它既包含了化学键这个概念最核心的思想，又指出了原子/分子的周期性排布是晶体结构的本质。在这个理论框架下，理解晶体结构随外界条件变化就会显得很自然了。基于这个思想，1848 年，布拉菲 (Auguste Bravais, 1811–1864 年) 又从数学上证明了对晶体周期性的描述可以基于 14 种格子进行。这 14 种格子后来被称为布拉菲格子 (Bravais Lattice)。再往后，1869 和 1870 年，门捷列夫 (Dmitri Mendeleev, 1834–1907 年) 和迈耶 (Julius Lothar Meyer, 1830–1895 年) 分别发布了元素周期表。基于元素周期表，人们对晶格中的基元的描述可以细化。1890 与 1891 年，熊夫利 (Arthur Moritz Schönflies, 1853 – 1928 年) 与费多罗夫 (Evgraf Fedorov, 1853 – 1919 年) 又对晶体的空间群进行了划分。空间群与前面的晶格一起，又支撑起了对周期性的描述。至此，人们对完美晶格结构进行描述的理论框架，就建立了。

进入二十世纪，由于固体热容本身就是物理学革命前开尔文提到的两朵乌云

⁴⁰⁶ 晶体是所有凝聚态物质中最有规律性的，这种规律性甚至可以被肉眼看到。这也是关于凝聚态的研究从晶体开始的一个根本原因。

⁴⁰⁷ 现在我们肯定知道它不是球形颗粒，但在当时，这不失为一种非常合理的假设。

中的一朵，对固体内原子振动的描述自然会被提上日程。1907 年，爱因斯坦提出了声子的概念，基本解决了这个问题【Einstein, 1907】。这个模型在固体物理的教材中会被成为爱因斯坦模型【韦丹, 2023】。1912 年，德拜对爱因斯坦模型中的声子振动进行了改进，考虑了声子振动频率的分布，使得热容在低温下的行为与实验可以符合地更好。这个模型后来被称为德拜模型【Debye, 1912】，它是爱因斯坦模型的改进版【韦丹, 2023】。同样在 1912 年，玻恩（Max Born, 1882–1970 年）与冯·卡门（Theodore von Kármán, 1881–1963 年）为了分析晶体中的原子振动波⁴⁰⁸，提出了玻恩–冯卡门周期性边界条件【Born, 1912】。这个也成了我们描述固体晶格振动的一个常用假设。

还是在 1912 年，劳厄（Max von Laue, 1879-1960 年）基于自己 X 射线的实验，提出了利用 X 射线的晶体衍射测量晶体结构思想。1913 年，布拉格父子（William Lawrence Bragg, 1890 – 1971 年；William Henry Bragg, 1862 – 1942 年）针对其衍射规律，提出了布拉格定律。这在很大程度上推动了 X 射线衍射学的发展。因为这些贡献，劳厄获 1914 年诺贝尔物理奖，他的获奖理由是：for his discovery of the diffraction of X-rays by crystals。布拉格父子分享了 1915 年的诺贝尔物理奖，他们的获奖理由是：for their services in the analysis of crystal structure by means of X-rays。连续两年将诺贝尔物理奖颁发在同一个领域，这在诺贝尔奖的颁奖历史上，也是不多见的⁴⁰⁹。这也在很大程度上说明了这个工作的重要性。

⁴⁰⁸ 这个冯·卡门就是我们熟悉的钱学森先生的老师，那个力学大师冯·卡门。当时，他和玻恩都属于博士毕业，在哥廷根继续工作一段时间，尽量完成教授资格考试的状态。他们肯定是聊到了这个问题，然后一起想到了这个解决方案。

⁴⁰⁹ 另一个例子是量子力学的发展，1932 年颁给了海森堡，1933 年颁给了薛定谔和狄拉克。

毫不夸张地说，X 射线对晶体结构的确认，终结了人们一百多年来关于原子论的各种争论。以结构为基础，晶体的其它性质才可能逐步清晰。X 射线之所以能够展示出晶体的结构，是因为它的波长很短，不同原子对其散射形成的波可以产生衍射现象。之后，克诺尔（Max Knoll, 1897 – 1969 年）和鲁斯卡（Ernst Ruska, 1906–1988 年）在上世纪的三十年代，又利用晶体对电子的衍射⁴¹⁰，发展出了透射电子显微镜（Transmission Electron Microscope, TEM）技术，用以对固体结构进行更精确的表征（这里已经不限于晶体了）。1986 年，依然在世的鲁斯卡也因为电镜方面的贡献，与两位扫描隧道显微镜（Scanning Tunneling Microscope, STM）技术的发明人宾宁（Gerd Binnig, 1947 出生）和罗雷尔（Heinrich Rohrer, 1933–2013 年）共享了诺贝尔物理奖⁴¹¹。其中，宾宁还是原子力显微镜（atomic force microscope, AFM）技术的发明人。应该说 X 射线、TEM、STM、AFM 都是现在人们在面对凝聚态体系时进行结构表征时必须依赖的技术。有了结构，人们才可以进一步研究凝聚态体系的其它性质。

有了结构，下一步自然是电子结构。这是我们现在理解一个分子或凝聚态体系的时候的基本思路。它的出发点很简单，就是按照量子力学的基本原理，这些系统都是由多个电子和多个原子核组成的多体的量子系统。这些系统的性质，都会由一个哈密顿量决定。不考虑外场，在非相对论极限下，这个哈密顿量的形式是：

⁴¹⁰在 8.4.1 节我们提到过，这个现象背后的物理也获得了两次诺贝尔物理奖，分别是 1929 年的德布罗意以及 1937 年的戴维森和 G. P. 汤姆孙。

⁴¹¹鲁卡斯获得了 1/2，他的获奖理由是：for his fundamental work in electron optics, and for the design of the first electron microscope。宾宁与罗雷尔分享了另外的 1/2，他们的获奖理由是：for their design of the scanning tunneling microscope。

$$\begin{aligned}\hat{H} = & -\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \nabla_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i \neq i'=1}^N V(\vec{r}_i - \vec{r}_{i'}) - \sum_{j=1}^M \frac{1}{2M_j} \nabla_j^2 + \frac{1}{2} \sum_{j \neq j'=1}^M V(\vec{R}_j - \vec{R}_{j'}) \\ & + \sum_{i,j=1}^{N,M} V(\vec{r}_i - \vec{R}_j)\end{aligned}$$

公式 9.1

考虑外场，只需要加个外场项即可。这里，为了简单起见，我们用了原子单位制，长度的单位是玻尔半径，电荷的单位是电子电荷的绝对值，质量的单位是电子质量，能量的单位是 Hartree (约 27.2 电子伏特)。更多细节，可参考文献【李新征、王恩哥，2014】理解。从这个哈密顿量，我们可以得出包含多个电子坐标、多个原子核坐标的多体波函数，以及多体薛定谔方程。当然，我们也知道薛定谔方程是个二阶的偏微分方程，求解多体的偏微分方程是极其困难的⁴¹²。

为了让问题简化，1927 年，也就是 1926 年薛定谔方程提出一年后，玻恩和奥本海默 (Julius Robert Oppenheimer, 1904–1967 年) 就提出了著名的玻恩–奥本海默近似 (图 9.1)。它的核心思想是对于公式 9.1 所描述的那个由多个电子和原子核形成的多体的量子系统，我们可以利用电子的质量比原子核小很多，因此在同样的温度下 (对应相同的平均动能) 电子运动地比原子核快很多这样一个特点，在量子力学的层面描述电子结构的时候，先将原子核作为固定在某点的经典点电荷来处理。这样的话，公式 9.1 中的第三项对应的是原子核动能项，可以先扔掉。第四项是原子核之间的库仑势，不依赖于电子坐标，是个常数，也可以先扔掉。公式 9.1 就可以相应的简化为：

$$\hat{H}_e = -\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \nabla_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i \neq i'=1}^N V(\vec{r}_i - \vec{r}_{i'}) + \sum_{i,j=1}^{N,M} V(\vec{r}_i - \vec{R}_j)$$

⁴¹² 计算量会随着系统包含的粒子的个数按指数形式增加。

这样一个只包含电子坐标的量子系统。原子核对它的影响通过公式 9.2 的第三项又一个外势来体现。

注意，这里的核心思想是“绝热近似”。这也是玻恩-奥本海默近似在很多时候被称为绝热近似的根本原因。因为电子动得快，对于电子来说，原子核的每一步运动，在电子看来都是很慢的。这样，原子核每动一步，这个时间尺度比电子驰豫的时间尺度要长很多。因此，电子有足够的时间驰豫到它相应的本征态上。这和我们在学习热力学第二定律的时候经常讲到的“缓慢地推动一个活塞”的道理是一样的【刘玉鑫，2016】【刘川，2022】。都是两个过程的时间尺度的问题。当一个时间尺度远远大于另一个时间尺度的时候，我们就可以用这样的“绝热近似”来初步地描述这个耦合的系统了。图 9.1 是对这个过程的一个比喻。就像一个移动很慢的人不小心碰了马蜂窝，马蜂就会很快在他旁边形成电子云。这样的话，不管这个人怎么跑，马蜂都会很快的、绝热的驰豫到他的周围。电子和原子核之间耦合的运动地玻恩-奥本海默近似大家就可以这样理解。



图 9.1 玻恩-奥本海默近似的原理的示意图，摘自文献【李新征、王恩哥，2014】。

通过公式 9.2，在量子力学的语言下，我们将问题进行了一个简化。对于由公式 9.2 描述的由电子形成的多体的量子系统，原子核提供的就是一个外势。在这个外势下，电子这个量子的多体系统会呈现出一系列分立的总能级。这些能量，加上原子核在它们的特定空间构型下的库仑势，给出的是分子、凝聚态这样的多原子系统在一个特定的、经典的原子核构型下的静态的总能。之后，我们可以连续地变化原子核的坐标，进而构成出一系列的高维的玻恩-奥本海默势能面（图 9.2），分别对应电子的基态与激发态。我们在理解电子结构的时候，就可以基于这个玻恩-奥本海默势能面来进行理解的。必要的时候，我们需要把原子核当做量子的粒子来进行处理。关于这些概念的更细节的介绍，读着可以参考笔者在十年前出版的一本将分子模拟的书来进行理解【李新征、王恩哥，2014】。这里我们不做过多解释。

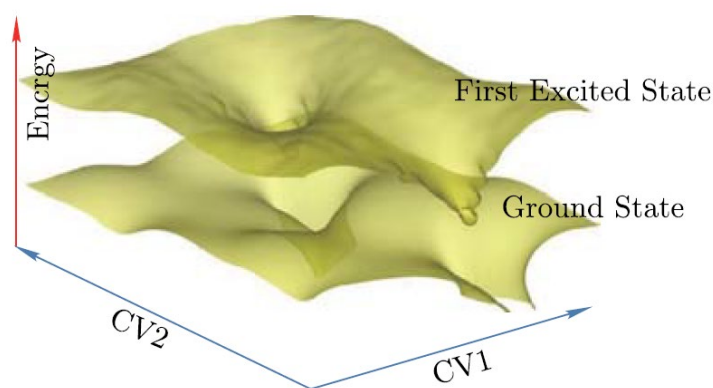


图 9.2 玻恩-奥本海默势能面的示意图，摘自文献【李新征、王恩哥，2014】。 x 轴和 y 轴我们用两个 CV 来表示。这两个字母来自英语中的 collective variable。它指的是我们的核构型构成的空间是高维的，我们画不出来。这样，在理解一些具体问题，我们就一个把这些坐标做个线性组合，构造出一些集体坐标来描述结构。以水分子为例，这两个 CV 就可以是 OH 键的键长和它们之间的夹角。依赖于不同的电子结构方法，电子基态上，会在 OH 键长位于 $0.95\text{\AA}$ 到 $1\text{\AA}$ 之间，键角在 104.5° 附近出现一个谷。那个对应的就是水分子在基态下的稳定构型。

上面说到的玻恩-奥本海默势能面能够辅助我们去理解分子、凝聚态体系这样的多原子体系的结构。我们在讲到玻恩-奥本海默势能面的时候，电子结构这个词就已经出现了。我们用到的语言，是量子力学成熟之后（也就是上世纪二十年代末之后）人们使用的语言。一定程度上，我们可以把电子当作是原子核之间的“量子胶”。需要说明的是历史上，在这个语言出现之前，人们实际上已经对固体中的电子行为开始进行微观层面的理论描述了。其中，最具代表性的就是1900年的Drude模型。它是由德鲁德(Paul Drude, 1863–1906年)提出的【Drude, 1900】 【牛谦, 2024】。目的，是基于J.J. Thomson发现的电子，用之前已经成型的人们描述理想气体状态方程的气体动力学理论（Kinetic Theory of Gases）来描述简单金属中的电导。

德鲁德建立的微观图像非常的简单。考虑到卢瑟福的行星模型和玻尔的原子模型的建立比1900年这个时间节点要晚十多年，德鲁德不可能将电子和原子核进行完全的分离。他仅仅是假设金属中存在等量的正负粒子，整体呈现电中性。其中的负粒子，就是电子。它们在电场或者磁场的作用下，会进行加速运动。加速后的电子会与其它粒子碰撞进而产生摩擦，进而使运动稳定下来。这样，带点粒子的运动就可以由如下两个方程来描述：

$$\dot{\vec{r}} = \frac{\vec{p}}{m} \quad \text{公式 9.3}$$

$$\dot{\vec{p}} = -e\vec{E} - \frac{\vec{p}}{\tau} \quad \text{公式 9.4}$$

其中， $\vec{r}$ 、 $\vec{p}$ 代表的是电子的位置， e 、 m 、 τ 代表电子的电荷量、质量、由碰撞决

定的驰豫时间。

电场力的加速与碰撞引起的摩擦力的减速的对抗的结果，是：

$$\dot{\vec{p}} = -e\vec{E} - \frac{\vec{p}}{\tau} = 0$$

公式 9.5

这就使得平衡状态下的 $\vec{p}$ 等于 $-e\vec{E}\tau$ 。而静电流 $\vec{j} = -en\dot{\vec{r}}$ ，同时它又等于 $\sigma\vec{E}$ 。其中 σ 为电导率。这样的话，结合公式 9.3， $\vec{j}$ 就继续等于 $e^2\tau n\vec{E}/m$ ，进而 $\sigma = e^2n\tau/m$ 。欧姆定律也有了微观对应。

将类似公式 9.2 到公式 9.5 的公式用到霍效应的场景⁴¹³，Drude 模型也可以获得一定程度的成功。当时，这很让人振奋。现在，我们知道它当时的成功在很大程度上是来自于描述电导的不同项之间的误差抵消。关于这个理论的细节，感兴趣的同学可以参考 Ashcroft 和 Mermin 合写的《固体物理》的第一章来理解【Ashcroft、Mermin, 2000】。我们这里仅仅想说的是即使在量子力学没有成熟前，人们已经开始针对金属中的电子进行一些初步的理论描述，来理解电导了。我们还可以提一句的是即使二十世纪初 Drude 模型很成功，爱因斯坦还是对它提出了质疑。这个质疑主要体现在电子对金属热容的贡献上。上世纪二十年代中期，随着玻色-爱因斯坦分布、费米-狄拉克分布这些量子力学层面的统计力学规律的提出，这个问题也得到了彻底的解决。

现在，我们讲完了凝聚态的特点（丰富），讲完了结构（从阿羽依到 X 射线与电镜），讲完了最早的结构（Drude 模型）。下一步就是物理学革命之后，当量子力学进入固体物理的研究后，它会有什么样的飞跃了。这个时间节点集中

⁴¹³有个电场沿导线方向，垂直与导线方向加一个磁场。这样，电子和空穴会向导线中垂直与磁场和电场的方向聚集，形成霍尔电压。

在上世纪的二十末、三十年代初。在此之前，因为量子理论还处在雏形阶段，人们对原子还没有理解清楚，不太可能对凝聚态体系有比较先进的理论。量子理论（特别是量子力学）、统计物理的发展与成熟，是凝聚态物理得以获得进步的基础。

1925 年，泡利在研究反常塞曼效应的过程中认识到了泡利不相容原理【Pauli, 1925a–1925b】。这是量子统计方面具有里程碑意义的工作！之后，他将这个方法应用于自由电子气，解决了 Drude 模型的一个根本问题。在 Drude 模型中，电子是作为一个经典粒子来处理的。虽然这个模型本身可以对简单金属中的电导有好的描述（当然，前面提到过，这个好的描述很大程度上来自于误差抵消【Ashcroft, Mermin, 2000】），但电子在这个理论框架下，是需要对比热像经典粒子那样产生贡献的。但实验上，很明确的结果就是电子对比热的贡献却与经典的能均分定理的描述非常不同。它和量子的声子的贡献也非常不同⁴¹⁴。当然，需要说明的是历史上并不是泡利的不相容原理出来后他就意识到电子比热与之相关的。首先，泡利是将自己的不相容原理应用到自由电子体系，解决了实验上人们可以在金属中观测到的顺磁（paramagnetism）现象⁴¹⁵。很多文献都会说这是 1925 年泡利的工作，笔者能查到的说法是 1925 年泡利提出过这种想法，但发表的文章是在 1927 年出版的【Pauli, 1927b】。

在这个期间，泡利跟自己的导师索末菲就这个问题进行过交流⁴¹⁶。1927 年，

⁴¹⁴后来人们认识到这是费米子和玻色子的区别，这个要等到本段提到的泡利、索末菲那一系列工作的时候。

⁴¹⁵这个现象就是泡利命名的，也称为 Pauli Paramagnetism。

⁴¹⁶在这个时间节点，泡利就已经是一个非常成熟的物理学家了。这个时候，学生跟老师讨论，老师往往会受益。笔者是有这样的感受的。因此，这里也根据自己的感受，对这段物理学史中

索末菲利用这个思想研究了自由电子的热容⁴¹⁷，解释了电子对比热的贡献比经典的能均分定理的描述小很多这样一个问题【Sommerfeld, 1928】。这个工作，建立了人们利用费米-狄拉克分布研究电子系统的传统。这个意义，是非常重大的！基于这个思想，1933年，索末菲和贝特（Hans Bethe, 1906–2005年）共同完成了一本名为“The Electron Theory of Metals”的书【Sommerfeld, Bethel, 1933】。本书的内容就是我们现在说的“关于金属的索末菲的理论（Sommerfeld’s Theory of Metals）”，它的本质，就是我们说的自由电子气理论（见【Ashcroft、Mermin, 2000】第二章）。

同样在上世纪二十年代末这个时间节点，布洛赫（Felix Bloch, 1905–1983年）提出了布洛赫定理【Bloch, 1929】。这个工作来自于他的博士论文⁴¹⁸。这里，他

在某个阶段会反过来帮到老师这个事情进行一个解读。之后，我们也可以对索末菲进行一个展开。教科书中，我们总是会看到索末菲是个很伟大的物理学家也带出了很多好学生但没得诺奖的扎样的话。从笔者这样一个从事了较长时间物理学教学与物理学研究的大学老师的角度来看，这个很合理，也完全不影响索末菲的历史地位！从科学知识的贡献上，笔者认为索末菲的主要贡献大致可分为三点。第一点是对玻尔原子模型的改进。玻尔的原子模型只适用于氢原子，用的也是圆轨道，量子数只有一个 n （这与 $SO(4)$ 群的对称性有关，前面提到过）。到了索末菲这里，他引入了椭圆轨道，以及 l 、 m 这两个量子数。这个是1916年。第二个贡献，四年之后，他和自己的学生朗德、泡利一起意识到还有另一个内量子数，这是我们关于自旋的最早的认识。第三个贡献，就是基于量子统计的自由电子气模型，这是对 Drude 模型的改进。笔者有一次和田光善老师聊，田老师觉得第三个是可以给诺奖的。笔者后来想了一下，比较认同田老师的看法。但就这个贡献而言，遗憾的一点是索末菲在1951年就去世了。在这个时间节点前，物理学还是有足够的更重要的成果颁发的。像玻恩的波函数的统计性解释，直到1954年才补上。从 fundamental 的程度上来讲，索末菲再长寿一些，到了上世纪60、70年代，是足够凭借这个工作获得诺奖委员会的认可。这是从科学知识的贡献上的分析。话说回来，我们这本书实际上在不停的强调科学不光是科学知识，还是一种文化。从这个角度来讲，索末菲所创建的学派的贡献是远远大于绝大多数诺奖获得者的！

⁴¹⁷这个时候，费米-狄拉克分布的思想也已成熟。

⁴¹⁸他是海森堡的第一个博士生，1928年完成答辩。他这个博士读的时间特别短。当然，他的这个工作对于凝聚态物理，是奠基性的。

系统研究了周期势场(比如晶格场)中的一个电子的量子态的理论描述的问题⁴¹⁹。

像我们现在描述周期势场中的电子态一般会从两个极限出发进行描述(一个是近自由电子气体,一个是紧束缚模型)这些习惯⁴²⁰,都来自于此工作。布洛赫的周期势场中的电子态的理论,加上索末菲、贝特的自由电子气体理论,构成了我们现在的《固体物理》教科书中介绍电子态的时候所说的能带论的核心内容。有了能带论,人们也可以将金属、半导体、绝缘体进行一个基本的区分【Ashcroft、Mermin, 2000】。关于电子态的气体理论,也基本成型。

目前提到的电子结构理论,即使加了周期势,也是气体理论。这里,不光原子核保持在平衡位置,其它电子对我们关注的电子的量子态的影响,也停留在平均场的层面。毫无疑问这些都是近似。

首先,原子核是运动的,它们的运动也有自己的量子态【Einstein, 1907】
【Debye, 1912】。早在爱因斯坦模型与德拜模型中,它们对比热的贡献就已经被详细讨论过(图 8.14)。在这两个模型中,原子核振动的量子是被直接假设的,关于其微观机制的描述,实际上被绕过了。实际上,同样在 1912 年,在我们前面提到的玻恩与冯·卡门的周期性边界条件的工作中,这个机理就已经被详细地进行了讨论【Born, 1912】。在此工作中,虽然格点上原子的情况和原子间的相互作用被大幅进行了简化(仅考虑一维双原子晶格和最紧邻原子间简谐作用),但晶格动力学中的核心思想已经被很好地进行了描述,比如声子里面的声学支和

⁴¹⁹德国的博士论文的习惯就是我在博士期间系统的研究一个问题,成果总结出来的话,最理想的状态是形成一本书。

⁴²⁰其中,就周期场对近自由电子气的影响的问题,布洛赫已经描述得比较清楚了。关于紧束缚的问题,也就是周期场中的电子态来自于原子轨道的线性叠加(Linear Combination of Atomic Orbital, 简称 LCAO),人们现在很少用布洛赫当时给出的描述,而是会使用 J. C. Slater 与 G. F. Koster 在 1954 年给出的方法【Slater, 1954】。

光学支（见图 9.3）。现在，我们考虑晶体中的晶格的时候也是采取同样的处理。比如，假设原子核偏离平衡位置的时候所感受到的势能是一个简谐的势能。之后，把欧氏空间下的原子核的坐标进行一个线性变化，产生简正坐标。这个简正坐标的作用是把原子核振动的量子态进行所谓的正则化。这样产生的每个振动的量子态（固体中称为声子）之间就是去耦合的了。当然，真实的固体中，原子核所感受到的势不可能是简谐的，因此声子之间是有相互作用的。但不管怎样，声子的微观图像已基本明了【Born, 1915】。考虑到量子力学的成熟是在十几年后，我们必须承认这是极具前瞻性的工作，虽然在当时它的风头不及爱因斯坦模型与德拜模型。后来的固体物理的发展，实际上已经告诉了我们就生命力而言（面对真实体系的可扩展性），存在另外一个答案。

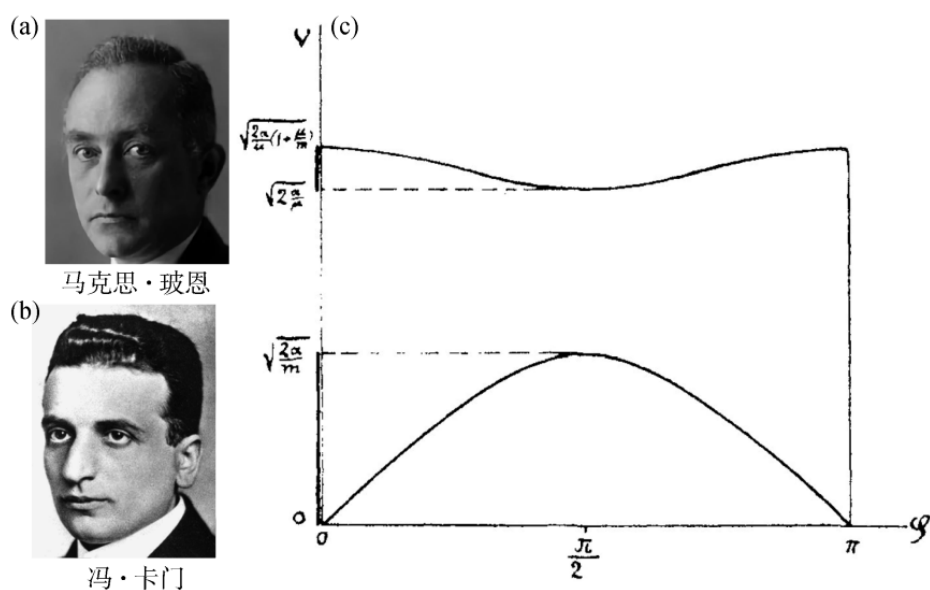


图 9.3 玻恩与冯·卡门的头像（a 与 b）以及他们在文献【Born, 1912】给出的声子的声学支与光学支。此图摘自文献【谢梦祥, 2022】。图 c 来自文献【Born, 1912】。

真实的固体中，人们可以基于上面提到的声子的量子态，利用所谓的微扰的方法，讨论它们与各种元激发之间的耦合（比如声子-声子之间、电子-声子之

间、声子-光子之间、声子-激子之间)【Born、Huang, 1954】。比如, 1933 年, 朗道就提出了极化子 (Polaron) 的理论【Landau, 1933】【Landau, 1948】。它的本质, 就是声子运动带来晶格畸变。在畸变的晶格下, 电子-声子会耦合, 进而产生一个新的元激发。这个元激发, 就是极化子。同样, 声子与声子之间会有耦合, 它们会对材料的热导产生影响【】光子与声子之间也有耦合, 它们可以形成极化激元 (Polariton)【Tolpygo, 1950】【Huang, 1951a】【Huang, 1951b】。还有就是电子态与原子核的振动态可以产生很多高阶的散射过程。与之相应, 从上世纪的四十年代到七十年代, 各种电-声耦合理论也得到了巨大的发展。比如,

(晶格振动, 耦合, 磁性, 超导, 超流, 半导体, 相变, 几何位相)

来总结本节。

9.1.1.2 凝聚态物理研究中三个思维范式的两次变革

9.1.2 统计物理

统计物理的研究内容

9.1.3 凝聚态物理与统计物理之间内在联系

凝聚态物理与统计物理

9.2 原子与分子物理、光学

除了凝聚态物理、统计物理，我们要介绍的。。

9.2.1 原子与分子物理

我们先从原子与分子物理说起。

来总结本节。

9.2.2 激光

关于光学。

来总结本节。

9.2.3 冷原子体系

近年来。。

9.3 核物理、粒子物理

现在开始基于前面的置换群基础理论讲应用。具体例子是置换对称性允许的全同粒子体系（比如 n 个电子）本征态波函数。

来总结本节。

9.3.1 原子核的内部结构

凝聚态物理的研究内容非常丰富，甚至有种琳琅满目的感觉。这与凝聚态物理这个学

来总结本节。

9.3.2 核嬗变与核反应

凝聚态物理的研究内容非常丰富，甚至有种琳琅满目的感觉。这与凝聚态物理这个学

来总结本节。

9.3.3 粒子物理

凝聚态物理的研究内容非常丰富，甚至有种琳琅满目的感觉。这与凝聚态物理这个学

9.4 生物物理、软物质

现在开始基于前面的置换群基础理论讲应用。具体例子是置换对称性允许的全同粒子体系（比如 n 个电子）本征态波函数。

9.5 物理学与天文

现在开始基于前面的置换群基础理论讲应用。具体例子是置换对称性允许的全同粒子体系（比如 n 个电子）本征态波函数。

9.6 总结与展望

(首先是置换的定义)

【Abbott, 2016】 Abbott B P, Abbott R, Abbott T D, Abernathy M R, et al. (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration). Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger. Phys. Rev. Lett., 2016, 116: 061102.

【爱因斯坦, 2015】 爱因斯坦. 狭义与广义相对论浅说. 张卜天, 译. 北京: 商务印书馆, 2015

【Aitchison, 2004】 Aitchison I J R, MacManus D A, Snyder T M. Understanding Heisenberg's 'Magical' Paper of July 1925: a New Look at the Computational Details, arXiv, arXiv:quant-ph/0404009v1.

【阿里奥托, 2011】 阿里奥托. 西方科学史 (第二版). 鲁旭东, 张敦敏, 刘钢, 赵培杰, 译. 北京: 商务印书馆, 2011.

【Anderson, 1995】 Anderson M H, Ensher J R, Matthews M R, Wieman C E, Cornell E A, Observation of Bose-Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor, Science, 1995, 269: 198.

【Anderson, 1972】 Anderson P W. More is different, Science, 1972, 177: 393.

【Ashcroft、Mermin, 2000】 Ashcroft N W, Mermin N D. Solid State Physics. World Publishing Company, 2000.

【Bernstein, 2005】 Bernstein J. Max Born and the quantum theory. Am. J. Phys., 2005, 73: 999 – 1008.

【布雷苏, 2022】 布雷苏. 微积分溯源: 伟大思想的历程. 陈见柯, 林开亮, 叶卢庆, 译. 北京: 人民邮电出版社, 2022.

【Bloch, 1929】 Bloch F. Über die quantenmechanik der elektronen in kristallgittern [On the quantum mechanics of electrons in crystal lattices]. Zeitschrift für physik, 1929, 52(7),

555-600.

【玻恩, 2015】玻恩. 我这一代的物理学. 侯德彭/蒋贻, 译. 北京: 商务印书馆, 2015.

【Bohr, 1913a】Bohr N. On the Constitution of Atoms and Molecules. Philos. Mag., 1913, 26 (6): 1 – 25.

【Bohr, 1913b】Bohr N. On the Constitution of Atoms and Molecules. Philos. Mag., 1913, 26 (6): 476–502.

【Bohr, 1913c】Bohr N. On the Constitution of Atoms and Molecules. Philos. Mag., 1913, 26 (6): 857–875.

【Bohr, 1920】Bohr N. Über die Serienspektren der Elemente [About the serial spectra of the elements], Zeitschrift für Physik (in German), 1920, 2 (5): 423 – 478.

【Boltzmann, 1884】Boltzmann L. Ableitung des Stefan'schen Gesetzes, betreffend die Abhängigkeit der Wärmestrahlung von der Temperatur aus der electromagnetischen Lichttheorie [Derivation of Stefan's law concerning the dependence of thermal radiation on temperature from the electromagnetic theory of light]. Ann. Phys., 1884, 22: 291-294.

【Born, 1912】Born M, von Karman T. Über Schwingungen im Raumgittern [On vibrations in space lattices]. Physikalische Zeitschrift, 1912, 13: 297-309.

【Born, 1915】Born M. Dynamik der Kristallgitter [dynamics of crystal lattices], Published by B. G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1915.

【Born, 1924】Born M. Über Quantenmechanik [About Quantum Mechanics]. Z. Physik, 1924, 26: 379 – 395.

【Born, 1925】Born M, Jordan P. Zur Quantenmechanik [On Quantum Mechanics]. Z.

Phys., 1925, 34: 858 – 888.

【Born, 1926a】 Born M, Heisenberg W, Jordan P. Zur Quantenmechanik II [On Quantum Mechanics II]. Z. Phys., 1926, 35: 557 – 615.

【Born, 1926b】 Born M. Zur Quantenmechanik der Stoßvorgänge [On the Quantum Mechanics of Collisions]. Z. Phys., 1926, 37 (12): 863 – 867.

【Born, 1927】 Born M, Oppenheimer R. Zur Quantentheorie der Molekeln [On the Quantum Theory of Molecules]. Annalen der Physik, 1927, 389: 457-484.

【Born, Huang, 1954】 Born M, Huang K. Dynamical Theory of Crystal Lattices. Clarendon Press, Oxford, 1954.

【Born, 1978】 Born M. My Life: Recollections of a Nobel Laureate, Taylor & Francis, New York, 1978.

【曹庆宏、杨李林, 2025】曹庆宏、杨李林. 量子力学. 北京: 高等教育出版社, 2025.

【曹则贤, 2021】曹则贤. 黑体辐射公式的多种推导及其在近代物理构建中的意义(I). 物理, 2021, 50(11): 761.

【曹天予, 2024】曹天予. 20 世纪场论的概念发展. 李宏芳, 译. 北京: 科学出版社, 2024.

【曹则贤, 2024】曹则贤. 马克斯·玻恩——连接经典时代物理与近代物理的思想桥梁. 物理, 2024, 53(4): 259–264.

【朝永振一郎, 2017】朝永振一郎. 物理学是什么. 周自恒, 译. 北京: 人民邮电出版社, 2017.

【陈难先, 2023】陈难先. 黑体辐射定律轶闻遐思——从普朗克一百年前的一段话

说起. 物理, 2023, 52(4): 283-289.

【陈洪捷, 2024】陈洪捷. 观念与文化: 德国高等教育研究. 济南: 山东教育出版社, 2024.

【Chenciner, 2015】Chenciner A. Poincaré and the Three-Body Problem. In: Duplantier, B., Rivasseau, V. (eds) Henri Poincaré, 1912 – 2012. Progress in Mathematical Physics, vol 67. Birkhäuser, Basel, 2015.

【Coffey, 2006】Coffey P. Chemical free energies and the third law of thermodynamics. Historical Studies in the Physical and Biological Sciences, 2006, 36(2): 365.

【Compton, 1923】Compton A H. A Quantum Theory of the Scattering of X-rays by Light Elements. Phys. Rev., 1923, 21: 483.

【Darwin, 1927】Darwin C G. The Electron as a Vector Wave. Nature, 1927, 119: 282.

【Davies, 1946】Davies C N. Tyndall and Stefan's Radiation Law. Nature, 1946, 157: 879.

【Davis, 1995】Davis K B, Mewes M O, Andrews M R, van Druten N J, Durfee D S, Kurn D M, Ketterle W. Bose-Einstein Condensation in a Gas of Sodium Atoms. Phys. Rev. Lett., 1995, 75: 3969.

【Davisson, 1921】Davisson C., Kunsman C H. The Scattering of Electrons by Nickel. Science, 1921, 54(1404): 522-524.

【Davisson, 1923】Davisson C, Kunsman C H. The Scattering of Low Speed Electrons by Platinum and Magnesium. Phys. Rev., 1923, 22: 242.

【Davisson, 1927a】Davisson C, Germer L H. The Scattering of Electrons by a Single Crystal of Nickel. Nature, 1927, 119: 558-560.

【Davisson, 1927b】 Davisson C, Germer L H. Diffraction of Electrons by a Crystal of Nickel. Phys. Rev., 1927, 30: 705.

【Davisson, 1928】 Davisson C J, Germer L H. Reflection of Electrons by a Crystal of Nickel, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 1928, 14 (4): 317-322.

【de Broglie, 1923a】 de Broglie L. Ondes et quanta. C. R. hebd. Séanc. Acad. Sci. Paris, 1923, 177: 507-510.

【de Broglie, 1923b】 de Broglie L. Quanta de lumière, diffraction et interferences. C. R. hebd. Séanc. Acad. Sci. Paris, 1923, 177: 548-551.

【de Broglie, 1923c】 de Broglie L. Les quanta, la théorie cinétique des gaz et le principe de Fermat [The kinetic theory of gases and Fermat's principle]. C. R. hebd. Séanc. Acad. Sci. Paris, 1923, 177: 630-632.

【Debye, 1912】 Debye P. Zur Theorie der spezifischen Wärmen [On the Theory of Specific Heats]. Ann. Physik., 1912, 4: 789.

【Debye, 1916】 Debye P. Quantenhypothese und Zeeman-Effekt [Quantum hypothesis and Zeeman effect]. Phys. Z., 1916, 17: 507.

【邓妙怡, 2024】 邓妙怡, 李新征. 热力学第三定律的发现过程及内涵浅析. 物理, 2024, 53: 777.

【邓晓芒、赵林, 2014】 邓晓芒, 赵林. 西方哲学史 (第二版). 北京: 高等教育出版社, 2014.

【Dirac, 1926】 Dirac P A M. On the Theory of Quantum Mechanics. Proceedings of the Royal Society (London) A, 1926, 112: 281-305.

【Dirac, 1927】 Dirac P A M. The Physical Interpretation of the Quantum Dynamics.

Proceedings of the Royal Society (London) A, 1927, 113: 621-641.

【Dirac, 1928】 Dirac P A M. The Quantum Theory of the Electron. Proceedings of the Royal Society (London) A, 1928, 117: 778.

【Drude, 1900】 Drude P. Zur Elektronentheorie der Metalle [On the Electron Theory of Metals]. Annalen der Physik, 1900, 306: 566–613.

【Dyson, 1920】 Dyson F W, Eddington A S, Davidson C. A Determination of the Deflection of Light by the Sun's Gravitational Field, from Observations Made at the Total Eclipse of May 29, 1919. Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences., 1920, 220 (571 – 581): 291 – 333.

【Eckart, 1926a】 Eckart C. Operator calculus and the solution of the equations of quantum dynamics. Phys. Rev., 1926, 28: 711.

【Eckart, 1926b】 Eckart C. Note on the correspondence principle in the new quantum theory. Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 1926, 12: 684.

【Ehrenfest, 1911】 Ehrenfest P. Welche Züge der Lichtquantenhypothese spielen in der Theorie der Wärmestrahlung eine wesentliche Rolle?" [In which features of the light quantum hypothesis does thermal radiation play an essential role?]. Annalen der Physik., 1911, 341 (11): 91 – 118.

【Einstein, 1905a】 Einstein A. Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt [On a heuristic point of view concerning the production and transformation of light]. Ann. Phys., 1905, 332: 132.

【Einstein, 1905b】 Einstein A. Zur Elektrodynamik bewegter Körper [On the Electrodynamics of Moving Bodies]. Ann. Phys., 1905, 322: 891-921.

【Einstein, 1907】Einstein A. Die Plancksche Theorie der Strahlung und die Theorie der spezifischen Wärme [Planck's Theory of Radiation and the Theory of Specific Heat]. Ann. Physik., 1907, 22: 180.

【Einstein, 1911】Einstein A. On the Influence of Gravitation on the Propagation of Light. Annalen der Physik, 1911, 35 (10): 898 – 908.

【Einstein, 1916a】Einstein A. The Foundation of the General Theory of Relativity. Annalen der Physik, 1916, 49, 769-822.

【Einstein, 1916b】Einstein A. Näherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation [Approximate Integration of the Field Equations of Gravitation]. Königlich Preußische Akademie der Wissenschaften (Berlin). Sitzungsberichte, 1916 (year), 688 – 696 (page). （这一条不太确认格式是否正确）

【Einstein, 1918】Einstein A. Über Gravitationswellen [About Gravitational Waves]. Königlich Preußische Akademie der Wissenschaften (Berlin). Sitzungsberichte, 1918 (year), 154 – 167 (page). （这一条也不太确认格式是否正确）

【Einstein, 1917】Einstein A. The Quantum Theory of Radiation. Physikalische Zeitschrift, 1917, 18: 121.

【Elsasser, 1925】Elsasser W. Bemerkungen zur Quantenmechanik freier Elektronen [Remarks on the Quantum Mechanics of Free Electrons]. Naturwissenschaften, 1925, 13: 711.

【冯友兰, 2013】冯友兰. 中国哲学简史. 涂又光, 译. 北京: 北京大学出版社, 2013.

【Fermi, 1924】Fermi E. Considerazioni sulla quantizzazione dei sistemi che

contengono degli elementi identici [Considerations on the quantization of systems containing identical elements]. *Nuovo Cim*, 1924, 1: 145 – 152.

【Fitzgerald, 1889】 FitzGerald G F. The Ether and the Earth's Atmosphere, *Science*, 1889, 13 (328): 390.

【傅海辉, 2002】 傅海辉. 电子自旋假说的提出及其历史经验. *物理*, 2002, 31(08).

【高崇寿、谢柏青, 2004】 高崇寿, 谢柏青. 今日物理. 北京: 高等教育出版社, 2004.

【Gerlach, 1922a】 Gerlach W, Stern O. Der experimentelle Nachweis des magnetischen Moments des Silberatoms" [The experimental proof of the magnetic moment of the silver atom]. *Zeitschrift für Physik*, 1922, 8 (1): 110 – 111.

【Gerlach, 1922b】 Gerlach W, Stern O. Der experimentelle Nachweis der Richtungsquantelung im Magnetfeld [The experimental proof of directional quantization in the magnetic field]. *Zeitschrift für Physik*, 1922, 9 (1): 349 – 352.

【Gerlach, 1922c】 Gerlach W, Stern O. Das magnetische Moment des Silberatoms [The magnetic moment of the silver atom]. *Zeitschrift für Physik*, 1922, 9 (1): 353 – 355.

【Giacconi, 1962】 Giacconi R, Gursky H, Paolini FR, et al. Evidence for X rays from sources outside of the solar system. *Phys. Rev. Lett.*, 1962, 9(11):439 – 443.

【Gibbs, 1873a】 Gibbs J W. Graphical Methods in the Thermodynamics of Fluids. *Transactions of the Connecticut Academy of Arts and Sciences*, 1873, II: 309.

【Gibbs, 1873b】 Gibbs J W. A method of geometrical representation of the thermodynamic properties of substances by means of surfaces. *Transactions of the Connecticut Academy of Arts and Sciences*, 1873, II: 382.

【Gibbs, 1875】Gibbs J W. On the Equilibrium of Heterogeneous Substances, Transactions of the Connecticut Academy of Arts and Sciences, 1875-1876, 3: 108.

【Gibbs, 1877】Gibbs J W. On the Equilibrium of Heterogeneous Substances, Transactions of the Connecticut Academy of Arts and Sciences, 1877-1878, 3: 343.

【郭奕玲、沈慧君, 2005】郭奕玲、沈慧君. 物理学史 (第二版). 北京: 清华大学出版社, 2005.

【汉南, 2022】汉南. 科学的起源: 中世纪如何奠定现代科学. 刘崇岭, 译. 上海: 上海教育出版社, 2022.

【Heisenberg, 1925】Heisenberg W. Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen [On quantum-theoretical reinterpretation of kinematic and mechanical relations]. Z. Phys., 1925, 33: 879 – 893.

【Heisenberg, 1927】Heisenberg W. Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik [On the Intuitive Content of Quantum Theoretical Kinematics and Mechanics]. Z. Phys., 1927, 43: 172 – 198.

【侯嘉昊, 2020】侯嘉昊, 袁业飞. 黑洞的理论预言和观测证认. 物理实验, 2020, 40(12): 1–8.

【厚宇德, 2012】厚宇德. 玻恩研究. 北京: 人民出版社, 2012.

【厚宇德, 2017】厚宇德. 玻恩与哥廷根物理学派. 北京: 中国科学技术出版社, 2017.

【Huang, 1951a】Huang K. Lattice vibrations and optical waves in ionic crystals. Nature, 1951, 167 (4254): 779 – 780.

【Huang, 1951b】Huang K. On the interaction between the radiation field and ionic

crystals. Proceedings of the Royal Society of London, 1950, A. 208 (1094): 352 – 365.

【黄昆, 2014】黄昆. 固体物理学 (重排本). 北京: 北京大学出版社, 2014.

【黄涛, 2011】黄涛. 量子色动力学引论. 北京: 北京大学出版社, 2011.

【Hubble, 1926】Hubble E. Extragalactic nebulae. Astrophysical Journal, 1926, 64 (64): 321 – 369.

【Hulse, 1975】Hulse R A, Taylor J H. Discovery of a pulsar in a binary system. Astrophysical Journal, 1975, 195: L51-L53.

【Jeans, 1905】Jeans J H. On the Application of Statistical Mechanics to the General Dynamics of Matter and Ether. Proceedings of the Royal Society of London. Series A, 1905, 76 (510): 296-311.

【金晓峰, 2022a】金晓峰. 庞加莱的狭义相对论之一: 洛伦兹群的发现. 物理, 2022, 51: 191.

【金晓峰, 2022b】金晓峰. 庞加莱的狭义相对论之二: 物理学定律的对称性. 物理, 2022, 51: 275.

【金晓峰, 2022c】金晓峰. 庞加莱的狭义相对论之三: 思想与观念. 物理, 2022, 51: 354.

【金晓峰, 2022d】金晓峰. 庞加莱的狭义相对论之四: 庞加莱与洛伦兹和闵可夫斯基. 物理, 2022, 51: 787.

【金晓峰, 2023】金晓峰. 庞加莱的狭义相对论之五: 庞加莱与爱因斯坦. 物理, 2023, 52: 37.

【Jordan, 1927】Jordan P. Über eine neue Begründung der Quantenmechanik. Zeitschrift für Physik, 1927, 40: 809-838.

- 【康德, 2022】康德. 纯粹理性批判. 韩林合, 译. 北京: 商务印书馆, 2022.
- 【Kerr, 1963】Kerr R P. Gravitational Field of a Spinning Mass as an Example of Algebraically Special Metrics. *Phys. Rev. Lett.*, 1963, 11: 237.
- 【Kirchhoff, 1860】Kirchhoff G. Über das Verhältniss zwischen dem Emissionsvermögen und dem Absorptionsvermögen der Körper für Wärme und Licht [On the relationship between the emissivity and the absorption capacity of bodies for heat and light]. *Annalen der Physik und Chemie*, 1860, 109(2): 275–301.
- 【Kittel, 2005】Kittel C. *Introduction to Solid State Physics*. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc. A, 2005.
- 【Laidler, 1993】Laidler K J. *The World of Physical Chemistry*. Oxford University Press, 1993.
- 【Landé, 1921】Landé A. Über den anomalen Zeemaneffekt (Teil I) [On the anomalous Zeeman effect (Part I)], *Z. Physik*, 1921, 5: 231 – 241.
- 【Landé, 1923】Landé A. Termstruktur und Zeemaneffekt der Multipletts [Term structure and Zeeman effect of multiplets]. *Z. Physik*, 1923, 15: 189 – 205.
- 【Landau, 1933】Landau L D. Über die Bewegung der Elektronen in Kristallgitter [On the Movement of Electrons in Crystal Lattices]. *Phys. Z. Sowjetunion.*, 1933, 3: 644 – 645.
- 【Landau, 1948】Landau L D, Pekar S I. Effective mass of a polaron, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 1948, 18, 419 – 423 [in Russian]. English translation: *Ukr. J. Phys.*, 2008, Special Issue, 53, pp. 71 – 74.
- 【劳厄, 1978】劳厄. 物理学史. 范岱年/戴念祖, 译. 北京: 商务印书馆, 1978.

【Lee, 1952】 Lee T D, Yang C N. Statistical Theory of Equations of State and Phase Transitions. II. Lattice Gas and Ising Model. Phys. Rev. B, 1952, 87(3): 410.

【Lewis, 1926】 Lewis G N. The Conservation of Photons. Nature, 1926, 118: 874 – 875.

【李新征, 2014】 李新征, 王恩哥. 分子及凝聚态系统物性的计算模拟: 从电子结构到分子动力学. 北京: 北京大学出版社, 2014.

【李新征, 2024】 李新征. 群论及其在凝聚态物理中的应用 (第二版). 北京: 北京大学出版社, 2024.

【廖玮, 2021】 廖玮. 科学思维的价值: 物理学的兴起、科学方法与现代社会. 北京: 科学出版社, 2021.

【林熙, 2025】 林熙. 低温实验导论 (上下册). 北京: 北京大学出版社, 2025.

【刘川, 2022】 刘川. 热力学与统计物理. 北京: 北京大学出版社, 2022.

【刘玉鑫, 2016】 刘玉鑫. 热学. 北京: 北京大学出版社, 2016.

【Lloyd, 2021】 Lloyd G E R. 希腊科学. 张卜天, 译. 北京: 商务印书馆, 2021.

【Lorentz, 1904】 Lorentz H A. Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity smaller than that of light. Huygens Institute – Royal Netherlands Academy of Arts and Sciences (KNAW), 1904, 6: 809 – 831.

【罗素, 2022】 罗素. 西方哲学史 (上、下册). 何兆武, 李约瑟, 译. 北京: 商务印书馆, 2020.

【Lummer, 1899】 Lummer O, Pringsheim E. Die Vertheilung der Energie in Spectrum des schwarzen Körpers und des blanken Platins; 2. Temperaturbestimmung fester glühender Körper [The distribution of energy in the spectrum of the black body and the shiny platinum; 2. Temperature determination of solid glowing bodies]. Verhandlungen

der Deutschen Physikalischen Gesellschaft, 1899, 1: 215.

【Maiman, 1960】 Maiman T H. Stimulated Optical Radiation in Ruby. Nature, 1960, 187: 493-494.

【马赫, 2014】 马赫. 力学极其发展的批判历史概论. 李醒民, 译. 北京: 商务印书馆, 2014.

【马赫, 2016】 马赫. 科学与哲学讲演录. 庞晓光/李醒民, 译. 北京: 商务印书馆, 2016.

【Milner, 2013】 Milner R G. A Short History of Spin. XVth International Workshop on Polarized Sources, Targets, and Polarimetry. Charlottesville, Virginia, USA. 2013. (DOI: 10.22323/1.182.0003).

【Nernst, 1906】 Nernst W. Über die Berechnung chemischer Gleichgewichte aus thermischen Messungen [On the calculation of chemical equilibria from thermal measurements], Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-Physikalische Klasse. 1906, pp.1–40 (page 5).

【牛谦, 2024】 牛谦、高阳. 电子粒子观的蜕变. 物理, 2024, 53(1):1-11.

【欧阳霄宇, 2023】 欧阳霄宇, 叶麒俊, 李新征. 物质的态与相. 物理, 2023, 52(11): 786.

【Ouyang, 2024】 Ouyang X Y, Ye Q J, Li X Z. Complex phase diagram and supercritical matter. Phys. Rev. E, 2024, 109: 024118.

【庞加莱, 2010】 彭加勒 (著) (彭加勒即本书中庞加莱). 科学的价值. 李醒民, 译. 北京: 商务印书馆, 2010.

【庞加莱, 2021】 彭加勒 (著) (彭加勒即本书中庞加莱). 科学与假设. 李醒

民, 译. 北京: 商务印书馆, 2021

【Pauli, 1925a】 Pauli W. Über den Einfluß der Geschwindigkeitsabhängigkeit der Elektronenmasse auf den Zeemaneffekt [On the influence of the velocity dependence of the electron mass on the Zeeman effect]. Zeitschrift für Physik, 1925, 31: 373-385.

【Pauli, 1925b】 Pauli W. Über den Zusammenhang des Abschlusses der Elektronengruppen im Atom mit der Komplexstruktur der Spektren [On the connection between the closure of the electron groups in the atom and the complex structure of the spectra]. Zeitschrift für Physik, 1925, 31: 765-783.

【Pauli, 1926】 Pauli W. Über das Wasserstoffspektrum vom Standpunkt der neuen Quantenmechanik [On the hydrogen spectrum from the standpoint of the new quantum mechanics]. Z. Physik, 1926, 36: 336-363.

【Pauli, 1927a】 Pauli W. Zur Quantenmechanik des magnetischen Elektrons [On the Quantum Mechanics of the Magnetic Electron]. Zeitschrift für Physik, 1927, 43:601.

【Pauli, 1927b】 Pauli W. Über Gasentartung und Paramagnetismus [On gas degeneracy and paramagnetism]. Zeitschrift für Physik, 1927, 41(6 – 7):81 – 102.

【Penrose, 1965】 Penrose R. Gravitational Collapse and Space-Time Singularities. Phys. Rev. Lett., 1965, 14: 57.

【Planck, 1900】 Planck M. Über eine Verbesserung der Wien'schen Spectralgleichung [On an Improvement of Wien's Spectral Equation], Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft, 1900, 2(13): 202-204.

【Poincare, 1905】 Poincaré H. Sur la dynamique de l' electron [On the dynamics of the electron]. Note de H. Poincaré. C.R. T., 1905, 140: 1504-1508.

【Preston, 1898】 Preston T. Radiation phenomena in a strong magnetic field. The Scientific Transactions of the Royal Dublin Society. 2nd series. 6: 385 – 391. 1898(year).

(Preston 这条不太确认格式，请编辑老师帮忙确定)

【Reyleigh, 1900】 Reyleigh J W S. Remarks upon the law of complete radiation, Phil. Mag., 1900, 49: 539.

【Richards, 1902】 Richards T W. The Significance of Changing Atomic Volume III: The Relation of Changing Heat Capacity to Change of Free Energy, Heat of Reaction, Change of Volume, and Chemical Affinity. Proc. Am. Acad. Arts Sci., 1902, 38(7): 293.

【Ross, 1962】 Ross S. Scientist: The story of a word. Annals of Science, 1962, 18: 65–85 (page 72)

【Rowland, 1883】 Rowland H A. A Plea for Pure Science. Nature, 1883, 28: 510.

【Sakurai, 2017】 Sakurai J J, Napolitano J. Modern Quantum Mechanics (Second Edition). Cambridge University Press, 2017.

【Schirmacher, 2019】 Schirmacher A. Establishing Quantum Physics in Göttingen. Switzerland: Springer Nature, 2019. (<https://doi.org/10.1007/978-3-030-22727-2>)

【Schrödinger, 1926a】 Schrödinger E. An Undulatory Theory of the Mechanics of Atoms and Molecules. Phys. Rev., 1926, 28: 1049.

【Schrödinger, 1926b】 Schrödinger E. Quantisierung als Eigenwertproblem [Quantization as an Eigenvalue Problem]. Annalen der Physik, 1926, 384 (4): 273-276.

【Schrödinger, 1926c】 Schrödinger E. Quantisierung als Eigenwertproblem [Quantization as an Eigenvalue Problem]. Annalen der Physik, 1926, 384(4): 361-376.

【Schrödinger, 1926d】 Schrödinger E. Quantisierung als Eigenwertproblem

[Quantization as an Eigenvalue Problem]. Annalen der Physik, 1926, 384(6): 489-527.

【Schrödinger , 1926e】 Schrödinger E. Quantisierung als Eigenwertproblem

[Quantization as an Eigenvalue Problem]. Annalen der Physik, 1926, 385(13): 437-490.

【Schrödinger , 1926f】 Schrödinger E. Quantisierung als Eigenwertproblem

[Quantization as an Eigenvalue Problem]. Annalen der Physik, 1926, 386(18): 109-139.

【Schrödinger , 1926g】 Schrödinger E. Über das Verhältnis der

Heisen-berg-Born-Jordanschen Quantenmechanik zu der meinem [On the relationship

between Heisenberg-Born-Jordan quantum mechanics and my]. Annalen der Physik,

1926, 384(8): 734-756.

【Schwarzschild, 1916】 Schwarzschild K. On the Gravitational Field of a Mass Point

according to Einstein’ s Theory. Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.),

1916, 189–196.

【Shapley, 1918】 Shapley H. Studies of Magnitudes in Star Clusters: VIII. A Summary of

Results Bearing on the Structure of the Sidereal Universe. Proc. Natl. Acad. Sci. USA.,

1918, 4 (8) 224-229.

【叔本华, 2018】 叔本华. 作为意志和表象的世界. 石冲白, 译. 北京: 商务印书

馆, 2018.

【叔本华, 2022】 叔本华. 充足理由律的四重根. 陈晓希, 译. 北京: 商务印书馆,

2022.

【Slater, 1954】 Slater J C, Koster G F. Simplified LCAO method for the Periodic

Potential Problem. Physical Review, 1954, 94 (6): 1498 – 1524.

【Sommerfeld, 1916】 Sommerfeld A. Zur Quantentheorie der Spektrallinien [On the

Quantum Theory of Spectral Lines]. Annalen der Physik, 1916, 356: 125.

【Sommerfeld, 1923】 Sommerfeld A. Atomic Structure and Spectral Lines. E. P. Dutton, New York, 1923.

【Sommerfeld, 1928】 Sommerfeld A. Zur Elektronentheorie der Metalle auf Grund der Fermischen Statistik [On the Electron Theory of Metals Based on Fermi Statistics] (in German). Zeitschrift für Physik., 1928, 47 (1 – 2): 1 – 32.

【Sommerfeld, Bethe, 1933】 Sommerfeld A, Bethe H. The Electron Theory of Metals. In H. Geiger & K. Scheel (Eds.), Handbuch der Physik (Vol. 24, Part 2), Berlin: Springer. (In German), 1933.

【Stefan, 1879】 Stefan J. Über die Beziehung zwischen der Wärmestrahlung und der Temperatur [On the relationship between thermal radiation and temperature]. Sitzungsber. Kaiserl. Akad. Wiss. Math. Naturwiss. Cl. II. Abth., 1879, 79 (3): 391-428.

【Stern, 1921】 Stern O. Ein Weg zur experimentellen Pruefung der Richtungsquantelung im Magnetfeld" [A way to experimentally test directional quantization in a magnetic field]. Zeitschrift für Physik., 1921, 7 (1): 249 – 253.

【孙昌璞, 2013】 孙昌璞. 玻恩与量子革命实践. 科学文化评论, 2013, 10 (1) : 5–19.

【孙昌璞、葛墨林, 2022】 孙昌璞、葛墨林. 经典杨–米尔斯场理论. 北京: 高等教育出版社, 2022.

【孙昌璞, 2024】 孙昌璞. 量子力学现代教程. 北京: 北京大学出版社, 2024.

【Thomas, 1926】 Thomas L H. The Motion of the Spinning Electron. Nature, 1926, 117: 514.

【Thomson, 1928】 Thomson G P. Experiments on the Diffraction of Cathode Rays, Proc. R. Soc. Lond. A, 1928, 117: 600 – 609.

【Tolpygo, 1950】 Tolpygo K B. Physical properties of a rock salt lattice made up of deformable ions (in Russian). Zhurnal Eksperimentalnoi I Teoreticheskoi Fiziki (J. Exp. Theor. Phys.), 1950, 20 (6): 497 – 509. English translation: Ukrainian Journal of Physics, vol. 53, special issue (2008).

【Uhlenbeck, 1925】 Uhlenbeck G E, Goudsmit S. Ersetzung der Hypothese vom unmechanischen Zwang durch eine Forderung bezüglich des inneren Verhaltens jedes einzelnen Elektrons [Replacing the hypothesis of non-mechanical constraint with a requirement regarding the internal behavior of each individual electron]. Die Naturwissenschaften, 1925, 13: 953-954.

【Uhlenbeck, 1926】 Uhlenbeck G E, Goudsmit S. Spinning Electrons and the Structure of Spectra. Nature, 1926, 264–265.

【Van der Waerden, 1968】 Van der Waerden B L. Sources of Quantum Mechanics. Dover, New-York, 1968.

【Weinberg, 2008】 Weinberg S. From BCS to the LHC. AAPPs Bulletin, 2008, 18(2): 30.

【韦丹, 2023】 韦丹. 固体物理. 北京: 高等教育出版社, 2023.

【Wien, 1896】 Wien W. On the division of energy in the emission-spectrum of a black body, Philosophical Magazine Series 5, 1896, 43(262): 214–220.

【吴崇试、高春媛, 2024】 吴崇试、高春媛. 数学物理方法. 北京: 北京大学出版社, 2024.

【吴从军, 2022】 吴从军. 电子社会学: 凝聚态物理的内容和风格. 物理, 2022, 51:

53-58.

【吴从军, 2024】吴从军. 海森堡的魔法与矩阵力学的建立. 物理, 2024, 53(7): 488-495.

【谢林, 2022】谢林. 一种自然哲学的理念. 庄振华, 译. 北京: 北京大学出版社, 2022.

【谢梦祥, 2022】谢梦祥, 任捷. “声子”概念的诞生. 物理, 2022, 51(12): 855.

【杨振宁、翁帆, 2018】杨振宁, 翁帆. 晨曦集. 北京: 商务印书馆, 2018.

【Yang, 1952】Yang C N, Lee T D. Statistical Theory of Equations of State and Phase Transitions. I. Theory of Condensation. Phys. Rev. B, 1952, 87(3): 404.

【Ye, 2021】Ye Q J, Zhuang L, Li X Z. Dynamic Nature of High-Pressure Ice VII. Phys. Rev. Lett., 2021, 126: 185501.

【Ye, 2023】Ye Q J, Li X Z. Dynamic Phase Transition Theory. Science China Physics, Mechanics & Astronomy, 2023, 66: 227212.

【Zeeman, 1896】Zeeman P. Over de invloed eener magnetisatie op den aard van het door een stof uitgezonden licht [On the influence of magnetism on the nature of the light emitted by a substance]. Reports of the Ordinary Sessions of the Mathematical and Physical Section (Royal Academy of Sciences in Amsterdam) (in Dutch). 1896, 5: 181 – 184 and 242 – 248.

【张酊, 2021】张酊. 漫步物理世界. 北京: 北京大学出版社, 2021.

【张红, 2007】张红 (主编). 数学简史. 北京: 科学出版社, 2007.

【张礼, 2009】张礼 (主编). 近代物理学进展. 北京: 清华大学出版社, 2009.

【张天蓉、葛惟昆, 2021】张天蓉、葛惟昆. 科学传奇. 北京: 商务印书馆, 2021.

【赵敦华, 2012】赵敦华. 西方哲学简史（第二版）. 北京：北京大学出版社，2001.

【赵凯华, 2005】赵凯华（主编），秦克诚（副主编）. 物理学照亮世界，北京：北京大学出版社，2005.

【赵峥, 2015】赵峥. 爱因斯坦与广义相对论. 物理, 2015, 44(10): 646-656.

【朱守华, 2024】朱守华. 科学与共识. 北京：北京大学出版社，2024.